

























**LECCIONES**  
**DE**  
**ANALISIS MATEMATICO**



THE COLONIES

ANALYSIS OF THE



Aldo Ghizzetti

LECCIONES

DE

ANALISIS MATEMATICO

VOLUMEN II

Versión Castellana de

Edmundo Rofman

Profesor de la Universidad Nacional del Litoral

Editorial Universitaria Cultura Argentina

1968



**Editorial Universitaria Cultura Argentina**

*Hecho el depósito que marca la ley 11.723*

*Se reservan los derechos en los países del Continente Americano*

*Impreso en Argentina*

*Printed in Argentina*



## **ADVERTENCIA**

En este Volumen II de LECCIONES DE ANALISIS MATEMATICO la numeración de los capítulos prosigue la del Volumen I (versión castellana, E.U.C.A., 1966). Se aconseja al lector a acompañar el estudio de ambos volúmenes con la consulta de la obra COMPLEMENTOS Y EJERCICIOS DE ANALISIS MATEMATICO, del Profesor A. Ghizzetti, Volúmenes I y II, que será citada con (Ejercicios, Cap. . . . , ej. . . . ).

**EL EDITOR**



# ADVERTENCIA

El presente libro es una traducción de la obra de  
J. J. A. (1861) de la que se ha tomado el título.  
El autor de esta obra, J. J. A., ha publicado  
en la ciudad de Madrid, en el año de 1861, una  
obra de gran importancia, titulada "El  
problema de la vida", en la que se trata de  
la vida humana y de su destino. Esta obra  
ha sido traducida al español por el autor de  
esta obra, y se publica en esta forma.

EL EDITOR



## CAPITULO XX

### Medida de los conjuntos acotados

#### 1 - MEDIDA DE LOS INTERVALOS DE UN ESPACIO EUCLIDEO DE $r$ DIMENSIONES.

Recordemos (Cap. XIV, n<sup>o</sup> 1) que, dados en el espacio euclídeo de  $r$  dimensiones dos puntos  $A (a_1, a_2, \dots, a_r)$ ,  $B (b_1, b_2, \dots, b_r)$ , de modo que sean  $a_1 < b_1$ ,  $a_2 < b_2$ ,  $\dots$ ,  $a_r < b_r$ , se denomina intervalo cerrado (o dominio rectangular) de puntos extremos  $A, B$ , al conjunto  $R$  de los puntos  $P (x_1, x_2, \dots, x_r)$  de  $S_r$  cuyas coordenadas verifican las desigualdades  $a_1 \leq x_1 \leq b_1$ ,  $a_2 \leq x_2 \leq b_2$ ,  $\dots$ ,  $a_r \leq x_r \leq b_r$ .

Para  $r=1$  tal intervalo (\*)  $R$  es un segmento de longitud  $b_1 - a_1$ ; para  $r=2$  es un rectángulo de área  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ ; para  $r=3$  es un paralelepípedo de volumen  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$ .

Esta observación nos induce a definir en general una medida para el intervalo  $R$ , haciéndola igual al producto  $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_r - a_r)$  de sus dimensiones. Para indicar tal medida usaremos la notación  $\text{med } R$ .

Para fijar las ideas nos referiremos esencialmente al caso  $r=2$ ; pero los razonamientos que haremos tendrán validez general, aconsejando al lector tomar particularmente en consideración también los casos  $r=1$  y  $r=3$ .

-----  
(\*)

En lo sucesivo diremos simplemente intervalo en lugar de intervalo cerrado.



Suponiendo entonces que  $R$  sea un intervalo plano ( $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ ), consideremos los dos intervalos lineales  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  que lo definen y subdividámoslos en  $p$  y  $q$  intervalos parciales, respectivamente. Esto se obtiene fijando, en el interior de  $[a, b]$ ,  $p-1$  puntos  $x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1}$  y, en el interior de  $[c, d]$ ,  $q-1$  puntos  $y_1 < y_2 < \dots < y_{q-1}$ , lo que produce la subdivisión de  $[a, b]$  en los intervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{p-1}, x_p]$$

y la de  $[c, d]$  en los intervalos

$$[y_0, y_1], [y_1, y_2], \dots, [y_{q-1}, y_q],$$

donde, por uniformidad de escritura, se ha considerado  $x_0 = a$ ,  $x_p = b$ ,  $y_0 = c$ ,  $y_q = d$ .

Fijemos ahora uno cualquiera  $[x_h, x_{h+1}]$ , ( $h = 0, 1, \dots, p-1$ ) de los intervalos parciales de  $[a, b]$  y uno cualquiera  $[y_k, y_{k+1}]$ , ( $k = 0, 1, \dots, q-1$ ) de los intervalos parciales de  $[c, d]$ . Estos dos intervalos lineales fijados determinan en el plano el intervalo de puntos extremos  $[x_h, y_k]$ ,  $[x_{h+1}, y_{k+1}]$ , intervalo que indicaremos con  $R_{hk}$  y que resulta contenido en

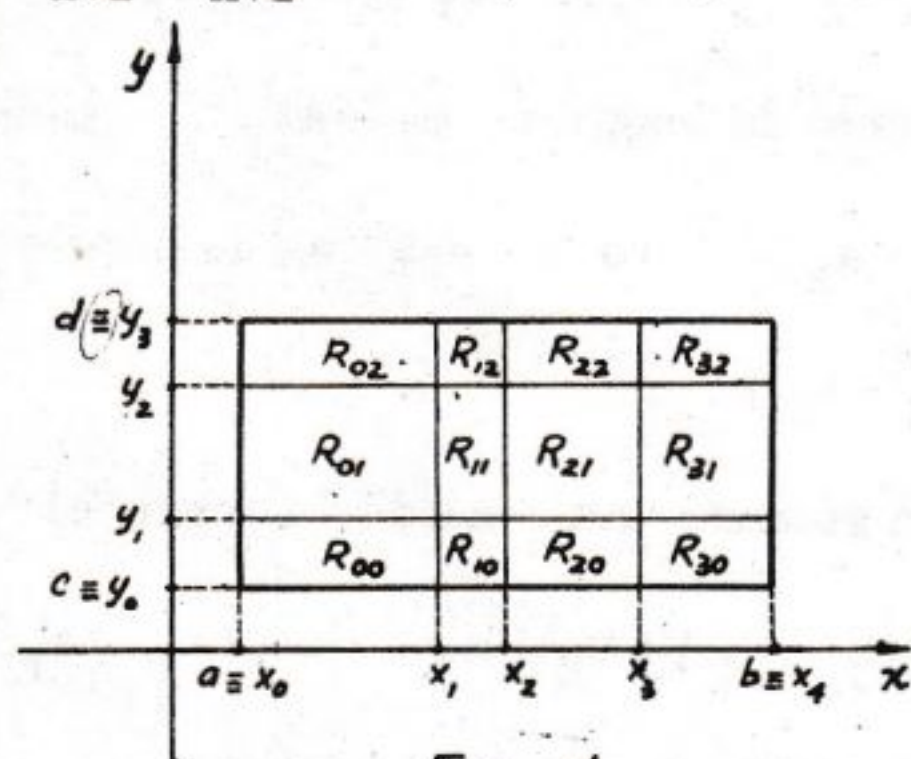


Fig. 1

$R$ . Variando la elección de los índices  $h, k$  obtenemos en total  $pq$  intervalos  $R_{hk}$  y el intervalo  $R$  resulta, evidentemente, la unión de todos ellos:

$$R = \bigcup_{h=0}^{p-1} \bigcup_{k=0}^{q-1} R_{hk}, \quad (1)$$

en el sentido (Cap. XIV, n° 3) que cada punto

de  $R$  pertenece a, por lo menos, uno de los  $R_{hk}$ ; además, dos cualesquiera de los  $R_{hk}$  no tienen puntos internos en común.

Cuando así procedamos diremos que el intervalo  $R$  ha sido descompuesto coordinadamente en los intervalos  $R_{hk}$ , o también que éstos proporcionan una descomposición coordinada de  $R$  en intervalos



parciales (\*).

Se ve fácilmente que resulta

$$\text{med } R = \sum_{h=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} \text{med } R_{hk},$$

puesto que el segundo miembro vale

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} (x_{h+1} - x_h) (y_{k+1} - y_k) &= \sum_{h=0}^{p-1} (x_{h+1} - x_h) \sum_{k=0}^{q-1} (y_{k+1} - y_k) = \\ &= (b - a) (d - c) = \text{med } R \end{aligned}$$

Observemos la siguiente propiedad que constituye una extensión de la (2) :

I - Sean  $R_1, R_2, \dots, R_n$  intervalos contenidos en el intervalo  $R$ , carentes dos a dos de puntos internos en común. Tendremos, entonces,

$$\text{med } R_1 + \text{med } R_2 + \dots + \text{med } R_n \leq \text{med } R,$$

valiendo el signo de igualdad si y sólo si  $R$  es la unión de los  $n$  intervalos  $R_1, R_2, \dots, R_n$  (en particular si éstos proporcionan una descomposición coordinada de  $R$ ).

Dem. Siempre refiriéndonos al caso  $r=2$ , basta pensar que es posible construir al menos una descomposición coordinada de  $R$  en intervalos  $R_{hk}$  de modo tal que el conjunto  $R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$  sea la unión de una parte de los citados intervalos  $R_{hk}$  (eventualmente de todos) y tener en cuenta la (2). Sin en-

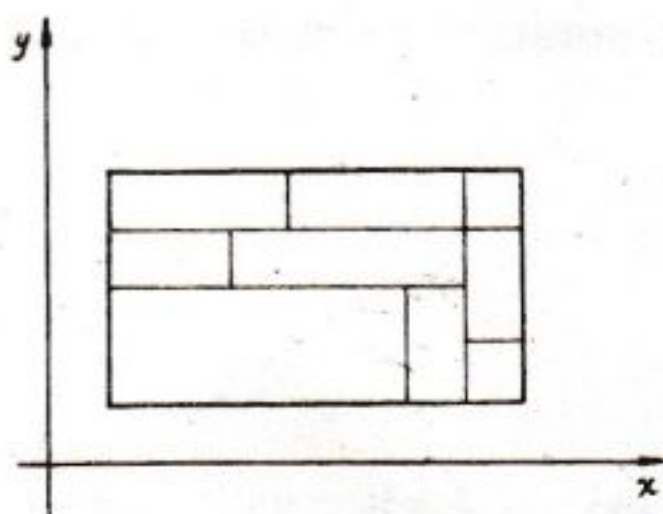


fig. 2

(\*) Es casi superfluo observar que, para  $r > 1$ , se pueden obtener descomposiciones de  $R$  en intervalos parciales, carentes dos a dos de puntos internos en común, que no sean descomposiciones coordinadas. (véase fig. 2).



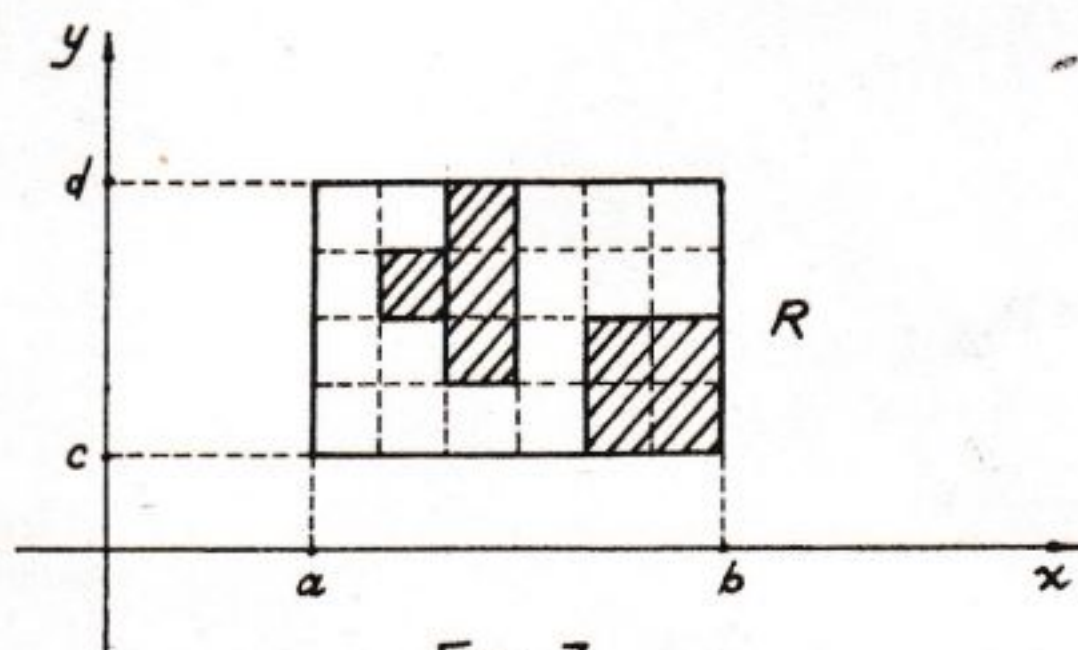


Fig. 3

## 2 - MEDIDA EXTERIOR Y MEDIDA INTERIOR DE UN CONJUNTO ACOTADO.

En el n° 1 hemos establecido el concepto de medida para los intervalos de un espacio euclídeo  $S_r$ ; se presenta ahora naturalmente el problema de extender tal concepto a un conjunto acotado cualquiera  $E$  de  $S_r$  de modo de reencontrar, como caso particular, todas las áreas y los volúmenes considerados en la geometría elemental, como también las áreas de los rectángulos ya definidas en Cap. IX, n° 3.

Observemos primeramente que es esencial precisar el espacio al que se considera que  $E$  pertenece puesto que, por ejemplo, un segmento pensado como conjunto de puntos de una recta tiene una medida (longitud) positiva, mientras que pensado como conjunto de puntos de un plano tiene una medida (área) igual a cero. Se debería, entonces, hablar de medida del conjunto  $E$  sobre el espacio  $S_r$ ; por brevedad quedará comúnmente sobreentendida esta precisión.

Para llegar al concepto de medida del conjunto  $E$  podemos seguir un orden de ideas totalmente análogo al que se sigue en geometría elemental para definir, por ejemplo, el área del círculo (\*).

-----

(\*) La teoría de la medida que ahora exponemos se debe a Peano y a Jordan; en la literatura matemática se habla, comúnmente, de medida según Jordan. Existen otras teorías, de las cuales no nos ocuparemos.

trar en detalles sobre la construcción, el lector se convencerá fácilmente examinando la fig. 3 relativa al caso de tres intervalos contenidos en  $R$ .



Llamando con  $R$  a un intervalo que contenga a  $E$  y una vez realizada en él una subdivisión coordenada, consideraremos los intervalos de la misma que tienen por lo menos un punto en común con  $E$ , indicándolos con  $R_1''$ ,  $R_2''$ , ...,  $R_n''$  (véase fig. 4, donde  $n=30$ ); entre estos últimos consideraremos posteriormente aquéllos (si existen) que están totalmente constituidos por puntos interiores de  $E$ , designándolos con  $R_1'$ ,  $R_2'$ , ...,  $R_m'$  (véase fig. 5, donde  $m=7$ ).

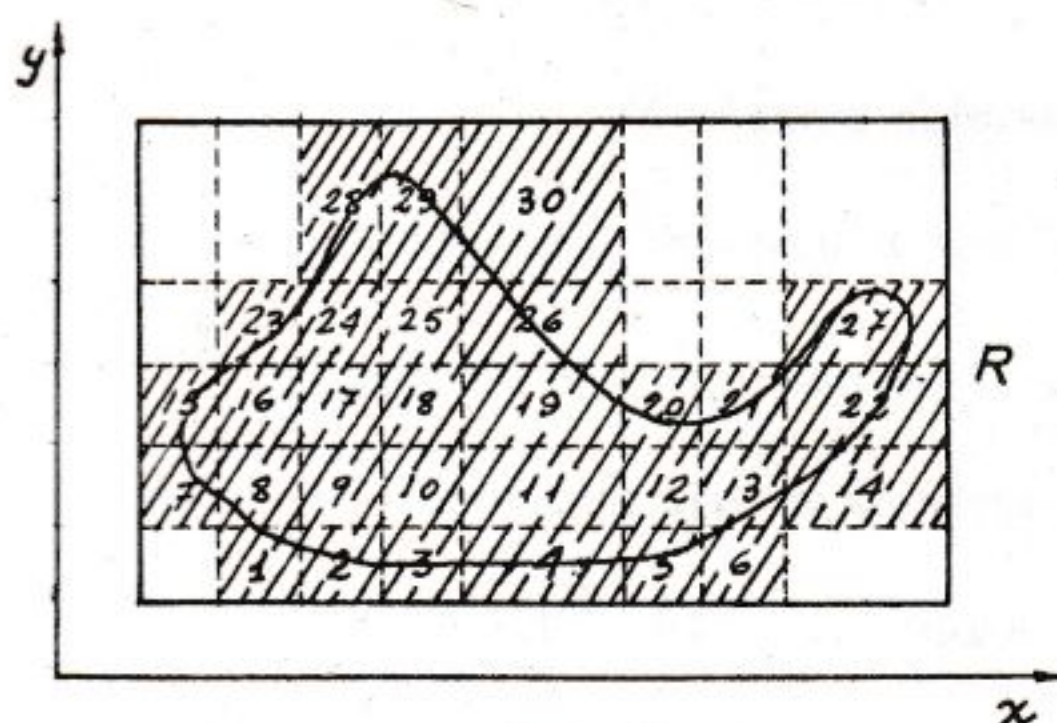


Fig. 4

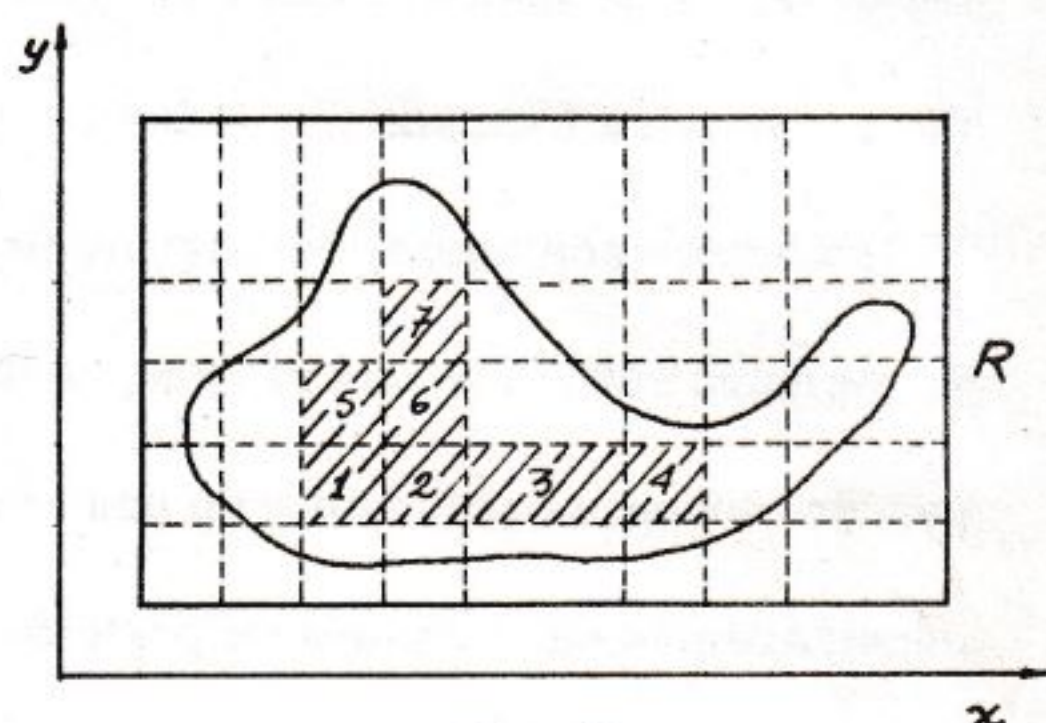


Fig. 5

El conjunto  $R_1'' \cup R_2'' \cup \dots \cup R_n''$  contiene a  $E$ ; el conjunto  $R_1' \cup R_2' \cup \dots \cup R_m'$  (vacío si  $m=0$ ) está contenido en  $E$ , por lo que, consideradas las dos sumas<sup>(\*)</sup>

$$S'' = \sum_{i=1}^n \text{med } R_i'' \quad , \quad S' = \sum_{j=1}^m \text{med } R_j' \quad , \quad (1)$$

es natural considerar a  $S''$  como un valor mayor o igual (a  $S'$  como un valor menor o igual) que la medida que estamos buscando.

Esta observación nos induce a considerar el extremo inferior  $\sigma''$  del conjunto numérico constituido por todas las posibles sumas  $S''$  (con el variar de la descomposición coordenada  $\mathcal{D}$  de  $R$ ) y el extremo superior  $\sigma'$  del conjunto numérico formado por todas las posibles sumas  $S'$ . Si resultase  $\sigma'' = \sigma'$

(\*) La suma  $S''$  es siempre positiva; la  $S'$  es considerada igual a cero cuando no existe ningún intervalo  $R_j'$  (esto sucede, por ejemplo, si  $E$  carece de puntos interiores).



no cabría duda de que este número debería asumirse como medida del conjunto  $E$ . Sin embargo, no resulta en general cierto el hecho de encontrar  $\sigma'' = \sigma'$  y, por lo tanto, conviene introducir las siguientes definiciones.

Llamaremos medida exterior del conjunto  $E$  (y la indicaremos con  $\text{med}_e E$ ) al extremo inferior  $\sigma'' \geq 0$  del conjunto numérico constituido por todas las sumas  $S''$  antes definidas; llamaremos medida interior<sup>(\*)</sup> del conjunto  $E$  (y la indicaremos con  $\text{med}_i E$ ) al extremo superior  $\sigma' \geq 0$  del conjunto numérico formado por todas las posibles sumas  $S'$ .

Establezcamos ahora algunas propiedades de estas medidas (exterior e interior) y, siempre refiriéndonos al caso  $r=2$ , comencemos mostrando que las mismas pueden obtenerse por medio de una operación de pasaje al límite. Precisamente, consideremos en cada descomposición coordinada  $D$  del intervalo  $R$  en intervalos parciales  $R_{hk}$  la amplitud (o los diámetros)  $\delta_{hk}$  de estos intervalos y designemos con  $\delta$  al mayor entre ellos; este número positivo  $\delta$  será llamado la norma<sup>(\*\*)</sup> de la descomposición  $D$ . Vale el siguiente teorema:

I - Con el tender a cero de la norma  $\delta$  de la descomposición coordinada  $D$  del intervalo  $R$  que contiene al conjunto  $E$ , las sumas  $S''$  y  $S'$  consideradas en (1) tienden a la medida exterior  $\sigma''$  y a la medida interior  $\sigma'$ , respectivamente, del conjunto  $E$ . Es decir, se tiene

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S'' = \sigma'' \quad (2)$$

(\*) Para poder aceptar estas definiciones es necesario sin embargo hacer ver que  $\sigma'$  y  $\sigma''$  dependen solamente del conjunto  $E$  y no de la elección del intervalo  $R$  que contiene a  $E$  y usado para la construcción de las sumas (1); este hecho será demostrado en breve (véase teorema III).

(\*\*) Recordemos (Cap. XIV, n° 2) que la amplitud (o el diámetro) de un intervalo es la distancia entre sus puntos extremos. La locución "norma" de una descomposición coordinada  $D$  de un intervalo ya ha sido usada en el caso  $r=1$  en el Cap. IX, n° 2.



$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S' = \sigma'. \quad (3)$$

Dem. Comencemos demostrando la (2). Teniendo en cuenta que, por definición de medida exterior, resulta  $S'' \geq \sigma''$  debemos hacer ver que, fijado  $\epsilon > 0$  arbitrariamente, existe siempre un  $\delta_\epsilon > 0$  tal que, para toda descomposición coordinada  $\mathcal{D}$  de  $R$  que tenga norma  $\delta < \delta_\epsilon$  resulta

$$S'' < \sigma'' + \epsilon \quad (4)$$

Supongamos  $R$  definido por las  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  y observemos primeramente que, siendo  $\sigma''$  el extremo inferior del conjunto constituido por todas las posibles sumas  $S''$ , existirá sin duda una descomposición coordinada particular  $\mathcal{D}_\epsilon$  de  $R$  que origina un valor  $S''$  que verifica

$$S_\epsilon'' < \sigma'' + \epsilon \quad (5)$$

Supongamos determinada la  $\mathcal{D}_\epsilon$  y que ésta haya sido obtenida subdividiendo los intervalos  $[a, b]$  y  $[c, d]$  en  $p$  y  $q$  intervalos parciales respectivamente, de modo que el interior de  $R$  resulta surcado por un reticulado  $\mathcal{P}_\epsilon$  constituido por  $p-1$  paralelas al eje  $y$ , y por  $q-1$  paralelas al eje  $x$  (representadas en fig. 6 por líneas rectas punteadas) que dividen a  $R$  en  $pq$  intervalos. Entre éstos designemos con  $T_1, T_2, \dots, T_m$  aquéllos que tienen al menos un punto en común con el conjunto  $E$ , por lo que se tendrá

$$S_\epsilon'' = \sum_{k=1}^m \text{med } T_k \quad (6)$$

Consideremos luego una descomposición coordinada cualquiera  $\mathcal{D}$  de  $R$ , definida por un cierto reticulado  $\mathcal{P}$  de rectas paralelas a los ejes (en fig. 6 son las líneas de trazo lleno) cuya norma designaremos con  $\delta$ . Con la notación ya introducida corresponderá a la  $\mathcal{D}$  la suma

$$S'' = \sum_{i=1}^n \text{med } R_i'' \quad (7)$$

Confrontemos las sumas (6) y (7). A tal fin observemos que los intervalos



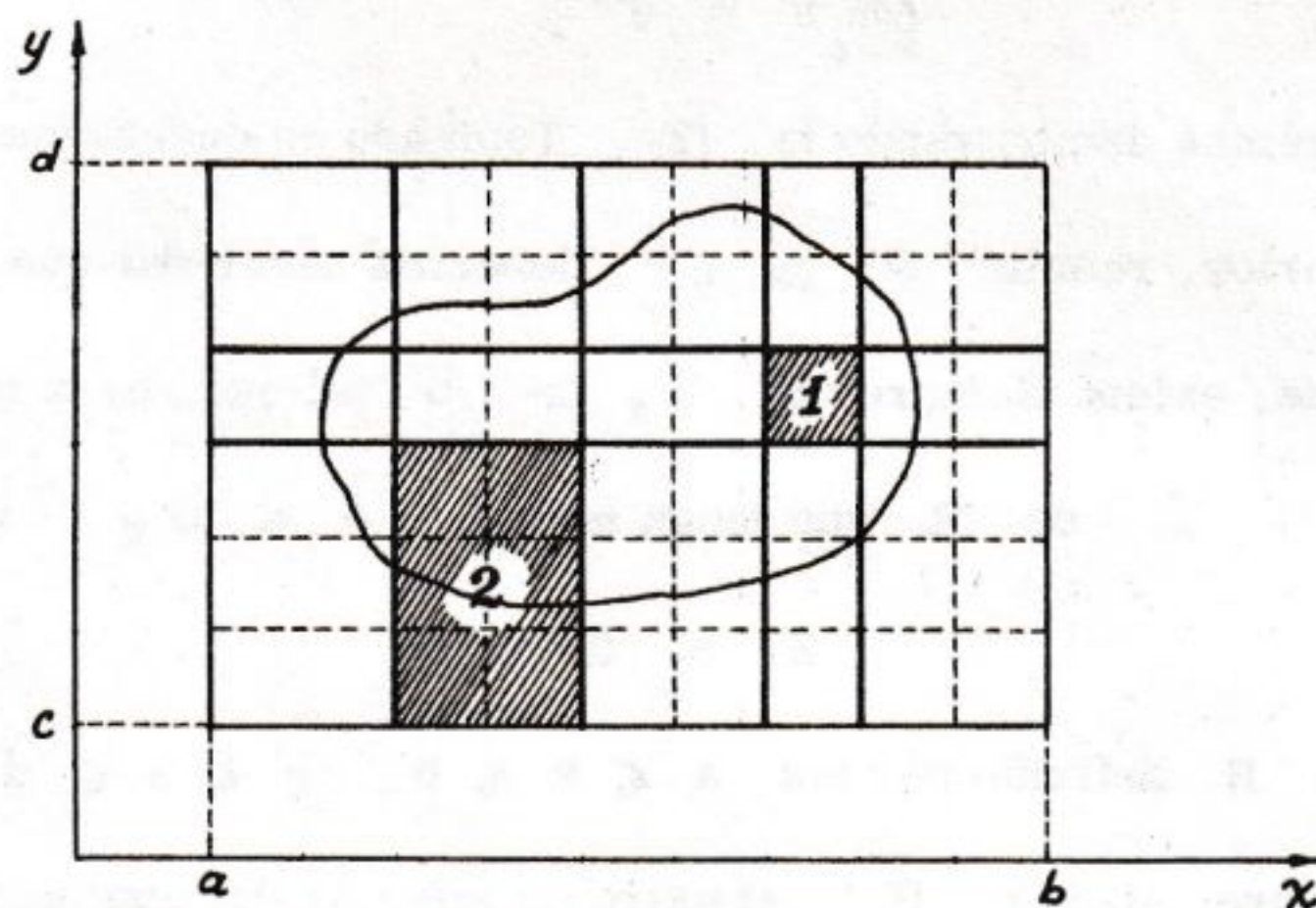


Fig. 6

$R_1'', R_2'', \dots, R_n''$ , que aparecen en la (7) pueden separarse en dos categorías: 1º) los que no son atravesados por ninguna recta del reticulado  $\mathcal{P}_\epsilon$  (por ejemplo, el intervalo 1 de la fig. 6) y que indicaremos con  $U_1, U_2, \dots, U_\alpha$ ; 2º) los que son atravesados al menos por una recta de tal reticulado (por ejemplo el rectángulo 2 de la fig. 6) y que indicaremos con  $V_1, V_2, \dots, V_\beta$ . Escribiremos, entonces,

$$S'' = \sum_{i=1}^{\alpha} \text{med } U_i + \sum_{j=1}^{\beta} \text{med } V_j. \quad (8)$$

Este intervalo  $U_i$  resultará contenido en uno de los intervalos  $T_1, T_2, \dots, T_m$  (puesto que no es atravesado por ninguna recta del reticulado  $\mathcal{P}_\epsilon$ ). La suma de las medidas de aquellos  $U_i$  que están contenidos en un mismo  $T_k$  no supera a  $\text{med } T_k$  (por el teor. I del nº 1) y entonces será con certeza

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \text{med } U_i \leq \sum_{k=1}^m \text{med } T_k, \text{ o sea, por la (6):}$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \text{med } U_i \leq S_\epsilon''. \quad (9)$$

Los intervalos  $V_j$  son, en cambio, los que sí son atravesados por rectas del reticulado  $\mathcal{P}_\epsilon$  que, como sabemos, está formado por  $p-1$  paralelas al eje



y, y por  $q-1$  paralelas al eje  $x$ . Consideremos una de estas paralelas, por ejemplo al eje  $y$ ; si existen intervalos  $V_j$  atravesados por ella, como los la dos horizontales de los intervalos son todos menores que  $\delta$  y la suma de los lados verticales no puede superar a  $d-c$ , es obvio que la suma de las medidas de dichos  $V_j$  es menor que  $(d-c)\delta$ . Repitiendo el razonamiento para cada una de las  $p-1$  paralelas al eje  $y$ , se concluye que la suma de las medidas de aquellos intervalos  $V_j$  que son atravesados al menos por una recta paralela al eje  $y$  del reticulado  $\mathcal{P}_\epsilon$  resulta inferior a  $(p-1)(d-c)\delta$ . Análogamente se llega a que la suma de las medidas de aquellos intervalos  $V_j$  que son atravesados al menos por una paralela al eje  $x$  de dicho reticulado resulta inferior a  $(q-1)(b-a)\delta$ , teniéndose entonces

$$\sum_{j=1}^p \text{med } V_j < [(p-1)(d-c) + (q-1)(b-a)]\delta \quad (10)$$

De las (8), (9), (10), resulta:

$$S'' < S_\epsilon'' + [(p-1)(d-c) + (q-1)(b-a)]\delta$$

por lo que la (4) se verificará sin duda cuando

$$S_\epsilon'' + [(p-1)(d-c) + (q-1)(b-a)]\delta < \sigma'' + \epsilon,$$

o sea, cuando la norma  $\delta$  de la descomposición  $\mathcal{D}$  sea elegida de modo que se verifique

$$\delta < \frac{\sigma'' + \epsilon - S_\epsilon''}{(p-1)(d-c) + (q-1)(b-a)} \quad (11)$$

lo que es factible, ya que el segundo miembro de (11) es positivo en virtud de la (5).

Queda así demostrada la validez de la (4) para todas las sumas  $S''$  originadas por una descomposición coordinada cualquiera  $\mathcal{D}$  de  $R$  que tenga por norma  $\delta$  un valor menor que el número  $\delta_\epsilon$  indicado en el segundo miembro de (11), por lo que la (2) resulta probada.



Pasemos a demostrar la (3). Fijada una descomposición coordinada  $D$  de  $R$  en intervalos parciales  $R_{hk}$ , consideremos entre éstos, aquéllos ya indicados con  $R_1', R_2', \dots, R_m'$  que generan la suma  $S' = \sum_{j=1}^m \text{med } R_j'$ . Los restantes intervalos de la descomposición, que indicaremos con  $R_1^*, R_2^*, \dots, R_l^*$  al no estar formados exclusivamente por puntos interiores de  $E$ , contendrán cada uno de ellos, o algún punto de  $R$  no perteneciente a  $E$  o, por lo menos, un punto de la frontera de  $E$ ; entonces dichos restantes intervalos  $R_1^*, R_2^*, \dots, R_l^*$  son todos y solamente aquellos intervalos de la descomposición  $D$  que tienen al menos un punto en común con el conjunto  $(R-E) \cup \mathcal{F}E$ .

Llamando con  $S^*$  a  $\sum_{k=1}^l \text{med } R_k^*$ , tendremos por la demostración precedente que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} S^* = \text{med}_e [(R-E) \cup \mathcal{F}E]$  siendo este límite, simultáneamente, el extremo inferior de las sumas  $S^*$ . Por otra parte es evidente  $\lim_{\delta \rightarrow 0} S' = \text{med}_i E$  por la (2) del n° 1 que  $\text{med } R = \sum_{j=1}^m \text{med } R_j' + \sum_{k=1}^l \text{med } R_k^*$ , o sea,

$$S' = \text{med } R - S^* . \quad (12)$$

Tendremos así que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} S' = \text{med } R - \lim_{\delta \rightarrow 0} S^* = \text{med } R - \text{med}_e [(R-E) \cup \mathcal{F}E]$ ; además, de la misma (12), surge que  $\text{med } R - \text{med}_e [(R-E) \cup \mathcal{F}E]$  es el extremo superior de las sumas  $S'$ , o sea, la medida interior  $\sigma'$  de  $E$ . Entonces tendremos  $\lim_{\delta \rightarrow 0} S' = \sigma'$ , que es lo que queríamos demostrar.

Demostremos ahora este otro teorema:

II - En todo conjunto acotado  $E$  resulta

$$\text{med}_i E = \text{med}_e E - \text{med}_e \mathcal{F}E \quad (13)$$

y, por lo tanto,

$$\text{med}_i E \leq \text{med}_e E \quad (14)$$

Dem. Dado que si el intervalo  $R$  contiene  $E$  contiene necesariamente también  $\mathcal{F}E$ , la clausura  $\bar{E} = E \cup \mathcal{F}E$  resultará contenida en  $E$  (cfr. Cap. XIV, n° 6). Comencemos demostrando que vale



$$\text{med}_e \bar{E} = \text{med}_e E \quad (15)$$

En toda descomposición coordinada  $\mathcal{D}$  de  $R$ , los intervalos que tienen puntos en común con  $\bar{E}$  comprenden a aquéllos que tienen puntos en común con  $E$  y de ahí que la suma  $S''$  de las medidas de los primeros es no menor que la suma  $S''$  de las medidas de los segundos; de la  $\bar{S}'' \geq S''$  sigue, pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\text{med}_e \bar{E} \geq \text{med}_e E \quad (16)$$

Por otra parte, fijada la descomposición  $\mathcal{D}$ , construida la suma  $S'' = \text{med } R_i''$  relativa al conjunto  $E$  y fijado además  $\epsilon > 0$ , probaremos que siempre es posible obtener otra descomposición coordinada  $\mathcal{D}_\epsilon$  de  $R$  que origine, para el conjunto  $\bar{E}$ , una suma  $\bar{S}_\epsilon''$  que satisfaga

$$\bar{S}_\epsilon'' < S'' + \epsilon \quad (17)$$

En efecto; continuemos refiriéndonos al caso  $r=2$  y supongamos  $R$  definido por las  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  y la descomposición  $\mathcal{D}$  de  $R$  subdividiendo los intervalos  $[a,b]$  y  $[c,d]$  en  $p$  y  $q$  intervalos parciales, respectivamente. Además, junto a la  $\mathcal{D}$  consideremos otra descomposición

$\mathcal{D}_\epsilon$  de  $R$  realizada manteniendo las  $p-1$  rectas paralelas al eje  $y$ , y las  $q-1$  paralelas al eje  $x$  que figuran en  $\mathcal{D}$  (dibujadas en fig. 7 con trazo lleno) y agregándole otras (con línea de puntos en fig. 7) hasta que la norma  $\delta_\epsilon$  de  $\mathcal{D}_\epsilon$  resulte menor que  $\frac{\epsilon}{2n[(b-a) + (d-c)]}$  (téngase presente que  $n$  es el número de los intervalos  $R_i''$  que figuran en la  $S''$  antes considerada).

Para cada intervalo  $R_i''$  designaremos con  $U_i$  al conjunto constituido por todos los intervalos de  $\mathcal{D}_\epsilon$  que son adyacentes a  $R_i''$  (véase fig. 7). Es fácil persuadirse que los intervalos de  $\mathcal{D}_\epsilon$  que tienen puntos en común con  $\bar{E}$  resultarán todos contenidos en el conjunto  $\bigcup_{i=1}^n (R_i \cup U_i)$ , donde la suma de las medidas de los intervalos de cada  $U_i$  resulta menor que



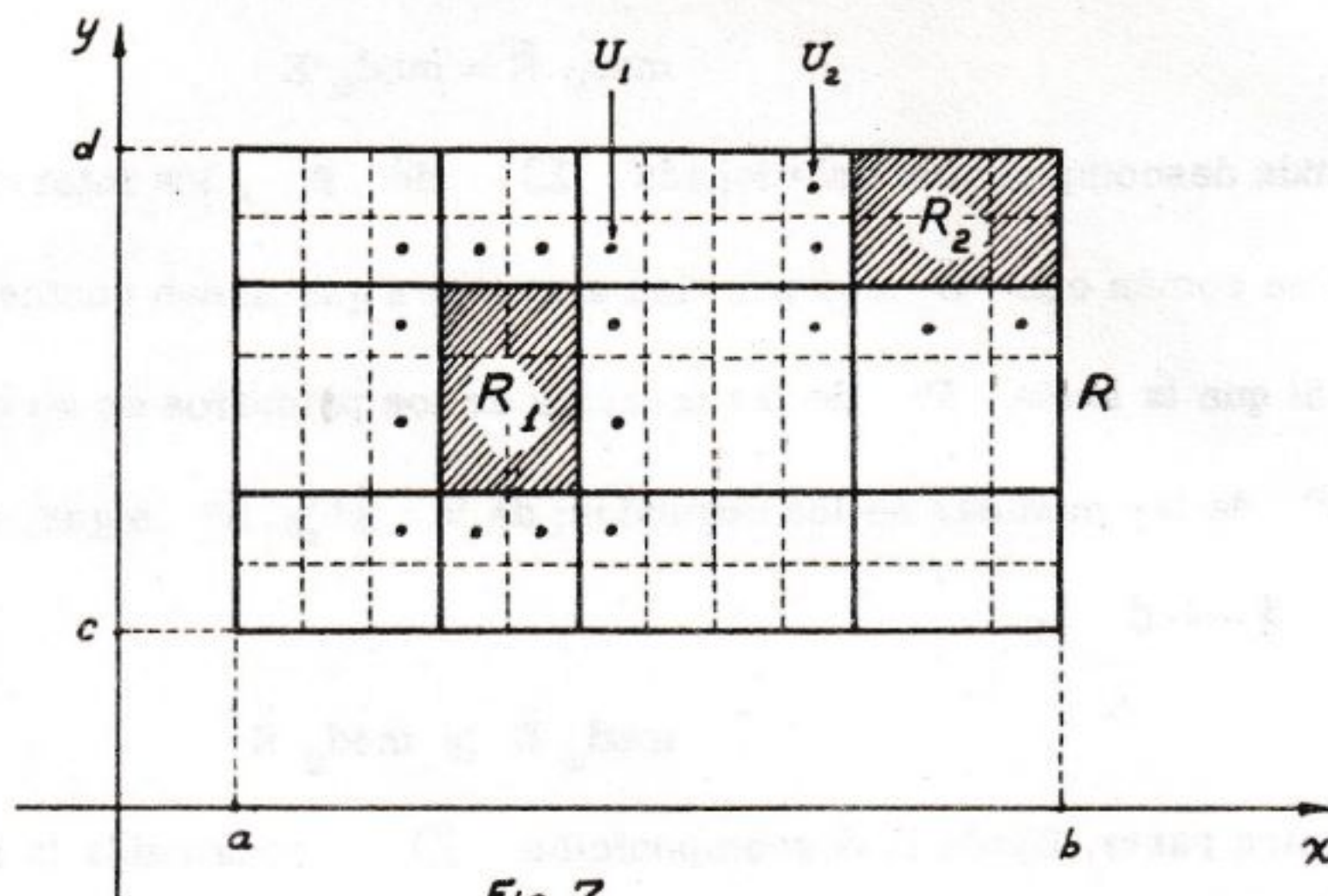


Fig. 7

$2 \delta_\epsilon [(b-a) + (d-c)]$ . Se tendrá, entonces,

$$\bar{S}_\epsilon'' < \sum_{i=1}^n \text{med } R_i + 2n \delta_\epsilon [(b-a) + (d-c)] < S'' + \epsilon,$$

o sea, la (17).

De esta última expresión, pasando al límite para  $\delta_\epsilon \rightarrow 0$ , se deduce que  $\text{med}_e E \leq S'' + \epsilon$ , o sea,  $S'' \geq \text{med}_e \bar{E} - \epsilon$ . Entonces, para el extremo inferior de las  $S''$  (que no es sino  $\text{med}_e E$ ), se tendrá sin duda  $\text{med}_e S'' \geq \text{med}_e \bar{E} - \epsilon$ .

Reuniendo esta desigualdad con la (16) podremos escribir  $\text{med}_e E \leq \text{med}_e \bar{E} \leq \text{med}_e E + \epsilon$ , de donde, por la arbitrariedad de  $\epsilon$ , sigue la (15).

Establecida la (15) es fácil llegar a la (13). Realizada una descomposición coordenada  $\mathcal{D}$  de  $R$ , consideremos los intervalos  $R'_1, R'_2, \dots, R'_m$ , formados exclusivamente por puntos interiores de  $E$  y además aquéllos (que indicaremos con  $W_1, W_2, \dots, W_l$ ) que tienen por lo menos un punto en común con  $\mathcal{F}E$ . Es evidente que los intervalos  $R'_1, R'_2, \dots, R'_m, W_1, W_2, \dots, W_l$  son precisamente todos (y solamente aquéllos) que tienen por lo menos un punto en común con la clausura  $\bar{E}$ . Se tendrá, entonces, (teor. I)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \sum_{j=1}^m \text{med } R'_j + \sum_{k=1}^l \text{med } W_k \right) = \text{med}_e \bar{E};$$



por otra parte resulta

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m \text{med } R_j' = \text{med}_i E \quad ; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^1 \text{med } W_k = \text{med}_e \mathcal{F}E \quad ,$$

quedando, por lo tanto, establecido que  $\text{med}_i E = \text{med}_e \bar{E} - \text{med}_e \mathcal{F}E$  ; ésta, junto a la (15), proporciona la (13), que es lo que queríamos demostrar.

Pasemos ahora a demostrar que:

III - La medida exterior y la medida interior de un conjunto acotado  $E$  tienen valores independientes del intervalo  $R$  que, entre aquéllos que contienen  $E$ , ha sido elegido para la definición y el cálculo de las referidas medidas.

Dem. Teniendo en cuenta la (13) bastará demostrar el teorema para la medida exterior.

Continuemos refiriéndonos al caso  $r=2$  y observemos que, cuando el punto  $P(x,y)$  recorre todo  $E$ , la primera coordenada  $x$  describe un conjunto numérico acotado que tendrá cierto extremo inferior  $\lambda_1$  y cierto extremo superior  $\Lambda_1$  ; análogamente la  $y$  describe un conjunto numérico acotado por los extremos  $\lambda_2$  y  $\Lambda_2$  , resultando  $\Lambda_1 - \lambda_1 \geq 0$  ,  $\Lambda_2 - \lambda_2 \geq 0$ . Distingamos dos casos: 1º) al menos una de las diferencias  $\Lambda_1 - \lambda_1$  ,  $\Lambda_2 - \lambda_2$  vale cero; 2º) tales diferencias son ambas positivas.

En el primer caso, suponiendo por ejemplo  $\Lambda_1 = \lambda_1$  , todos los puntos del conjunto  $E$  están situados sobre la recta  $x=\lambda_1$  y, por lo tanto, de cualquier modo que haya sido fijado el intervalo  $R$  y se lo haya descompuesto coordenadamente en intervalos (con norma  $\delta$  ), entre éstos sólo podrán tener puntos en común con  $E$  aquéllos que tienen puntos en común con tal recta. La suma de sus medidas no podrá entonces superar  $2(d-c)\delta$  , resultando así  $S'' \leq 2(d-c)\delta$  y, por lo tanto,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} S'' = 0$  , vale decir,  $\text{med}_e E = 0$  . En este primer caso  $\text{med}_e E$  tiene, entonces, un valor que no depende de  $R$  .



En el segundo caso, el intervalo  $R_0$  definido por  $\lambda_1 \leq x \leq \Lambda_1$ ,  $\lambda_2 \leq y \leq \Lambda_2$  es el mínimo intervalo que contiene a  $E$  (cfr. Cap. XIV, n° 2), y estará contenido en cualquier  $R$  (véase fig. 8). Notemos que  $R_0$  depende solamente del conjunto  $E$ .

Fijado  $R$ , de puntos extremos  $(a, c)$  y  $(b, d)$ , calculemos, a partir de sus descomposiciones coordenadas  $\mathcal{D}$ , las sumas  $S''$ ; sabemos que existe finito el  $\lim_{\delta \rightarrow 0} S'' = 1$ .

En lugar de  $R$  podemos usar  $R_0$  y, partiendo de sus descomposiciones coordenadas  $\mathcal{D}$ , construir las análogas sumas  $S_0''$ ; existirá también el  $\lim_{\delta \rightarrow 0} S_0'' = l_0$  y este límite dependerá solamente del conjunto  $E$ . Nuestra tesis estará probada si hacemos ver que, cualquiera sea  $R$ , resulta  $1 = l_0$ .

Para eso comencemos observando que toda descomposición coordenada  $\mathcal{D}$  de

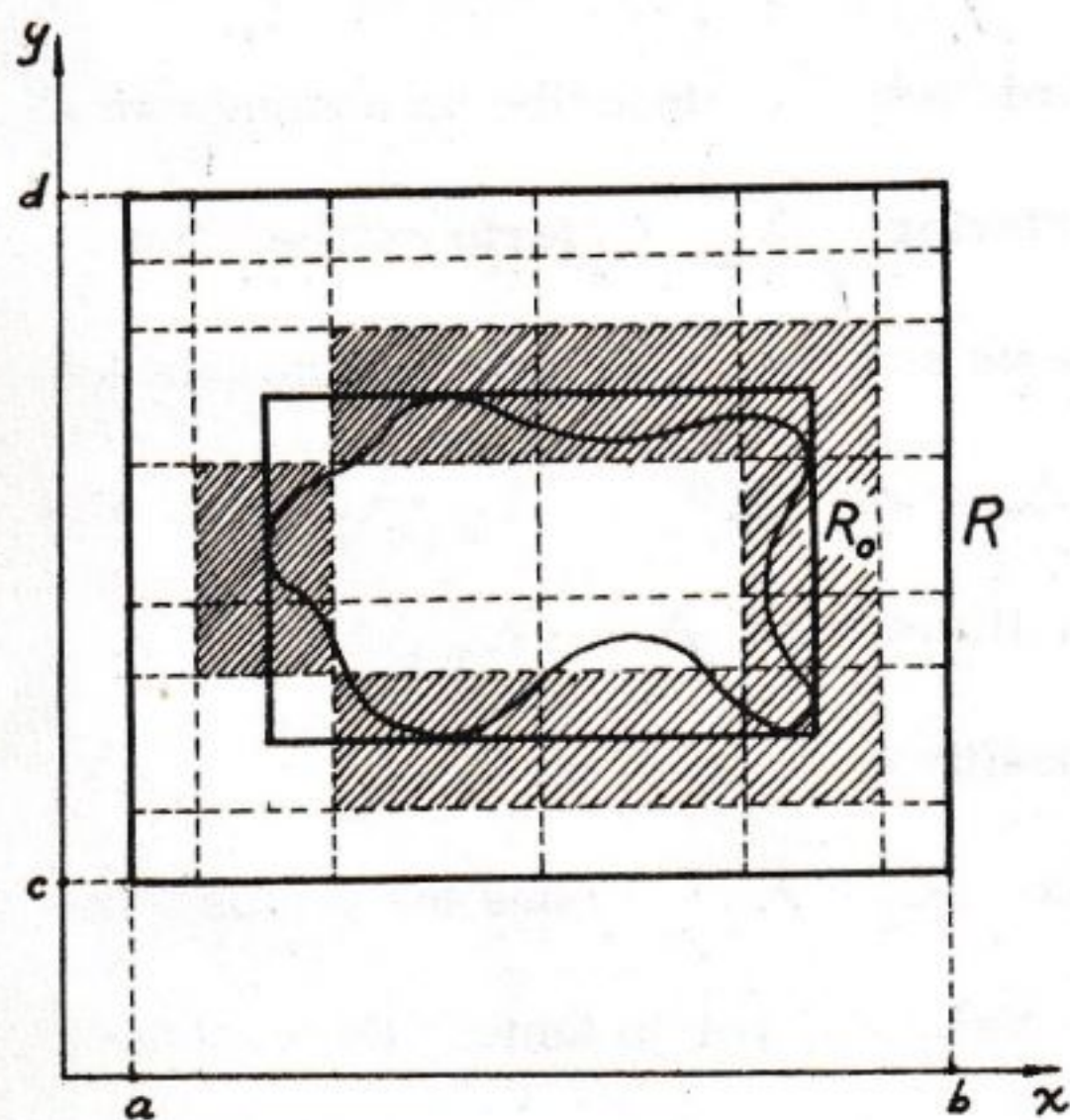


Fig. 8

$R$  induce cierta descomposición coordenada  $\bar{\mathcal{D}}_0$  de  $R_0$  (véase fig. 8). Los intervalos  $R_1'', R_2'', \dots, R_n''$  de  $\mathcal{D}$  que tienen por lo menos un punto en común con  $E$  se pueden distinguir en dos categorías: los  $U_1, U_2, \dots, U_p$  que resultan contenidos en  $R_0$  y aquellos  $V_1, V_2, \dots, V_q$  en cuyo interior penetran lados de  $R_0$  (son los sombreados en fig. 8). Entre los intervalos de la des-

composición  $\bar{\mathcal{D}}_0$  de  $R_0$  que tienen por lo menos un punto en común con  $E$ , estarán sin duda los citados  $U_1, U_2, \dots, U_p$  y podrán además existir otros  $W_1, W_2, \dots, W_q$  contenidos en  $V_1, V_2, \dots, V_q$ , respectivamente. A partir de la descomposición coordenada  $\mathcal{D}$  de  $R$  se define la suma



$$S'' = \sum_{i=1}^p \text{med } U_i + \sum_{j=1}^q \text{med } V_j ; \quad (18)$$

a partir de la descomposición coordinada  $\bar{D}_0$  de  $R_0$  queda la

$$\bar{S}_0'' = \sum_{i=1}^p \text{med } U_i + \sum_{j=1}^q \text{med } W_j \quad (19)$$

Al tender a cero la norma  $\delta$  de  $\bar{D}$ , tiende también a cero la norma de  $\bar{D}_0$  y entonces mientras las  $S''$  tienden a 1, las  $\bar{S}_0''$  tienden a  $l_0$ . Para probar que  $l = l_0$ , bastará hacer ver que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (S'' - \bar{S}_0'') = 0 \quad (20)$$

De (18) y (19) se deduce, teniendo en cuenta que  $W_j \subseteq V_j$ :

$$0 \leq S'' - \bar{S}_0'' = \sum_{j=1}^q (\text{med } V_j - \text{med } W_j) \leq \sum_{j=1}^q \text{med } V_j ;$$

pero la suma de las medidas de aquellos intervalos  $V_j$  en cuyo interior penetra, por ejemplo, el primer lado vertical de  $R_0$  es inferior a  $(d-c)\delta$  y, repitiendo el razonamiento para los cuatro lados, se concluye que

$$\sum_{j=1}^q \text{med } V_j < 2 [(b-a) + (d-c)] \delta .$$

Resulta, por lo tanto,  $0 \leq S'' - \bar{S}_0'' < 2 [(b-a) + (d-c)] \delta$ , de donde sigue la (20), que es lo que queríamos demostrar.

Retomando la (14) deseamos, por último, señalar que existen efectivamente conjuntos acotados  $E$  para los que resulta  $\text{med}_e E > \text{med}_i E$ . Considérese, por ejemplo, en el plano  $xy$ , el conjunto  $E$  constituido por aquellos puntos  $P$  del cuadrado  $R$  ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ) que tienen ambas coordenadas  $(x, y)$  expresadas por números racionales. Realizada una descomposición coordinada arbitraria de  $R$ , todos los rectángulos de la misma tienen puntos en común con  $E$ , resultando siempre  $S'' = 1$ , mientras que no existe ningún rectángulo que esté constituido solamente por puntos interiores de  $E$ , o sea que es siempre  $S' = 0$ .



Tendremos en este ejemplo, entonces,  $\text{med}_e E = 1$  ,  $\text{med}_i E = 0$  .

### 3 - CONJUNTOS MEDIBLES.

Con todo lo desarrollado en los números precedentes, se presenta oportuno considerar en particular aquellos conjuntos acotados  $E$  para los que resulta

$$\text{med}_e E = \text{med}_i E .$$

Diremos que un conjunto acotado  $E$  del espacio euclídeo  $S_r$  es medible (sobre el espacio  $S_r$ ) cuando coinciden sus medidas exterior e interior. En este caso se hablará simplemente de medida del conjunto  $E$  , y se la indicará con  $\text{med } E$  ; se trata de un número positivo o nulo.

Se ve fácilmente que un intervalo  $R$  es un conjunto medible y que su medida coincide con la que habíamos introducido en el n° 1 .

De la (13) del n° anterior sigue inmediatamente:

I - Condición necesaria y suficiente para que un conjunto acotado sea medible es que su frontera tenga medida exterior nula .

Además, es también evidente que

II - Si el conjunto acotado  $E$  tiene medida exterior nula, será medible y su medida será nula .

Recordemos ahora que, en el curso de la demostración del teor. III del n° precedente, se ha hecho ver entre otras cosas que, si todos los puntos del conjunto  $E \subseteq S_r$  tienen una o más coordenadas fijas, resultará  $\text{med}_e E = 0$  . Decir que los puntos de  $E$  tienen  $k$  coordenadas fijas (por ejemplo  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ) significa que  $E$  pertenece a un espacio de  $r-k$  dimensiones, de ecuaciones  $x_1 = \text{constante}$ ,  $x_2 = \text{constante}$ ,  $\dots$ ,  $x_k = \text{constante}$ , es decir, a un espacio coordenado. Si  $E$  pertenece a un  $S_{r-k}$  no coordenado, se puede con un oportuno cambio de co-



ordenadas en el espacio  $S_r$ , retornar al caso precedente (\*), por lo que, teniendo en cuenta el teor. II, podemos concluir que :

III - Si un conjunto acotado  $E$  del espacio  $S_r$  pertenece a un espacio  $S_{r-k}$  de dimensión inferior a  $r$ , será sin duda medible sobre el espacio  $S_r$ , siendo nula su medida.

Demostremos ahora este otro teorema:

IV - Si el conjunto acotado  $E$  es medible, su medida será positiva o nula según que esté dotado o carezca de puntos interiores, respectivamente.

Dem. Puesto que  $E$  es medible su medida coincide con la medida interior. Si  $E$  tiene puntos interiores, las descomposiciones coordinadas de un intervalo  $R \supseteq E$  que tengan norma  $\delta$  suficientemente pequeña serán tales de originar algún intervalo  $R_j'$  constituido por puntos interiores de  $E$ ; para dichas descomposiciones resultará  $S' > 0$  y, por lo tanto, el extremo superior del conjunto de los  $S'$ , es decir,  $\text{med}_i E = \text{med } E$ , será positivo. Si  $E$  no tiene puntos interiores, ninguna descomposición coordinada de  $R$  puede dar lugar a intervalos  $R_j'$  formados por puntos interiores de  $E$ ; entonces será siempre  $S' = 0$  y, por lo tanto  $\text{med } E = \text{med}_i E = 0$ , que es lo que queríamos demostrar.

---

Según lo que dijimos al principio del n° 2 debemos hacer ver ahora que la definición de medida dada en este n° permite reencontrar todas las áreas y volúmenes estudiados en geometría elemental y también las áreas de los rectánguloides definidos oportunamente en Cap. IX, n° 3.

-----

(\*) Nótese que esta última consideración no es suficiente para probar el teor. III en el caso de un espacio  $S_{r-k}$  no coordinado, puesto que sería necesario también demostrar que las medidas interior y exterior, tal como las hemos definido, son invariantes respecto de los cambios de coordenadas. Por brevedad no expondremos tal demostración.



De la cuestión de las áreas nos ocuparemos en el sucesivo n° 5, mientras que la relativa a los volúmenes será tratada en el Cap. XXII.

Observemos, por último, que existen conjuntos no medibles como muestra el ejemplo dado al final del n° precedente. A título informativo agreguemos que, contrariamente a lo que pudiera sugerir la intuición, es posible construir ejemplos de dominios que no son medibles.

#### 4 - PROPIEDADES DE LA MEDIDA.

Demostremos los dos teoremas siguientes:

I - Si  $E_1, E_2$  son conjuntos acotados, y  $E_1$  está contenido en  $E_2$ , se tendrá  $\text{med}_e E_1 \leq \text{med}_e E_2$ . En particular, si  $E_1$  y  $E_2$  son medibles, será  $\text{med } E_1 \leq \text{med } E_2$ .

Dem. Si  $R$  es un intervalo que contiene a  $E_2$  (y, por lo tanto, a  $E_1$ ), realizada una descomposición coordinada  $\mathcal{D}$  de  $R$ , los intervalos de ésta que tienen por lo menos un punto en común con  $E_1$  figuran todos entre aquéllos que tienen por lo menos un punto en común con  $E_2$ ; entonces, la suma  $S_2''$  relativa a  $E_2$  resulta mayor o igual a la análoga suma  $S_1''$  relativa a  $E_1$ .

De la  $S_2'' \geq S_1''$ , pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$ , sigue  $\text{med}_e E_2 \geq \text{med}_e E_1$ , que es lo que queríamos demostrar.

II - Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son conjuntos acotados, se tendrá

$$\text{med}_e (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \leq \text{med}_e E_1 + \text{med}_e E_2 + \dots + \text{med}_e E_n.$$

Dem. Basta evidentemente demostrar el teorema en el caso de dos conjuntos  $E_1, E_2$ . Poniendo  $E = E_1 \cup E_2$  y llamando  $R$  a un intervalo que contenga  $E$ , los intervalos de una descomposición coordinada cualquiera de  $R$  que tienen puntos en común con  $E$  se distinguen en tres categorías: 1°) intervalos  $U_i''$  que tienen puntos comunes con  $E_1$ , pero no con  $E_2$ ; 2°) intervalos  $V_j''$  que tienen



puntos en común con  $E_2$ , pero no con  $E_1$ ; 3º) intervalos  $W_k''$  que tienen puntos en común con  $E_1$  y con  $E_2$ . Entonces, para la suma  $S''$  relativa a  $E$ , se tendrá:

$$S'' = \sum_i \text{med } U_i'' + \sum_j \text{med } V_j'' + \sum_k \text{med } W_k''.$$

Por otra parte, las sumas  $S_1''$  y  $S_2''$  relativas a  $E_1$  y  $E_2$  están dadas por

$$S_1'' = \sum_i \text{med } U_i'' + \sum_k \text{med } W_k'', \quad S_2'' = \sum_j \text{med } V_j'' + \sum_k \text{med } W_k''.$$

Obviamente es  $S'' \leq S_1'' + S_2''$  y entonces, pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$ , tendremos  $\text{med}_e E \leq \text{med}_e E_1 + \text{med}_e E_2$ , que es lo que queríamos demostrar.

Para deducir otras propiedades de la medida, nos conviene previamente demostrar el siguiente teorema de teoría de conjuntos:

III - Dados dos conjuntos arbitrarios  $E_1, E_2$ , la frontera de su unión, la frontera de su intersección y la frontera de su diferencia están todas contenidas en el conjunto de las fronteras de los dos conjuntos dados. Es decir, se tendrá

$$\mathcal{F}(E_1 \cup E_2) \subseteq \mathcal{F}E_1 \cup \mathcal{F}E_2 \quad (1)$$

$$\mathcal{F}(E_1 \cap E_2) \subseteq \mathcal{F}E_1 \cup \mathcal{F}E_2 \quad (2)$$

$$\mathcal{F}(E_1 - E_2) \subseteq \mathcal{F}E_1 \cup \mathcal{F}E_2 \quad (3)$$

Dem. Recordemos, ante todo (cfr. Cap. XIV, nº 3) que valen las

$$\mathcal{C}(E_1 \cup E_2) = \mathcal{C}E_1 \cap \mathcal{C}E_2; \quad \mathcal{C}(E_1 \cap E_2) = \mathcal{C}E_1 \cup \mathcal{C}E_2; \quad \mathcal{C}(E_1 - E_2) = \mathcal{C}E_1 \cup E_2,$$

tras lo que demostraremos la (1). Sea  $P$  un punto de  $\mathcal{F}(E_1 \cup E_2)$ . En todo dominio circular  $\Gamma$  de centro  $P$  cae al menos un punto  $A$  de  $E_1 \cup E_2$  y al menos un punto  $B$  de  $\mathcal{C}(E_1 \cup E_2)$ , o sea, por la primera de las (4), un punto  $B$  de  $\mathcal{C}E_1 \cap \mathcal{C}E_2$ . Entonces podemos por el momento afirmar que to



do  $\Gamma$  contiene tanto puntos de  $\mathcal{E} E_1$  como de  $\mathcal{E} E_2$ . Entonces, si se pudie ra elegir siempre  $A$  perteneciente a  $E_1$ , se deduce que  $P$  es punto de  $\mathcal{F} E_1$ .

En el caso contrario, para los  $\Gamma$  de radio suficientemente pequeño, el punto  $A$  debe pertenecer a  $E_2$  por lo que se concluye en que  $P$  es punto de  $\mathcal{F} E_2$ . En todos los casos el punto  $P$  pertenece a  $\mathcal{F} E_1 \cup \mathcal{F} E_2$ , lo que prueba la (1).

Las (2) y (3) son después consecuencias de la (1), cuando se tenga presente que la frontera de un conjunto coincide con la de su complementario y se aprovechen la segunda y la tercera de las (4). Podemos escribir, efectivamente

$$\mathcal{F}(E_1 \cap E_2) = \mathcal{F}[\mathcal{E}(E_1 \cap E_2)] = \mathcal{F}[\mathcal{E} E_1 \cup \mathcal{E} E_2] \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{E} E_1) \cup \mathcal{F}(\mathcal{E} E_2) = \mathcal{F} E_1 \cup \mathcal{F} E_2,$$

$$\mathcal{F}(E_1 - E_2) = \mathcal{F}[\mathcal{E}(E_1 - E_2)] = \mathcal{F}[\mathcal{E} E_1 \cup \mathcal{E} E_2] \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{E} E_1) \cup \mathcal{F} E_2 = \mathcal{F} E_1 \cup \mathcal{F} E_2.$$

Podemos ahora demostrar estos otros teoremas:

IV - Si los conjuntos acotados  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son medibles, también la unión, la intersección y la diferencia de dos de ellos resulta medible.

Dem. Bastará evidentemente limitarse al caso  $n=2$  Refiriéndonos, por ejemplo, a la unión, de la (1) y del teor. I sigue

$$\text{med}_e \mathcal{F}(E_1 \cup E_2) \leq \text{med}_e (\mathcal{F} E_1 \cup \mathcal{F} E_2)$$

y, sucesivamente, por el teor. II,

$$\text{med}_e \mathcal{F}(E_1 \cup E_2) \leq \text{med}_e \mathcal{F} E_1 + \text{med}_e \mathcal{F} E_2. \quad (4)$$

Puesto que  $E_1$  y  $E_2$  son medibles, se tiene (por el teor. I del n° precedente)  $\text{med}_e \mathcal{F} E_1 = \text{med}_e \mathcal{F} E_2 = 0$ ; entonces, la (4) nos dice que  $\text{med}_e \mathcal{F}(E_1 \cup E_2) = 0$ , y por el mismo teor. I tendremos que  $E_1 \cup E_2$  es medible, que es lo que queríamos demostrar.



Análogamente, en el caso de la intersección y de la diferencia, valiéndose de las (2) y (3), llegaríamos a la tesis.

V - Si  $E_1, E_2, \dots, E_m$  son conjuntos acotados y medibles, se tendrá

$$\text{med} (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \leq \text{med} E_1 + \text{med} E_2 + \dots + \text{med} E_n.$$

Dem. Es una consecuencia inmediata de los teoremas II y IV.

VI - Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son conjuntos acotados y medibles, carentes dos a dos de puntos interiores en común, será

$$\text{med} (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \text{med} E_1 + \text{med} E_2 + \dots + \text{med} E_n.$$

Dem. Basta considerar el caso de dos conjuntos  $E_1$  y  $E_2$ . Poniendo  $E = E_1 \cup E_2$  (conjunto ciertamente medible, por el teor. IV) y llamando  $R$  a un intervalo que contenga a  $E$ , en cada descomposición coordinada  $\mathcal{D}$  de  $R$ , entre los intervalos  $R_j'$  de  $\mathcal{D}$  formados por puntos interiores de  $E$  figurarán (eventualmente junto a otros) todos los intervalos de  $\mathcal{D}$  que están constituidos por puntos interiores de  $E_1$  y todos aquéllos formados por puntos interiores de  $E_2$ . Considerando para los tres conjuntos  $E$ ,  $E_1$  y  $E_2$  las sumas  $S'$ ,  $S_1'$ ,  $S_2'$ , se tendrá entonces  $S' \geq S_1' + S_2'$ .

Pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$ , se obtiene  $\text{med}_i E \geq \text{med}_i E_1 + \text{med}_i E_2$  o sea, tratándose de conjuntos medibles,  $\text{med} E \geq \text{med} E_1 + \text{med} E_2$ . Esta desigualdad, reunida a la proporcionada por el teor. V, permite precisamente afirmar que  $\text{med} E = \text{med} E_1 + \text{med} E_2$ .

El teorema recién demostrado expresa la denominada propiedad aditiva de la medida.

## 5 - EJEMPLOS DE CONJUNTOS MEDIBLES EN EL PLANO.

En el Cap. IX, n° 3, hemos considerado el rectánguloide que tiene por base un intervalo  $[a, b]$ , relativo a una función  $f(x) \geq 0$ , continua en  $[a, b]$ , para el que definimos directamente un área que resultó ser i-



igual a la integral definida  $\int_a^b f(x) dx$ . Deseamos hacer ver ahora que dicho resultado se encuadra también dentro de la teoría general de la medida expuesta en los números precedentes. En efecto, vale el siguiente teorema:

I - Sea  $f(x)$  una función no negativa, continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . El correspondiente rectánguloide  $T$  es un conjunto plano medible y su medida (área) está expresada por la fórmula:

$$\text{area } T = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Dem. La frontera de  $T$  está formada por los puntos de  $T$  que están situados sobre el eje  $x$ , por los situados sobre las rectas  $x=a$ ,  $x=b$  y por los que constituyen el gráfico  $C [a \leq x \leq b, y = f(x)]$ . Los puntos de los primeros dos tipos forman conjuntos planos de área nula ( $n^o 3$ , teor. III) por lo que, para probar que  $T$  es medible, bastará hacer ver que también  $C$  tiene área nula. Lo demostraremos, y al mismo tiempo la (1), del siguiente modo.

Realizamos una subdivisión  $\mathcal{D}$  del intervalo  $[a, b]$  en los intervalos parciales  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  (con  $x_0 = a, x_n = b$ ). Indicaremos con  $\delta$  la norma de  $\mathcal{D}$ ; con  $m_i, M_i$ , el mínimo y el máximo valor de la  $f(x)$  en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ ; con  $r_i$  el rectángulo definido por  $x_i \leq x \leq x_{i+1}, 0 \leq y \leq m_i$  y con  $r'_i$  el definido por  $x_i \leq x \leq x_{i+1},$

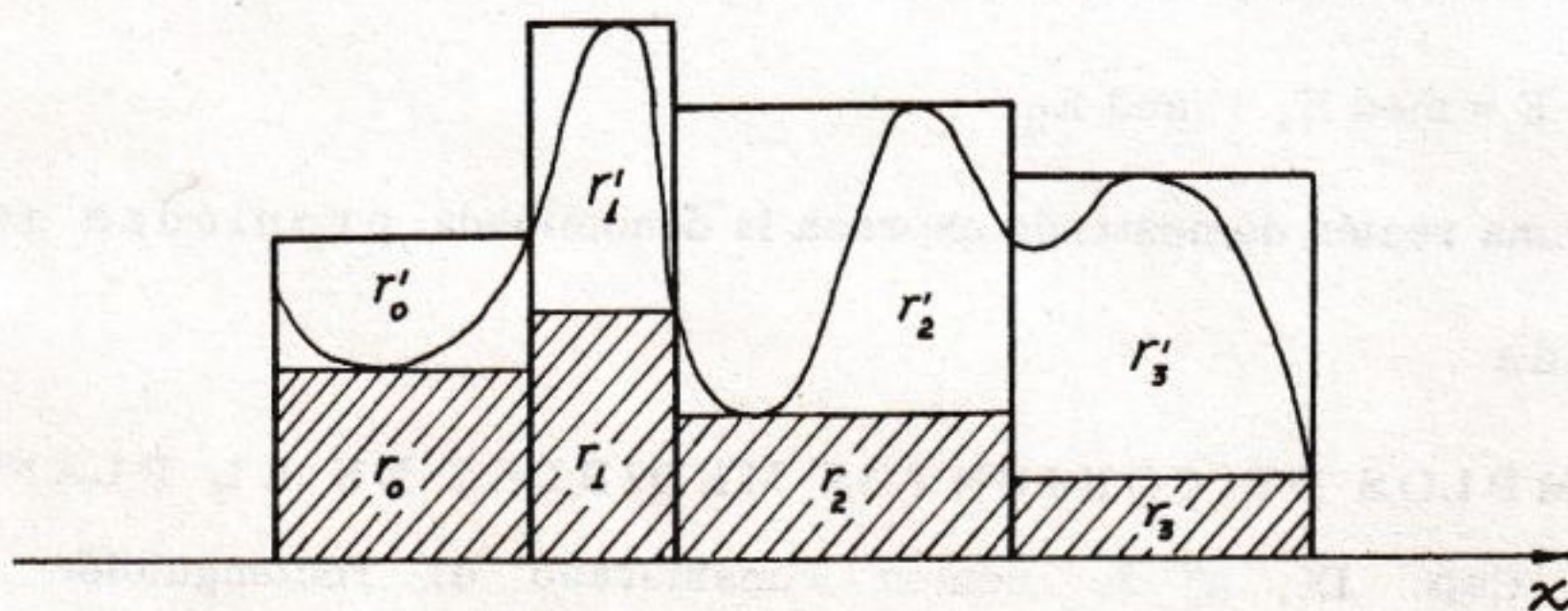


Fig. 9



$m_i \leq y \leq M_i$  (véase fig. 9). Dichos rectángulos se reducen a segmentos paralelos al eje  $x$  cuando  $m_i = 0$  o  $M_i = m_i$

El gráfico  $C$  es un conjunto contenido en la unión de los rectángulos  $r_i'$  por lo que resulta (nº 4, teor. II) :

$$\text{área}_e C \leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) (M_i - m_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i - \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i$$

Pasando ahora al límite para  $\delta \rightarrow 0$  se tendrá, de acuerdo a los resultados del Cap. IX, nº 2 :

$$\text{área}_e C \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = 0$$

de donde,  $\text{área}_e C = 0$ .

El rectángulo  $T$  es entonces medible y podemos considerar su área.  $T$  contiene la unión de los  $r_i$  y está contenido en la de los  $r_i$  y  $r_i'$ , pudiéndose por lo tanto escribir la desigualdad

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i \leq \text{área } T \leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i$$

Si de aquí continuamos con el mismo razonamiento hecho en el Cap. IX, nº 3, se deduce la (1) que es lo que queríamos demostrar.

Supongamos ahora que en el intervalo  $[a, b]$  estén definidas dos funciones con tínuas  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  y que sea siempre  $f_1(x) < f_2(x)$  en los puntos interiores de  $[a, b]$ , salvo en uno o en ambos extremos donde puede ser  $f_1(x) = f_2(x)$ . Una vez contruidos en el plano  $xy$  los gráficos  $C_1$ ,  $C_2$  de las dos funciones el conjunto  $T$  de los puntos  $(x, y)$  definido por las condiciones  $a \leq x \leq b$ ,  $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$  resulta ser un dominio plano al que se denomina dominio normal (o simple) respecto al eje  $x$ , relativo a las dos funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  y de base  $[a, b]$ , (véase fig. 10). Análogamente puede definirse un dominio normal (o simple) respecto al eje  $y$ .

Se tiene el teorema:



II - Un dominio  $T$  normal respecto al eje  $x$ , relativo a las dos funciones continuas  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  y que tiene por base el intervalo  $[a, b]$ , es un conjunto plano medible, resultando

$$\text{área } T = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (2)$$

Dem. La frontera de  $T$  está constituida por los gráficos  $C_1$ ,  $C_2$  (que por

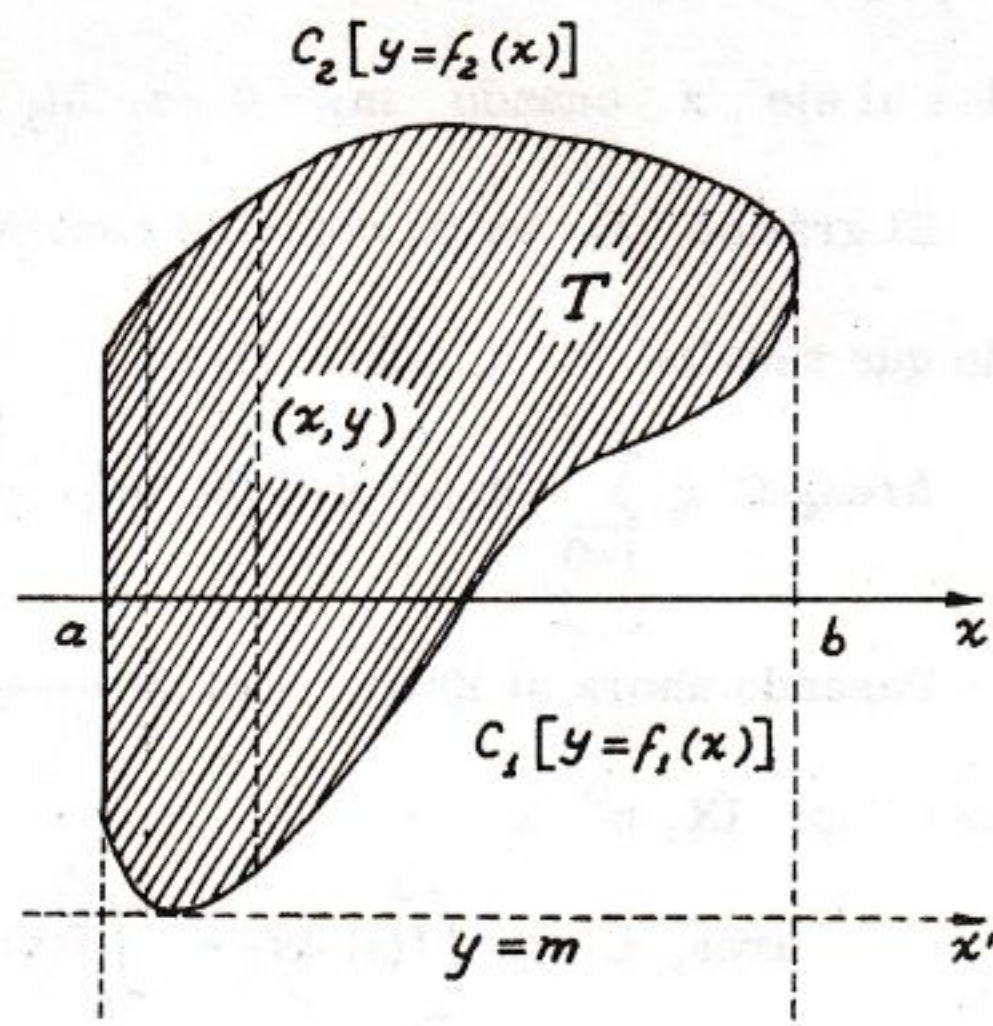


Fig. 10

la demostración del teorema precedente, sabemos que es de área nula) y, eventualmente, por uno o dos segmentos paralelos al eje  $y$ . Entonces,  $T$  es medible.

Designando con  $m$  al mínimo de  $f_1(x)$  en  $[a, b]$ , asumamos como nuevo eje  $x'$  de las abscisas a la recta de ecuación  $y=m$ . Referidas a tal eje,  $C_1$  y  $C_2$  aparecen como los gráficos de las funciones no negativas  $f_1(x) - m$ ,  $f_2(x) - m$ .

Llamando  $T_1$  y  $T_2$  a los rectanguloides de base  $[a, b]$ , relativos a las mismas, el rectanguloide  $T_2$  se presenta como unión del rectanguloide  $T_1$  y del dominio normal  $T$  y, puesto que  $T_1$  y  $T$  no tienen puntos interiores en común, resulta ( $n^o$  4, teor. VI):

$$\text{área } T_2 = \text{área } T_1 + \text{área } T$$

Por otra parte se tiene, por el teor. I,

$$\text{área } T_2 = \int_a^b [f_2(x) - m] dx, \quad \text{área } T_1 = \int_a^b [f_1(x) - m] dx,$$

y de las tres relaciones escritas, sigue inmediatamente la (2), que es lo que queremos demostrar.



Los teor. I y II y la propiedad aditiva de la medida permiten reencontrar fácilmente las áreas de todas las figuras estudiadas en geometría elemental. Ya habíamos dado dos ejemplos en Cap. IX, n° 12 (triángulo rectángulo y círculo); agreguemos otro, demostrando que un sector circular  $S$  es un conjunto plano medible y que, llamando  $r$  al radio y  $\alpha$  su ángulo central (medido en radianes) se tiene:

$$\text{área } S = \frac{1}{2} r^2 \alpha \quad (3)$$

Puesto que basta obviamente considerar el caso  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $S$  puede considerarse como unión de un triángulo rectángulo y de un rectánguloide (carente de

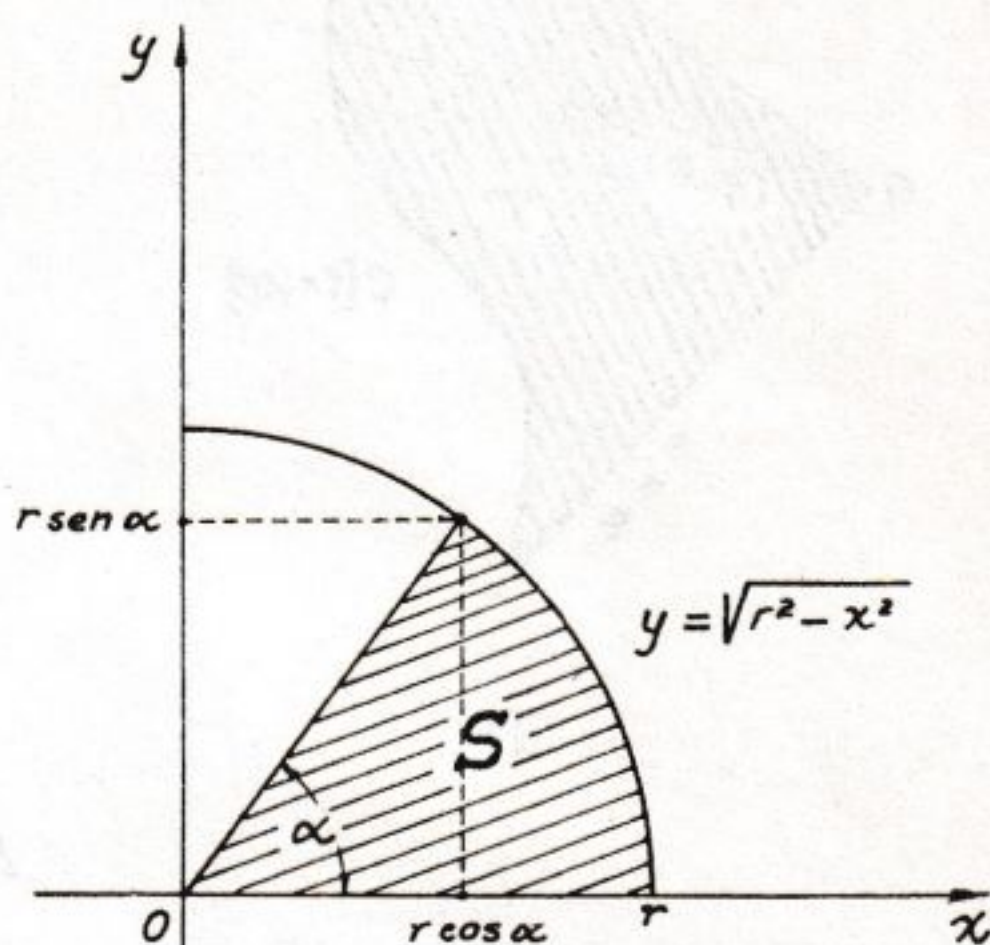


Fig. 11

puntos interiores en común; véase fig. 11). Por lo tanto  $S$  es medible y se tendrá

$$\begin{aligned} \text{área } S &= \frac{1}{2} r^2 \cos \alpha \sin \alpha + \int_{r \cos \alpha}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \cos \alpha \sin \alpha + \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsen \frac{x}{r} \right]_{r \cos \alpha}^r = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \cos \alpha \sin \alpha + \frac{1}{2} r^2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} r^2 \cos \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{2} r^2 \alpha \end{aligned}$$

Demos ahora una importante extensión de la (3). Refiramos el plano a un sistema de coordenadas polares  $\rho$ ,  $\varphi$ . En el intervalo  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$  supongamos definida una función continua y no negativa  $f(\varphi)$ . Para cada valor  $\varphi$  del intervalo  $[\alpha, \beta]$  construyamos en el plano el punto de radio vector  $\rho = f(\varphi)$  y anomalía  $\varphi$ ; la curva  $C$ , lugar de los puntos  $(\rho, \varphi)$  así obtenidos llámase diagrama polar de la función  $f(\varphi)$  o curva de ecuación po-



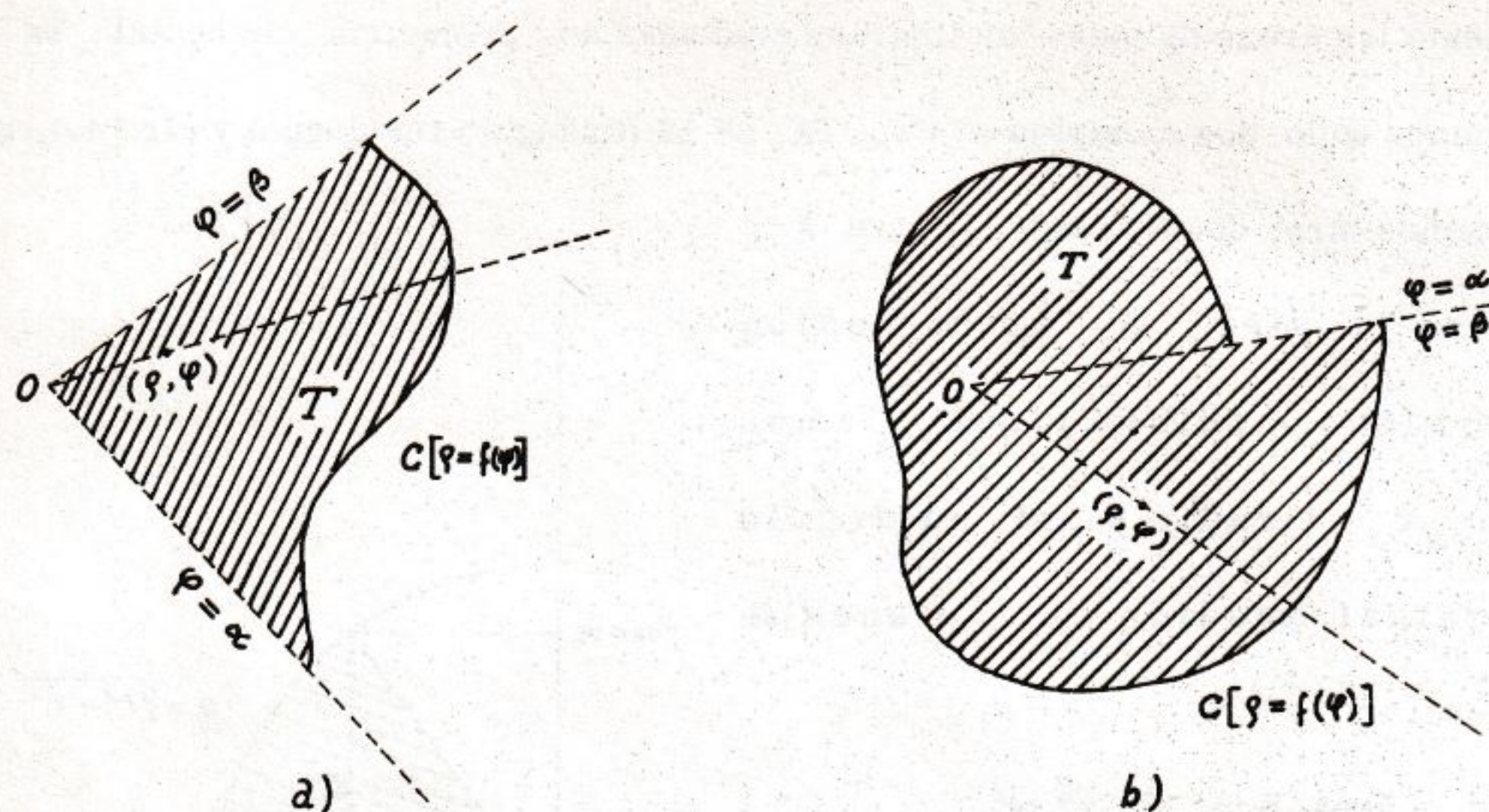


Fig. 12

lar  $\rho = f(\varphi)$ .

Suponiendo que los números  $\alpha$  y  $\beta$  sean tales de verificar  $\beta \leq \alpha + 2\pi$ , llámase sector plano relativo a la función  $f(\varphi)$ , de base  $[\alpha, \beta]$ , al conjunto  $T$  de los puntos del plano (véase fig. 12) cuyas coordenadas polares verifican las limitaciones  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $0 \leq \rho \leq f(\varphi)$ .

Demostremos el teorema:

III- Un sector plano  $T$  relativo a una función continua y no negativa  $f(\varphi)$  y de base  $[\alpha, \beta]$  (con  $\beta \leq \alpha + 2\pi$ ), es un conjunto plano medible y se tiene

$$\text{área } T = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

Dem. La frontera de  $T$  consta de la curva  $C$  y de dos segmentos (eventualmente reducidos solamente al punto  $O$ ) situados sobre la semirecta  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  para el caso  $\beta < \alpha + 2\pi$  (fig. 12 a); o de un segmento (eventualmente reducido a un punto) situado sobre la semirecta  $\varphi = \alpha$  o  $\varphi = \beta$ , si  $\beta = \alpha + 2\pi$



(fig. 12 b) . Por lo tanto, para probar que  $T$  es medible, basta hacer ver que  $C$  tiene área nula.

Con ese objeto, y al mismo tiempo probar la (4) , subdividamos el intervalo  $[\alpha, \beta]$  en intervalos parciales  $[\varphi_0, \varphi_1]$  ,  $[\varphi_1, \varphi_2], \dots, [\varphi_{n-1}, \varphi_n]$  (con  $\varphi_0 = \alpha$  ,  $\varphi_n = \beta$  ). Indiquemos con  $\delta$  la norma de esta subdivisión ; con  $m_i, M_i$  el mínimo y el máximo valor de la  $f(\varphi)$  en el intervalo  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ ; con  $S_i$  el sector circular definido por  $\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}$  ,  $0 \leq \varphi \leq m$  y con  $S'_i$  el sector de corona circular definido por  $\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}$  ,  $m_i \leq \varphi \leq M_i$  (véase fig. 13) (\*).

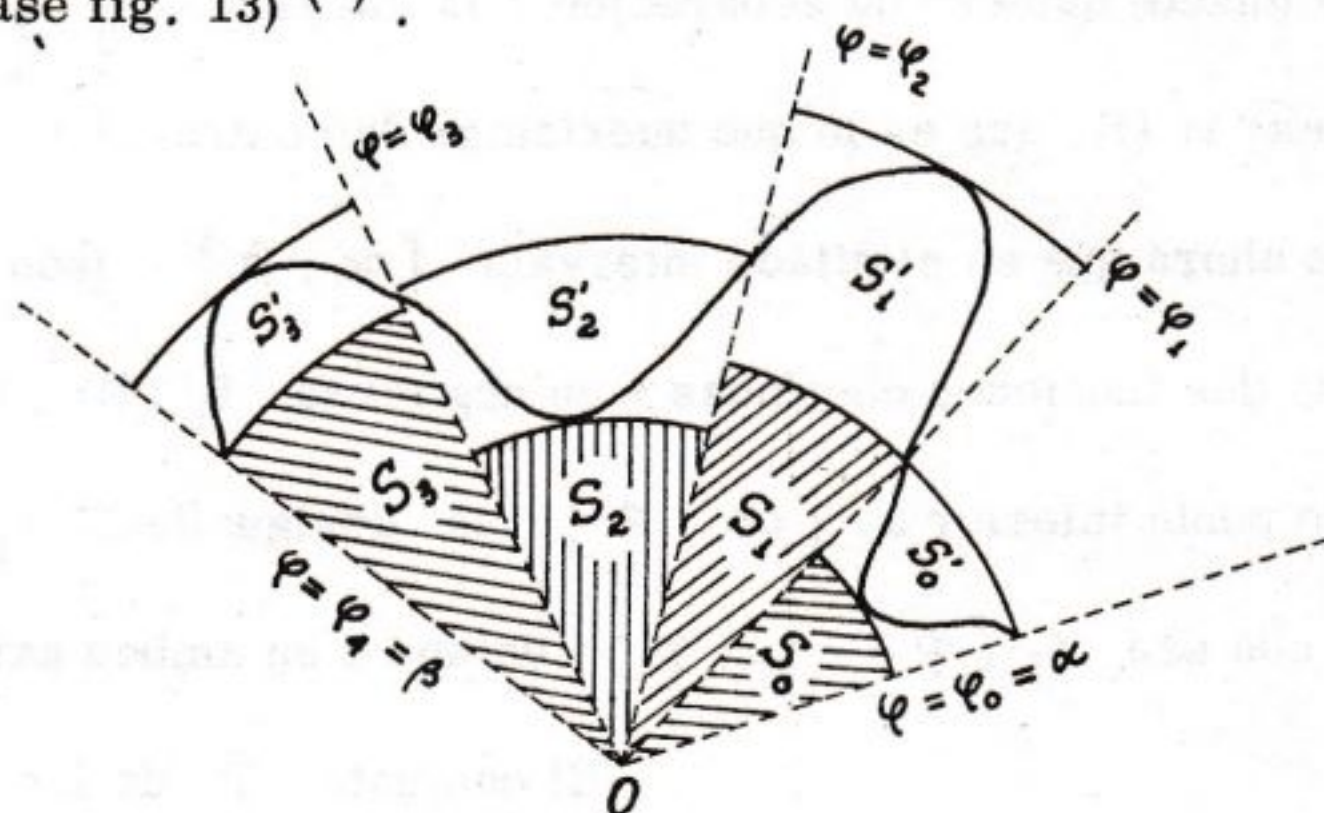


Fig. 13

La curva  $C$  es un conjunto contenido en la unión de los  $S'_i$  y entonces, teniendo en cuenta la (3), será

$$\text{área}_e C \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 (\varphi_{i+1} - \varphi_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} m_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i).$$

Pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$  se deduce, en base a los resultados de Cap. IX, n° 2, aplicados a la función  $\frac{1}{2} [f(\varphi)]^2$  :

$$\text{área}_e C \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi = 0 ,$$

(\*) Si  $m_i = 0$ , el sector circular  $S_i$  se reduce al punto  $O$ . Si  $M_i > m_i = 0$  el sector de corona circular  $S'_i$  se reduce a un sector circular, mientras que si  $M_i = m_i \geq 0$ , se reducirá a un arco de circunferencia o solamente al punto  $O$ .



o sea,  $\text{área}_e C = 0$ . Entonces  $T$  es medible, por lo que pasamos a calcular su área.

El sector plano  $T$  contiene la unión de los  $S_i$  y está contenido en la de los  $S_i$  y  $S_i'$ , pudiéndose escribir

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \leq \text{área } T \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 (\varphi_{i+1} - \varphi_i),$$

lo que expresa que  $\text{área } T$  es un número de separación entre las dos clases descriptas por las sumas indicadas. Pero tales clases son contiguas (Cap. IX,  $n^o 2$ ), y tienen como (único) número de separación a la integral  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi$ . Sigue, entonces, la (4), que es lo que queríamos demostrar. (\*)

Supongamos ahora que en el citado intervalo  $[\alpha, \beta]$  (con  $\beta \leq \alpha + 2\pi$ ) estén definidas dos funciones continuas y no negativas  $f_1(\varphi)$ ,  $f_2(\varphi)$ , verificándose para todo punto interior a  $[\alpha, \beta]$  la desigualdad  $f_1(\varphi) < f_2(\varphi)$ , admitiéndose que sea  $f_1(\varphi) = f_2(\varphi)$  en uno o en ambos extremos de  $[\alpha, \beta]$

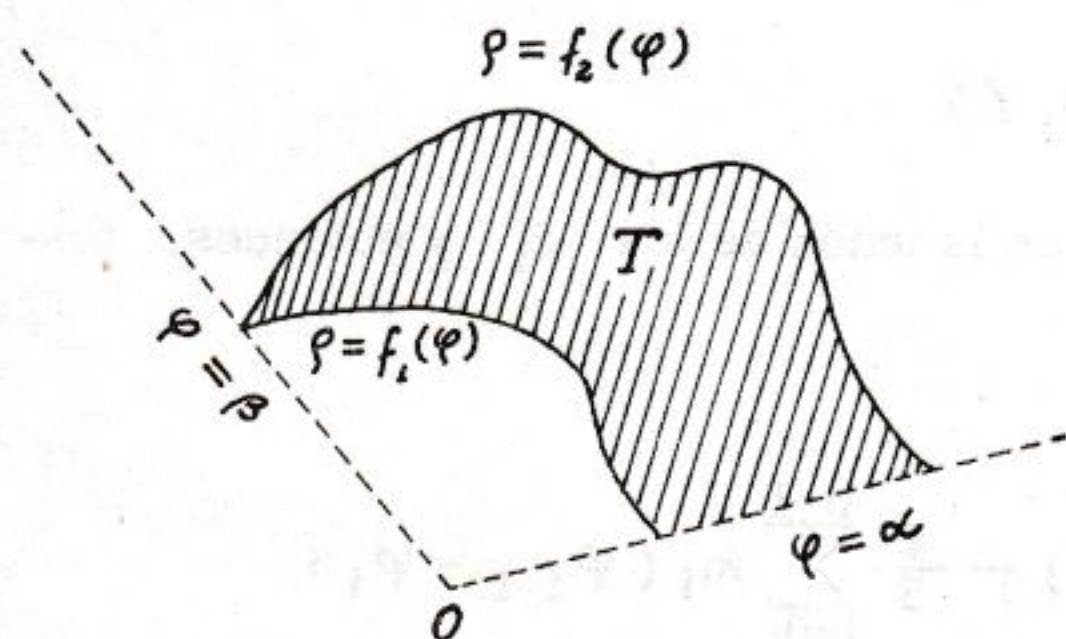


Fig. 14

El conjunto  $T$  de los puntos del plano, definido por las condiciones  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $f_1(\varphi) \leq \rho \leq f_2(\varphi)$ , es un dominio plano (fig. 14) que denominaremos dominio polarmente normal relativo a las dos funciones  $f_1(\varphi)$ ,  $f_2(\varphi)$  y de base  $[\alpha, \beta]$ .

Designando con  $T_1$  y  $T_2$  a los sectores planos, de misma base, relativos a las funciones  $f_1(\varphi)$ ,  $f_2(\varphi)$ , se tendrá  $T_2 = T_1 \cup T$  y entonces, razo-

(\*) La (4) se puede justificar intuitivamente suponiendo al sector  $T$  descompuesto en sectores circulares elementales de radio  $f(\varphi)$ , ángulo central  $d\varphi$  cuyas áreas serían, por lo tanto,  $\frac{1}{2} [f(\varphi)]^2 d\varphi$  y considerar al área de  $T$  como la suma de estas áreas elementales.



nando como en la demostración del teor. II, es fácil concluir que:

IV - Un dominio  $T$  polarmente normal, relativo a las funciones continuas y no negativas  $f_1(\varphi)$ ,  $f_2(\varphi)$  que tenga por base al intervalo  $[\alpha, \beta]$  es un dominio plano medible, y se tiene

$$\text{área } T = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} ([f_2(\varphi)]^2 - [f_1(\varphi)]^2) d\varphi. \quad (5)$$

Hagamos una aplicación de la (4) calculando el área  $\sigma$  del dominio plano

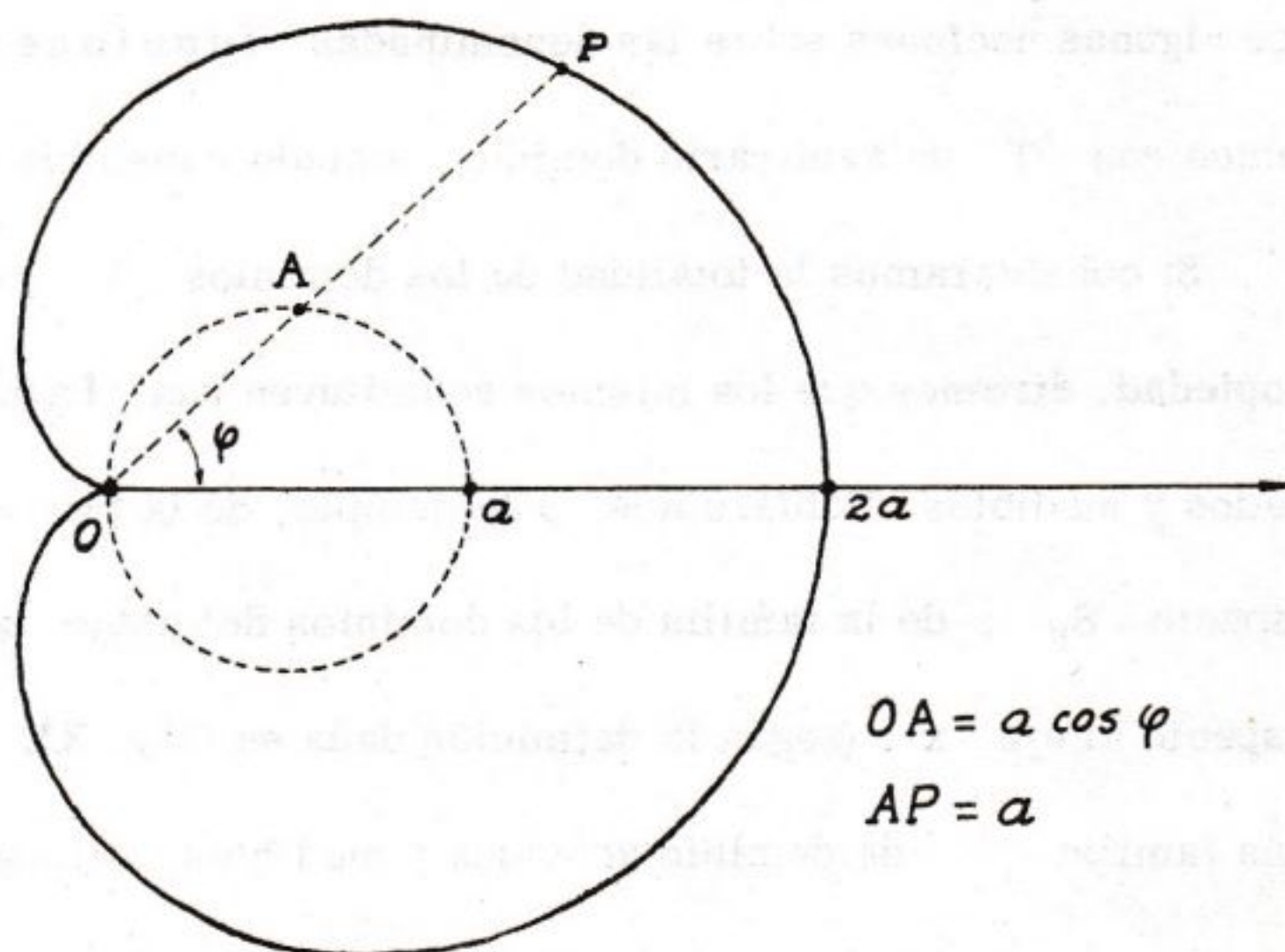


Fig. 15

encerrado por la cardioides, es decir, por la curva de ecuación polar

$$\rho = a(1 + \cos \varphi) \quad (\text{véase fig. 15}).$$

Tal dominio es evidentemente un sector plano relativo a la función  $a(1 + \cos \varphi)$  y tiene por base el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Se tendrá, entonces, por la (4),

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= a^2 \left[ \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\varphi + \cos \varphi \sin \varphi}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{3}{2} \pi a^2. \end{aligned}$$



## CAPITULO XXI

### Funciones de dominio

#### 1 - DEFINICION DE FUNCION DE DOMINIO.

Para extender el concepto de integral a las funciones de varias variables haremos uso, además que de la teoría de la medida expuesta en el Cap. precedente, también de algunas nociones sobre las denominadas funciones de dominio

Indiquemos con  $T$  un arbitrario dominio acotado y medible del espacio euclídeo  $S_1$ . Si consideramos la totalidad de los dominios  $T$  que gozan de una cierta propiedad, diremos que los mismos constituyen una familia de dominios acotados y medibles. Hablaremos, por ejemplo, de la familia de los intervalos del espacio  $S_r$ ; de la familia de los dominios del plano  $x$  y  $y$  que son normales respecto al eje  $x$  (según la definición dada en Cap. XX, nº 5); etc.

Dada una familia  $\Phi$  de dominio acotados y medibles, supongamos que exista una ley que haga corresponder, a cada dominio  $T$  de la familia, un bien determinado número real  $u$ . Diremos, en ese caso, que  $u$  es una función del dominio  $T$ , definida en la familia  $\Phi$  y usaremos para la misma notaciones del tipo  $u = F(T)$ ,  $u = G(T)$ , etc.

El diámetro de  $T$  o, por ejemplo, la medida de  $T$ , son ejemplos de funciones del dominio  $T$ , definidas ambas en la familia de todos los dominios acotados y medibles del  $S_r$ .

Fijada una función  $f(x)$  continua en un intervalo  $A$  del eje  $x$ , la integral  $\int_a^b f(x) dx$  puede considerarse como una función del dominio  $T \equiv [a, b]$ , definida en la familia de todos los intervalos acotados contenidos en  $A$ .



Para el estudio de las funciones de dominio, es oportuno introducir ahora dos locuciones.

Dado un dominio acotado y medible  $T$ , diremos que el mismo ha sido descompuesto en un número finito de dominios acotados y medibles  $T_1, T_2, \dots, T_n$  (o que se ha efectuado una descomposición de  $T$  en los dominios parciales  $T_1, T_2, \dots, T_n$ ) cuando se han verificado estas dos condiciones: 1)  $T$  es la unión de  $T_1, T_2, \dots, T_n$ ; 2) los dominios  $T_1, T_2, \dots, T_n$  carecen, dos a dos, de puntos interiores en común.

Dada una familia  $\Phi$  de dominios acotados y medibles  $T$ , diremos que tal familia es infinitesimal cuando, fijados arbitrariamente un dominio  $T$  de la familia y un número positivo  $\sigma$ , sea siempre posible efectuar una descomposición de  $T$  en dominios parciales  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , cada uno de los cuales pertenezca a la familia  $\Phi$  y tenga diámetro menor que  $\sigma$ .

Es fácil convencerse que es infinitesimal la familia de todos los dominios acotados y medibles de  $S_r$ ; o la de todos los intervalos de  $S_r$ ; o la de todos los dominios del plano  $xy$  que son normales respecto al eje  $x$ . Se ve también inmediatamente que, por el contrario, no es infinitesimal, para  $r \geq 2$ , la familia de los dominios circulares de  $S_r$ .

## 2 - DERIVADA DE UNA FUNCION DE DOMINIO.

Sea  $u = F(T)$  una función de dominio definida en una familia infinitesimal  $\Phi$ . Indiquemos con  $E$  el conjunto de puntos de  $S_r$  que resulta de la unión de todos los dominios  $T$  de la familia  $\Phi$ . Puesto que  $\Phi$  es infinitesimal, podemos afirmar que, para todo punto  $P_0 \in E$  y todo  $\sigma > 0$ , existen dominios  $T$  de la familia  $\Phi$  que contienen  $P_0$  y tienen diámetro menor que  $\sigma$ .

Fijemos, entonces, un punto  $P_0$  de  $E$  y elijamos en  $\Phi$  un dominio  $T$



que contenga  $P_0$  ; queda bien determinado el número

$$v = \frac{F(T)}{\text{med } T} \quad (1)$$

Designando con  $\delta$  al diámetro de  $T$  , el número  $v$  definido por la (1) no puede considerarse como una función (uniforme) de  $\delta$  , puesto que, en general, existirán distintos dominios  $T$  de la familia  $\Phi$  que contienen  $P_0$  y tienen diámetro  $\delta$  , los que proporcionarán para  $v$  valores generalmente distintos. Puede, en cambio, considerarse a  $v$  como una función multifor-  
me de la variable  $\delta$  y dado que, apoyándonos en lo dicho poco antes, es posi-  
ble elegir  $T$  con diámetro  $\delta$  pequeño a voluntad, podemos pensar en efec-  
tuar sobre  $v$  el pasaje al límite para  $\delta \rightarrow 0$  (cfr. Cap. IX, n° 2). A tal efec-  
to debe tenerse presente que a la frase "existe determinado y finito (i-  
gual a  $L$ ) el  $\lim_{\delta \rightarrow 0} v$  " debe atribuirse el siguiente significado: fijado arbi-  
trariamente  $\epsilon > 0$  , existe siempre un  $\sigma_\epsilon > 0$  tal que, para todos los do-  
minios  $T$  de la familia  $\Phi$  que contiene  $P_0$  y tiene diámetro  $\delta < \sigma_\epsilon$  ,  
resulta  $|v - L| < \epsilon$  .

Si con este preciso significado sucede que existe determinado y finito el  $\lim_{\delta \rightarrow 0} v$   
diremos que la función de dominio  $F(T)$  es derivable en el pun-  
to  $P_0$ . El valor de dicho límite será designado (\*) como la derivada de la  
 $F(T)$  en el punto  $P_0$  e indicado con el símbolo  $F'(P_0)$ . Se tiene entonces por  
definición

$$F'(P_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(T)}{\text{med } T} \quad (2)$$

admitido que el límite indicado exista finito.

Si la  $F(T)$  resulta derivable en todo punto  $P \in E$  , se dice brevemente, que  
 $F(T)$  es derivable (sobre la familia  $\Phi$ ) ; entonces la derivada  $F'(P)$

(\*) Algunas veces conviene mencionar también la familia  $\Phi$  sobre la que se ha definido la  $F(T)$  y usar frases de este tipo:  $F(T)$  es derivable en el punto  $P_0$  , sobre la familia  $\Phi$  ; derivada de la  $F(T)$  en el punto  $P_0$  , sobre la familia  $\Phi$  .



resulta evidentemente una función del punto  $P$  definida en  $E$ . Téngase, entonces, bien presente que la derivada de una función de dominio es una función de punto. Demos algunos ejemplos:

La función de dominio  $F(T) = \text{med } T$  está definida en la familia  $\Phi$  de todos los dominios acotados y medibles del espacio  $S_r$ ; para cada punto  $P$  de tal espacio y para todo  $T$  que contenga a  $P$  resulta evidentemente  $v=1$ . Se tendrá, entonces,  $F'(P) = 1$ .

Si  $A$  es un cuerpo material y  $T$  una porción acotada y medible del mismo, la función de dominio  $F(T) = \text{masa de } T$  está definida en la familia  $\Phi$  de todos los dominios acotados y medibles, del espacio ordinario, contenidos en  $A$ . Fijado un punto  $P$  de  $A$  y elegido un  $T$  que contenga a  $P$ , el cociente  $v = \frac{\text{masa de } T}{\text{vol } T}$  es denominado en Física densidad media de la porción  $T$ . Su límite para  $\delta \rightarrow 0$ , que comúnmente se admite existente, proporciona lo que se llama densidad en el punto  $P$ . Entonces la derivada de la función "masa de  $T$ ", calculada en un punto  $P \in A$ , es igual a la densidad del cuerpo  $A$  considerado, en el mismo punto  $P$ . Análogamente, para la densidad superficial en todo punto de una lámina plana material o para la densidad lineal en todo punto de una barra rectilínea.

Un tercer ejemplo lo proporciona el siguiente teorema:

I - Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo  $A$  del eje  $x$ . Llamando con  $T \equiv [a, b]$  a cualquier intervalo acotado contenido en  $A$ , la función

$$F(T) = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

es, en todo punto  $x_0 \in A$ , derivable sobre la familia  $\Phi$  de todos los intervalos acotados contenidos en  $A$  y se tiene

$$F'(x_0) = f(x_0) \quad (4)$$



Dem. Tomado un intervalo  $T \equiv [a, b]$  que contenga a  $x_0$ , resulta

$$\frac{F(T)}{\text{med } T} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

y, por lo tanto, aplicando el teorema de la media (Cap. IX, n° 4, teor. I):

$$\frac{F(T)}{\text{med } T} = f(\xi)$$

donde  $\xi$  denota un oportuno punto del intervalo  $T$ . Para realizar el pasaje al límite para  $\delta \rightarrow 0$  es necesario, evidentemente, hacer tender los puntos  $a$  y  $b$  al punto  $x_0$ , con lo que también el punto  $\xi$  tenderá a  $x_0$ ; entonces, teniendo en cuenta la continuidad de  $f(x)$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(T)}{\text{med } T} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0),$$

que es lo que queríamos demostrar.

Si, sobre una determinada familia  $\Phi$ , la  $F(T)$  es derivable en el punto  $P$ , llamaremos diferencial de la  $F(T)$ , y lo indicaremos con el símbolo  $dF(T)$  al producto de la derivada  $F'(P)$  por la medida de  $T$ ; es decir, pondremos

$$dF(T) = F'(P) \text{ med } T,$$

o también, escribiendo simplemente  $T$  en lugar de  $\text{med } T$ :

$$dF(T) = F'(P) \cdot T. \quad (5)$$

Aplicando esta definición a la particular función  $F(T) = T$  (que, como sabemos, tiene la derivada igual a 1), obtenemos  $dT = T$ , pudiéndose la (5) escribir como

$$dF(T) = F'(P) dT. \quad (5')$$

La derivada  $F'(P)$  puede entonces indicarse también con las notaciones  $\frac{dF(T)}{dT}$  o  $\frac{dF}{dT}$ .

Registremos, por último, la siguiente proposición de inmediata demostración:

II - Si  $F_1(T), F_2(T), \dots, F_n(T)$  son funciones de dominio definidas sobre una misma familia infinitesimal  $\Phi$ , y si cada u-



na de ellas es derivable sobre  $\Phi$  designando con  $c_1, c_2, \dots, c_n$  a constantes arbitrarias, la función  $F(T) = c_1 F_1(T) + c_2 F_2(T) + \dots + c_n F_n(T)$  resultará derivable sobre  $\Phi$  y será

$$F'(P) = c_1 F'_1(P) + c_2 F'_2(P) + \dots + c_n F'_n(P) \quad (6)$$

### 3 - FUNCIONES ADITIVAS DE DOMINIO.

Sea  $F(T)$  una función de dominio definida en la familia infinitesimal  $\Phi$ . Diremos que  $F(T)$  es aditiva cuando, tomando cualquier dominio  $T$  de  $\Phi$  y realizando una descomposición del mismo en dominios parciales  $T_1, T_2, \dots, T_n$  (cfr. n° 1) pertenecientes a la familia  $\Phi$ , resulta

$$F(T) = F(T_1) + F(T_2) + \dots + F(T_n) \quad (1)$$

Por ejemplo, las funciones  $\text{med } T$ ,  $\text{masa de } T$ ,  $F(T) = \int_a^b f(x) dx$  consideradas en el n° precedente, son funciones aditivas; no lo es, en cambio, la función diámetro de  $T$ .

Es evidente que, si  $F_1(T), F_2(T), \dots, F_n(T)$  son funciones aditivas, lo será también toda combinación lineal de las mismas, con coeficientes constantes,

$$c_1 F_1(T) + c_2 F_2(T) + \dots + c_n F_n(T)$$

Demostremos el siguiente teorema:

I - Sea la función aditiva  $F(T)$  derivable sobre la familia infinitesimal  $\Phi$ . Si en todos los puntos  $P$  de un cierto dominio  $T_0$  de  $\Phi$  resulta  $F'(P) > 0$  ( $< 0$ ), se tendrá seguramente  $F(T_0) > 0$  ( $< 0$ )

Dem. Considerado el caso  $F'(P) > 0$ , probaremos el teorema haciendo ver que es absurdo suponer

$$f(T_0) \leq 0 \quad (2)$$

Para fijar las ideas razonaremos en el caso de dominios del plano  $xy$

Admitiendo que valga la (2), descompongamos  $T_0$  en dominios parciales



$T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0p_0}$  pertenecientes a  $\Phi$  y todos ellos de diámetro menor que

1. Puesto que, por la aditividad, es

$$F(T_0) = F(T_{01}) + F(T_{02}) + \dots + F(T_{0p_0}) ,$$

la (2) nos lleva a asegurar que al menos uno de los números del segundo miembro debe ser  $< 0$ . Designemos con  $T_1$  a uno, entre los dominios parciales  $T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0p_0}$ , para el que sea  $F(T_1) \leq 0$ .

Descompongamos  $T_1$  en dominios parciales  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1p_1}$ , pertenecientes a  $\Phi$  y todos con diámetro menor que  $\frac{1}{2}$ ; razonando como antes, se ve que entre ellos se podrá elegir un dominio  $T_2$  tal de tenerse  $F(T_2) \leq 0$ .

Descompongamos  $T_2$  en dominios parciales  $T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2p_2}$  de la familia  $\Phi$  y todos de diámetro  $< 1/3$  y entre ellos elijamos uno  $T_3$  de modo que resulte  $F(T_3) \leq 0$ , y así sucesivamente.

Nace una sucesión de dominios de la familia :

$$T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots \quad (3)$$

cada uno de los cuales contiene el sucesivo y tales que resulta

$$\text{diámetro de } T_n < \frac{1}{n} \quad (\text{para } n \geq 1), \quad F(T_n) \leq 0 .$$

Indiquemos ahora con  $R_n$  ( $a_n \leq x \leq b_n$ ,  $c_n \leq y \leq d_n$ ) al mínimo intervalo rectangular que contiene al dominio  $T_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) y observemos que, siendo ambas diferencias  $b_n - a_n$ ,  $d_n - c_n$  no superiores al diámetro de  $T_n$ , el diámetro de  $R_n$  resulta menor que  $\frac{\sqrt{2}}{n}$  (para  $n \geq 1$ )

La sucesión de rectángulos

$$R_0, R_1, R_2, \dots, R_n, \dots \quad (4)$$

es tal que cada rectángulo de la misma contiene al sucesivo resultando, además,

$$\text{diámetro de } R_n < \frac{\sqrt{2}}{n} , \quad (\text{para } n \geq 1) .$$

Sigue, entonces, la existencia de un punto  $P_0$  perteneciente a todos los rectángulos (4). En efecto; se ve inmediatamente que las dos clases  $(a_1, a_2, \dots)$



$\dots a_n, \dots$ ),  $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$  resultan contiguas, como también lo son las  $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ ,  $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$ ; llamando con  $\xi$  y  $\eta$  a los respectivos números de separación, el punto  $(\xi, \eta)$  es el punto  $P_0$  buscado.

Tal punto  $P_0$  pertenece también a todos los dominios (3). En efecto; tomando arbitrariamente un círculo  $C$  con centro en  $P_0$ , siempre se podrá determinar un entero  $\nu$  tal que el rectángulo  $R_\nu$  esté contenido en  $C$ , con lo que también el dominio  $T_\nu$  lo estará, a la par de todos los dominios sucesivos  $T_{\nu+1}, T_{\nu+2}, \dots$ . En lo que respecta a los precedentes  $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{\nu-1}$  dado que contienen a  $T_\nu$ , solamente podremos afirmar que tienen infinitos puntos en común con  $C$ . Entonces, fijado arbitrariamente un círculo  $C$  de centro  $P_0$ , un  $T_n$  cualquiera de los dominios (3) tendrá infinitos puntos en común con  $C$ , lo que significa que  $P_0$  es punto de acumulación de dicho  $T_n$ ; pero el dominio  $T_n$  es un conjunto cerrado, por lo que contendrá a su punto de acumulación  $P_0$ . Entonces  $P_0$  pertenece efectivamente a todos los dominios (3).

Vamos ahora a calcular  $F'(P_0)$  usando, para el cálculo, la sucesión de dominios (3) de la familia  $\Phi$ . Resulta

$$F'(P_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(T_n)}{\text{med } T_n}$$

y, como para todo  $n$  es  $F(T_n) \leq 0$ , se deduce  $F'(P_0) \leq 0$ , lo que está contra la hipótesis de que en todo punto  $P$  de  $T_0$ , sea  $F'(P) > 0$ . Es entonces absurdo suponer que valga la (2), o sea que será  $F(T_0) > 0$ , que es lo que queríamos demostrar.

De este teorema se obtiene una importante propiedad de las funciones aditivas, y, para enunciarla, conviene introducir una locución. Sean  $F(T)$  una función aditiva de dominio definida en la familia infinitesimal  $\Phi$  y  $f(P)$  una función de punto de



finida en el conjunto  $E$ , unión de todos los dominios  $T$  de  $\Phi$ . Se dirá que la  $F(T)$  verifica la propiedad de la media respecto a la función  $f(P)$  si, para todo  $T$  de  $\Phi$  resulta

$$\lambda(f, T) \cdot \text{med } T \leq F(T) \leq \Lambda(f, T) \cdot \text{med } T, \quad (5)$$

donde, según una notación ya adoptada,  $\lambda(f, T)$  y  $\Lambda(f, T)$  denotan, respectivamente, el extremo inferior y el extremo superior de la función  $f(P)$  en el dominio  $T$ .

Tras esto, nos ocuparemos de la propiedad a que se había hecho referencia y que está expresada por el siguiente teorema de Cauchy - Fubini:

II - Si la función aditiva de dominio  $F(T)$ , definida en la familia infinitesimal  $\Phi$ , es derivable sobre  $\Phi$ , verificará la propiedad de la media respecto a su derivada  $F'(P)$ .

Poniendo  $F'(P) = f(P)$ , es necesario hacer ver que, designando con  $T_0$  a un dominio de  $\Phi$  fijado arbitrariamente, es válida la

$$\lambda(f, T_0) \text{ med } T_0 \leq F(T_0) \leq \Lambda(f, T_0) \text{ med } T_0$$

Demostremos, por ejemplo, la

$$F(T_0) \leq \Lambda(f, T_0) \text{ med } T_0. \quad (6)$$

observando que basta hacerlo en la hipótesis que  $\Lambda(f, T_0)$  tenga un valor finito, al que indicaremos simplemente con  $\Lambda_0$ .

Fijado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , consideremos la función de dominio  $G(T) = F(T) - (\Lambda_0 + \epsilon) \text{ med } T$  que es aditiva y derivable sobre  $\Phi$ , con derivada dada por  $G'(P) = f(P) - (\Lambda_0 + \epsilon)$ , (teor. II del n° precedente). Del momento que  $\Lambda_0$  es el extremo superior de  $f(P)$  en  $T_0$  resultará, para todos los puntos  $P$  de  $T_0$ ,  $f(P) < \Lambda_0 + \epsilon$ , o sea  $f(P) - (\Lambda_0 + \epsilon) < 0$ . Por el teor. I será entonces  $G(T_0) < 0$ , es decir,  $F(T_0) < (\Lambda_0 + \epsilon) \text{ med } T_0$ , y como esta desigualdad vale para todo  $\epsilon > 0$ , se deduce que vale la (6), que es lo que quería



mos demostrar.

#### 4 - FUNCION DE DOMINIO PRIMITIVA DE UNA FUNCION DE PUNTO DADA.

Examinemos ahora la operación inversa de la derivación de una función de dominio. Sean  $\Phi$  una familia infinitesimal de dominios acotados y medibles  $T$ ;  $E$  la unión de todos los dominios  $T$  de  $\Phi$ ;  $f(P)$  una función real de punto definida en  $E$ . Se pide definir en  $\Phi$  una función de dominio  $F(T)$  que resulte derivable sobre  $\Phi$ , y que tenga como derivada la  $f(P)$ . Tal función  $F(T)$  recibe el nombre de una función primitiva, sobre la familia  $\Phi$ , de la función de punto  $f(P)$ .

El problema así planteado resulta en general indeterminado<sup>(\*)</sup>; pero resulta determinado si se impone la condición de que la función primitiva  $F(T)$  buscada sea aditiva. Se tiene, en efecto, el siguiente teorema:  
I - Dadas la familia infinitesimal  $\Phi$  y la función de punto  $f(P)$  definida en  $E$ , no puede existir en  $\Phi$  más de una función de dominio  $F(T)$ , que sea aditiva y primitiva sobre  $\Phi$  de la  $f(P)$  asignada.

Dem. En efecto; si admitimos que existan dos  $F_1(T)$ ,  $F_2(T)$ , su diferencia  $G(T) = F_1(T) - F_2(T)$  sería una función aditiva con derivada  $G'(P) = f(P) - f(P) = 0$ . Por el teor. de Cauchy-Fubini, la  $G(T)$  debe entonces verificar la propiedad de la media respecto de la función idénticamente nula, por lo que será necesariamente  $G(T) = 0$ , o sea,  $F_1(T) \equiv F_2(T)$ , que es lo que queríamos demostrar.

-----

(\*) Por ejemplo, si existe una primitiva  $F(T)$  de la  $f(P)$ , se ve inmediatamente que son también primitivas de la  $f(P)$  las infinitas funciones  $F(T) + c_2 (\text{med } T)^2 + c_3 (\text{med } T)^3 + \dots + c_n (\text{med } T)^n$  donde  $n$  es un entero positivo y  $c_2, c_3, \dots, c_n$  constantes arbitrarias.



Este teorema asegura la unicidad de la función aditiva primitiva de la  $f(P)$ ; pero no asegura que tal primitiva exista.

No podemos aquí ocuparnos, en general, del problema de la existencia de la función aditiva de dominio, primitiva de una función de punto  $f(P)$  dada; nos limitaremos a estudiarlo en el caso de que la  $f(P)$  sea continua.

En el caso de una función continua de una variable el problema ya ha sido resuelto por el teorema I del n° 2 que afirma, en substancia, que una función  $f(x)$ , continua en un intervalo  $A$ , admite como primitiva (única) la función aditiva de dominio  $F(T) = \int_a^b f(x) dx$  (\*), sobre la familia de todos los intervalos acotados  $T \equiv [a, b]$  contenidos en  $A$ . Recordemos (Cap. IX, n° 2) que en este caso particular la  $F(T)$  (es decir, la integral) ha sido construida como límite de ciertas sumas integrales  $\sigma$ .

Pasando al caso de una función  $f(P)$  de varias variables, demostraremos en el sucesivo n° 5, la existencia de la función primitiva siguiendo un camino perfectamente análogo a aquél ahora recordado; pero antes de hacerlo queremos señalar otro teorema que nos será de utilidad a continuación.

II - Dadas la familia infinitesimal  $\Phi$  y la función de punto  $f(P)$  definida y continua en  $E$ , no puede existir en  $\Phi$  más de una función de dominio  $F(T)$  aditiva que goce de la propiedad de la media respecto a la  $f(P)$ .

Dem. Sea  $F(T)$  una función que verifique las dos propiedades dichas. Fijado arbitrariamente un dominio  $T$  de la familia  $\Phi$ , y designando con  $m$ ,  $M$  al mínimo y al máximo (\*\*) de  $f(P)$  en  $T$ , la propiedad de la media se tradu-

-----

(\*) No se confunda esta afirmación con la del Cap. IX, n° 6, según la cual  $f(x)$  admite infinitas primitivas dadas por  $\varphi(x) = c + \int f(t) dt$ . En ese capítulo la locución "función primitiva" debía entenderse en el sentido de función de la variable  $x$  que tiene como derivada (en el sentido ordinario) a la  $f(x)$ ; aquí, en cambio, la misma locución tiene el sentido de función aditiva de dominio, que tiene por derivada (en el sentido del n° 2) a la  $f(x)$ .

(\*\*)  $m$  y  $M$  existen sin duda en virtud del conocido teor. de Weierstrass (Cap. XV, n° 6, teor. I);



ce en la

$$m \cdot \text{med } T \leq F(T) \leq M \cdot \text{med } T, \quad (1)$$

por lo que será

$$m \leq \frac{F(T)}{\text{med } T} \leq M. \quad (2)$$

Por otra parte, fijado arbitrariamente un punto  $P_0 \in E$  sabemos, por la continuidad de  $f(P)$  en  $E$ , que, dado  $\epsilon > 0$ , existe un dominio circular  $C$  de centro  $P_0$ , y radio oportuno  $\delta_\epsilon$  tal que, para todo punto  $P \in E \cap C$  resulta

$$f(P_0) - \epsilon < f(P) < f(P_0) + \epsilon \quad (3)$$

Entonces, todo dominio  $T$  que contenga a  $P_0$  y de diámetro  $\delta < \delta_\epsilon$  resultará obviamente contenido en  $C$  (además que en  $E$ ) por lo que en virtud de (3) será

$$f(P_0) - \epsilon < m \leq M < f(P_0) + \epsilon. \quad (4)$$

De (2) y (4) se deduce que, para todo  $T$  que contenga a  $P_0$  y de diámetro  $\delta < \delta_\epsilon$  resulta

$$f(P_0) - \epsilon < \frac{F(T)}{\text{med } T} < f(P_0) + \epsilon.$$

Esto expresa que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(T)}{\text{med } T} = f(P_0)$ , es decir que  $F(T)$  tiene por derivada a  $f(P)$ ; ahora, por el teor. I, tal  $F(T)$  es necesariamente única.

##### 5 - CONSTRUCCION DE LA FUNCION ADITIVA DE DOMINIO PRIMITIVA DE UNA FUNCION CONTINUA DE PUNTO DADA.

Sean  $A$  un dominio arbitrario del espacio euclídeo  $S_r$  y  $f(P)$  una función (real) continua en  $A$ . Indicaremos con  $\Phi$  la familia infinitesimal constituida por todos los dominios  $T$ , acotados y medibles, contenidos en  $A$ .

Fijado un dominio  $T$  de la familia  $\Phi$ , realicemos una descomposición  $\mathcal{D}$  de  $T$  en un número arbitrario  $n$  de dominios parciales  $T_1, T_2, \dots, T_n$ ,

-----

en este caso se tiene  $\lambda(f, T) = m$  ;  $\Lambda(f, T) = M$



pertenecientes todos ellos a la familia  $\Phi$  e indiquemos con  $\delta$  al mayor de los diámetros de los dominios  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , que designaremos con el nombre de norma de la descomposición  $\mathcal{D}$ . Fijemos después, en forma arbitraria, un punto  $P_1$  en el dominio  $T_1$ , un punto  $P_2$  en el dominio  $T_2, \dots$ , un punto  $P_n$  en el dominio  $T_n$  y calculemos la suma

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \text{med } T_i, \quad (1)$$

que llamaremos suma integral relativa a la  $f(P)$  y al dominio  $T$ .

Observemos dos modos particulares de elegir los puntos  $P_i$ . En cada uno de los dominios  $T_i$  la  $f(P)$  admite mínimo absoluto  $m_i$  y máximo absoluto  $M_i$  y entonces podemos elegir en cada  $T_i$  al punto  $P_i$  siempre en el punto (o en uno de los puntos) donde la  $f(P)$  asume el correspondiente valor mínimo  $m_i$ , o siempre en el punto (o en uno de los puntos) donde la  $f(P)$  asume el valor máximo  $M_i$ . Procediendo así obtendremos las dos sumas integrales particulares

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \text{ med } T_i, \quad S = \sum_{j=1}^n M_j \text{ med } T_j \quad (2)$$

Confrontando  $s$  y  $S$  con la suma genérica (1) es evidente que, en correspondencia a una misma descomposición  $\mathcal{D}$  de  $T$ , resulta

$$s \leq \sigma \leq S \quad (3)$$

Del mismo modo que en Cap. IX, n<sup>o</sup> 2, podemos considerar a las sumas integrales  $\sigma$  como funciones infinitiformes de la variable  $\delta$  y puesto que (recordemos que  $\Phi$  es una familia infinitesimal) podemos efectuar descomposiciones

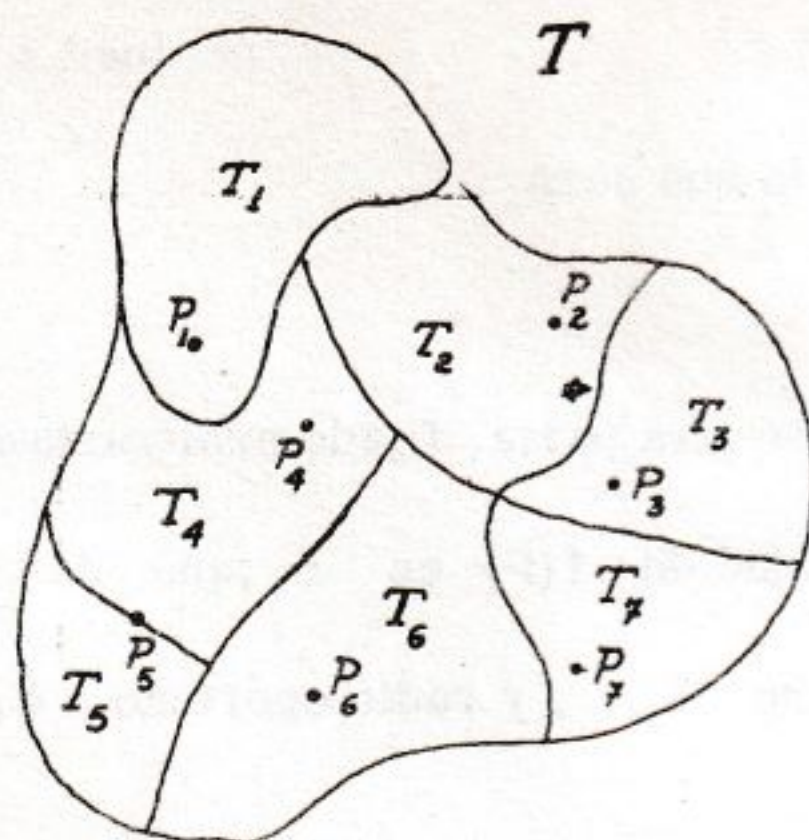


Fig. 16



de  $T$  con norma  $\mathcal{D}$  tan pequeña como se quiera, estamos en condiciones de realizar sobre  $\sigma$  el pasaje al límite para  $\delta \rightarrow 0$ .

Aclarado esto, demostraremos el siguiente teorema:

I - Al tender a cero la norma  $\delta$  de la descomposición  $\mathcal{D}$  la suma integral  $\sigma$  tiende a un límite determinado y finito  $L$  en el sentido que, dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que, en correspondencia con toda descomposición  $\mathcal{D}$  que tenga norma  $\delta < \delta_\varepsilon$ , resulta siempre  $|\sigma - L| < \varepsilon$ .

Dem. La dividiremos en tres partes.

1ª parte) Consideremos una descomposición  $\mathcal{D}$  del dominio  $T$  y las correspondientes sumas  $s$  y  $S$  proporcionadas por (2). Consideremos después otra descomposición  $\mathcal{D}^*$  que sea sucesiva a la  $\mathcal{D}$ , entendiéndose con tal nombre que ha sido obtenida a partir de  $\mathcal{D}$  descomponiendo alguno de los dominios  $T_1, T_2, \dots, T_n$  relativos a la misma (\*), y designemos con  $s^*$  y  $S^*$  las correspondientes sumas análogas a las (2). Deseamos demostrar que se tendrá

$$s^* \geq s, \quad S^* \leq S \quad (4)$$

Bastará evidentemente hacer ver que, partiendo de la  $\mathcal{D}$ , la descomposición de uno cualquiera de sus dominios  $T_j$  en dos dominios parciales (medibles)  $T_j'$ ,  $T_j''$  provoca un aumento (o al menos no una disminución) de la suma  $s$  y una disminución (o al menos no un aumento) de la suma  $S$ .

Y en efecto, el dominio  $T_i$  contribuye en  $S$  con el término  $m_i \text{ med } T_i$ , donde  $m_i$  es el mínimo de  $f(P)$  en  $T_i$ . Si se descompone  $T_i$  en  $T_i'$  y  $T_i''$ , en lugar de la citada contribución  $m_i \text{ med } T_i$  se tendrá esta otra:

-----

(\*) También puede decirse que  $\mathcal{D}^*$  es sucesiva a  $\mathcal{D}$  cuando todo dominio parcial  $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*$  de  $\mathcal{D}^*$  está contenido en uno de los dominios parciales  $T_1, T_2, \dots, T_n$  de  $\mathcal{D}$ .



$m_i^! \text{ med } T_i^! + m_i^{!'} \text{ med } T_i^{!'} ,$  donde  $m_i^!$  es el mínimo de  $f(P)$  en  $T_i^!$  y  $m_i^{!'}$  es el mínimo de  $f(P)$  en  $T_i^{!'} ;$  pero, como resultan evidentemente  $m_i^! \geq m_i ,$   $m_i^{!'} \geq m_i ,$  será también

$$m_i^! \text{ med } T_i^! + m_i^{!'} \text{ med } T_i^{!'} \geq m_i (\text{med } T_i^! + \text{med } T_i^{!'} ) = m_i \text{ med } T_i ,$$

con lo que, efectivamente, no se tiene una disminución de la suma  $s$  .

Análogamente, en la suma  $S$  se tiene inicialmente la contribución  $M_i \text{ med } T_i$  donde  $M_i$  es el máximo de  $f(P)$  en  $T_i$  y después la contribución  $M_i^! \text{ med } T_i^! + M_i^{!'} \text{ med } T_i^{!'} ,$  donde  $M_i^!$  y  $M_i^{!'}$  son los máximos de  $f(P)$  en  $T_i^!$  y  $T_i^{!'} ,$  respectivamente. Puesto que  $M_i^! \leq M_i$  y  $M_i^{!'} \leq M_i ,$  resultará

$$M_i^! \text{ med } T_i^! + M_i^{!'} \text{ med } T_i^{!'} \leq M_i (\text{med } T_i^! + \text{med } T_i^{!'} ) = M_i \text{ med } T_i ,$$

y, efectivamente, la suma  $S$  no aumenta.

2ª parte) Si en correspondencia con todas las posibles descomposiciones  $\mathcal{D}$  del dominio  $T$  se calculan las sumas  $s$  , se obtiene una clase de números que indicaremos con  $\{s\}$  ; análogamente para las sumas  $S$  que generan una clase  $\{S\}$

Queremos demostrar que estas dos clases son contiguas, vale decir que:

$\alpha)$  todo número de la clase  $\{s\}$  es menor o igual que todo número de la clase  $\{S\}$  ;

$\beta)$  dado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , existen un número de  $\{S\}$  y un número de  $\{s\}$  cuya diferencia es menor que  $\epsilon$

Demostremos la proposición  $\alpha)$ . Consideradas dos descomposiciones arbitrarias  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}'$  del dominio  $T$  y llamando con  $s$  a la suma realizada con los mínimos correspondiente a la  $\mathcal{D}$  y con  $S'$  a la referente a los máximos en la  $\mathcal{D}'$  , es necesario demostrar que

$$s \leq S' . \quad (5)$$

Puede demostrarse que existe una tercer descomposición  $\mathcal{D}^*$  del dominio  $T$



que sea sucesiva sea a  $\mathcal{D}$  como a  $\mathcal{D}'^{(*)}$ . Llamando con  $s^*$  y  $S^*$  a las sumas correspondientes a  $\mathcal{D}^*$ , se tiene por la (4):

$$s^* \geq s, \quad S^* \leq S';$$

por otra parte, debido a la (3), tenemos que  $S^* \geq s^*$ , pudiéndose entonces escribir

$$s \leq s^* \leq S^* \leq S',$$

de donde sigue la (5).

Demostremos la proposición  $\beta$ ). Dado  $\epsilon > 0$ , por el teorema de Heine-Cantor aplicado a la  $f(P)$  continua de  $T$ , existe un  $\delta_\epsilon$  tal que, tomados en  $T$  dos puntos cualesquiera que verifiquen  $\overline{P'P''} < \delta_\epsilon$ , resulta

$$|f(P') - f(P'')| < \frac{\epsilon}{\text{med } T}.$$

Consideremos ahora una descomposición cualquiera  $\mathcal{D}$  del dominio  $T$  que tenga norma  $\delta < \delta_\epsilon$ . Es evidente que en cada uno de sus dominios parciales  $T_i$  resulta  $M_i - m_i < \frac{\epsilon}{\text{med } T}$ , de modo que, para las sumas  $s$  y  $S$  que corresponden a una  $\mathcal{D}$  así obtenida, resulta

$$S - s = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \text{med } T_i < \frac{\epsilon}{\text{med } T} \sum_{i=1}^n \text{med } T_i = \frac{\epsilon}{\text{med } T} \text{med } T = \epsilon$$

3ª parte) Establecido que las clases  $\{s\}$ ,  $\{S\}$  son contiguas, designemos con  $L$  al número de separación de las mismas y demostremos que tal número es, precisamente, el límite al que, para  $\delta \rightarrow 0$ , tienden las sumas integrales  $\sigma$

En efecto; poco antes hemos visto que, dado  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta_\epsilon > 0$  tal que todas las descomposiciones  $\mathcal{D}$ , con norma  $\delta < \delta_\epsilon$ , generando sumas que verifican

$$S - s < \epsilon. \quad (6)$$

-----  
(\*) Esta propiedad no es ya evidente como en el caso de los intervalos de una recta (cfr. Cap. IX, nº 2) y requiere una minuciosa demostración que expondremos por separado, en el N° sucesivo.



Por otra parte se tiene

$$s \leq L \leq S, \quad (7)$$

mientras que, para toda suma integral  $\sigma$  correspondiente a tal descomposición  $\mathcal{D}$ , vale la (3). De (3), (6) y (7) sigue  $|\sigma - L| \leq S - s < \epsilon$ , de modo que queda probado que, apenas sea  $\delta < \delta_\epsilon$ , resulta siempre  $|\sigma - L| < \epsilon$ , que es lo que queríamos demostrar.

El teorema que acabamos de exponer nos permite asociar a cada dominio  $T$  de la familia  $\Phi$  un bien determinado número real

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \text{ med } T_i. \quad (8)$$

Nace así una función de dominio  $L = F(T)$ , definida en la familia  $\Phi$ . Demostraremos que

II - La función de dominio  $F(T)$ , recién definida sobre la familia  $\Phi$ , es una función aditiva y resulta primitiva, sobre  $\Phi$ , de la función continua  $f(P)$  dada.

Dem. Para probar que  $F(T)$  es aditiva basta hacer ver que, descompuesto  $T$  en dos dominios parciales  $T_1$  y  $T_2$  de la familia  $\Phi$ , vale la

$$F(T) = F(T_1) + F(T_2). \quad (9)$$

Consideremos una descomposición  $\mathcal{D}_1$  del dominio  $T_1$  en dominios parciales  $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{1m}$  de la familia  $\Phi$  y una descomposición  $\mathcal{D}_2$  del dominio  $T_2$  en dominios parciales  $T_{21}, T_{22}, \dots, T_{2n}$ , siempre de la familia  $\Phi$ . En correspondencia con tales descomposiciones, consideremos las dos sumas integrales

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^m f(P_{1i}) \text{ med } T_{1i}, \quad \sigma_2 = \sum_{j=1}^n f(P_{2j}) \text{ med } T_{2j}$$

relativas, respectivamente, a los dominios  $T_1$  y  $T_2$



Es obvio que  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  individualizan una (particular) descomposición  $\mathcal{D}$  del dominio  $T$  y también es evidente que, entre las sumas integrales relativas al dominio  $T$  y correspondientes a esta descomposición  $\mathcal{D}$ , existe una igual a  $\sigma_1 + \sigma_2$

Llamando con  $\delta$  a la norma de  $\mathcal{D}$ , las normas de  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  son  $\leq \delta$ , por lo que se tendrá

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_1 = F(T_1)$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_2 = F(T_2)$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\sigma_1 + \sigma_2) = F(T)$ ; por otra parte es cierta la  $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\sigma_1 + \sigma_2) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_1 + \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_2$ , de la que sigue la (9).

Demostremos ahora que  $F(T)$  es primitiva de  $f(P)$ , haciendo ver que, fijado arbitrariamente un punto  $P_0 \in A$ , se tiene  $F'(P_0) = f(P_0)$ , o sea

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(T)}{\text{med } T} = f(P_0), \quad (10)$$

donde  $T$  es cualquier dominio de  $\Phi$  que contenga a  $P_0$  y  $\delta$  el diámetro de  $T$ .

Observemos primeramente que, cualquiera sea el dominio  $T$ , llamando con  $m$  y  $M$  al mínimo y al máximo de  $f(P)$  en  $T$ , se tiene

$$m \cdot \text{med } T \leq F(T) \leq M \cdot \text{med } T, \quad (11)$$

ya que sabemos de la demostración del teor. I que  $L = F(T)$  es el número de separación de las dos clases contiguas  $\{s\}$ ,  $\{S\}$  y, por otra parte, es obvio que  $m \cdot \text{med } T$  es un número de la primera clase y  $M \cdot \text{med } T$  un número de la segunda.

Partiendo de la (11) no es necesario sino repetir un razonamiento idéntico al hecho en la demostración del teor. II del n° precedente, para llegar a la (10), que es lo que queríamos demostrar.

Con los teoremas I y II de este n° , queda completamente resuelto el problema de construir la única función aditiva de dominio  $F(T)$  primitiva de una fun -



ción continua de punto  $f(P)$  dada.

## 6 - UN TEOREMA SOBRE LA DESCOMPOSICION DE UN DOMINIO.

En el curso de la demostración del teor. I del n<sup>o</sup> precedente dejamos en suspenso una cuestión sobre la que ahora volveremos. Concretamente, dado un dominio a cotado y medible  $T$ , y efectuadas dos descomposiciones  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  del mismo en dominios parciales medibles, se trata de demostrar que existe una tercer descomposición  $\mathcal{D}^*$  sucesiva sea a  $\mathcal{D}$  como a  $\mathcal{D}'$ .

Sean  $T_1, T_2, \dots, T_n$  los dominios medibles de la descomposición  $\mathcal{D}$ ;  $U_1, U_2, \dots, U_n$  los de la  $\mathcal{D}'$ . Se podría suponer que se obtendría la descomposición buscada  $\mathcal{D}^*$  sobreponiendo simplemente las dos dadas; pero en general esto no resuelve el problema pues podría suceder que procediendo así se origine una subdivisión de  $T$  en infinitos dominios parciales. Examínese, por ejemplo, la fig. 17. El dominio  $T$  es un rectángulo  $(0 \leq x \leq \frac{1}{\pi} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{\pi^2})$  que, en la fig. 17 a) está descompuesto en dos rectángulos  $T_1, T_2$ , mediante la recta  $y=0$ , mientras en la figura 17 b) está descompuesto en dos dominios  $U_1, U_2$  (normales respecto al eje  $x$ ) mediante la curva  $y = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  que cumple infinitas oscilaciones entre las dos parábolas  $y = \pm x^2$ . Es claro que sobreponiendo estas dos descomposiciones, el dominio  $T$  queda subdividido en infinitos dominios parciales.

Es necesario, entonces, proceder de otro modo; por ejemplo, como en el que expondremos a continuación. Para comprenderlo mejor es útil tener presente que, en este Cap., hablando de dominios, nunca hemos exigido que sean internamente conexos; en otras palabras, es perfectamente lícito realizar subdivisiones en dominios que estén constituidos por varios trozos separados, eventualmente infini-tos, con tal que la unión de los mismos sea un conjunto medible. Por ejemplo, en



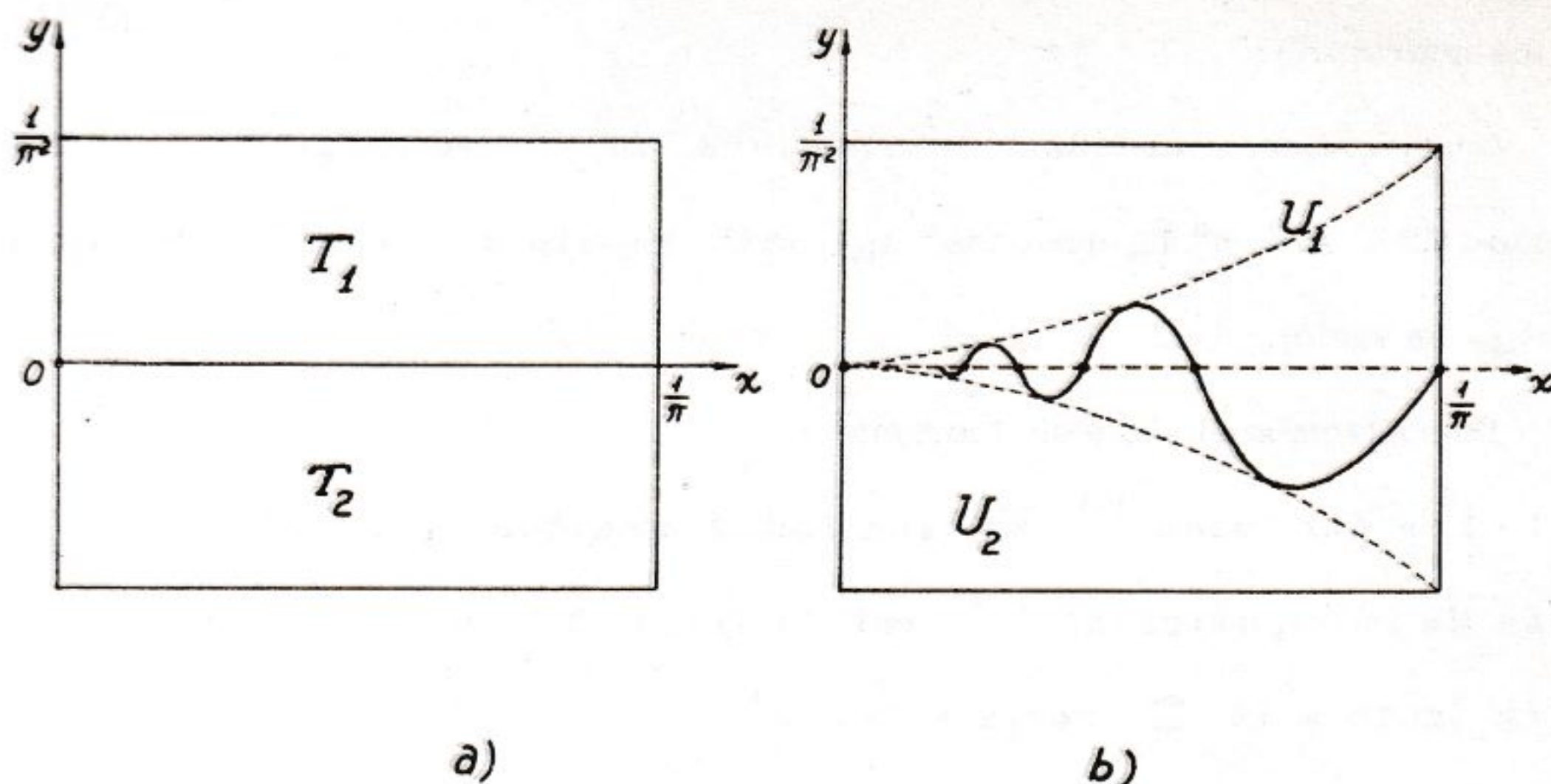


Fig. 17

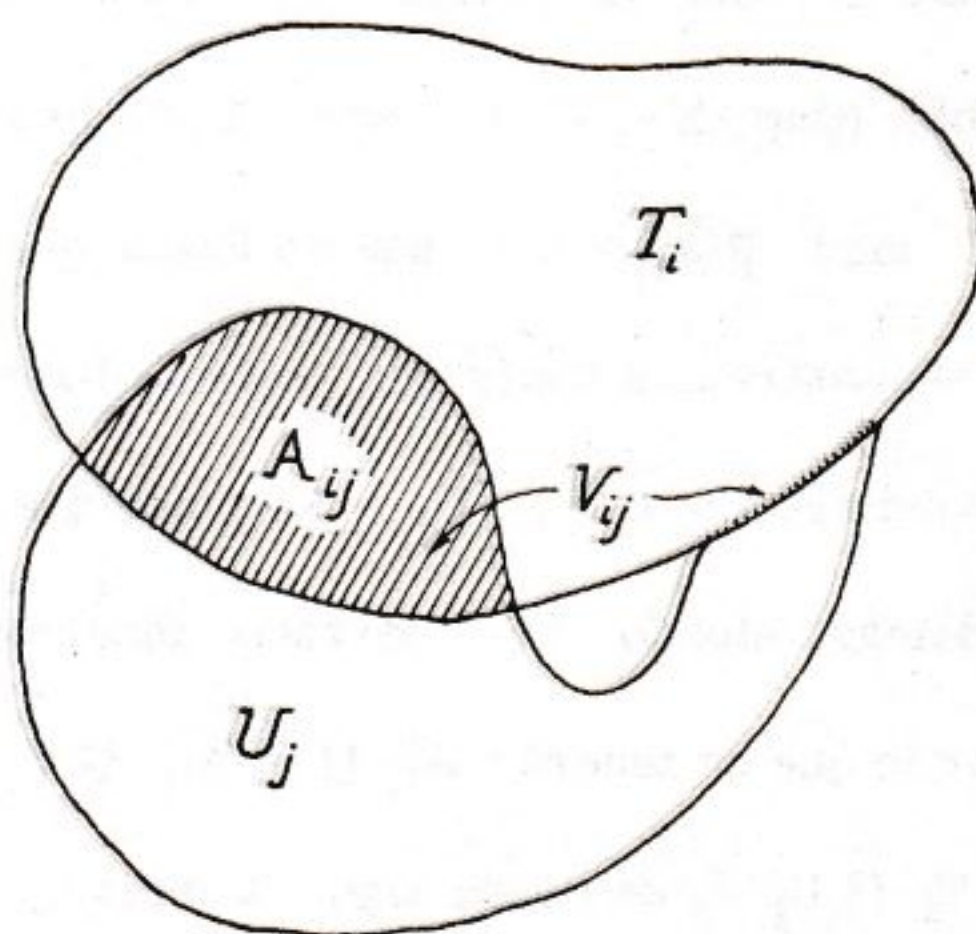
el caso de la fig 17, la dificultad que señalamos antes se supera inmediatamente pensando que los infinitos rectanguloides situados sobre el eje  $x$  constituyen reunidos un solo dominio y otro tanto con aquéllos situados por debajo. Expondremos ahora el modo riguroso de realizar esta idea.

Introduzcamos los  $m \cdot n$  conjuntos

$$V_{ij} = T_i \cap U_j, \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$$

y hagamos notar que cada  $V_{ij}$  es un conjunto cerrado (eventualmente vacío) contenido en  $T^{(*)}$ .

Indiquemos después con  $A_{ij}$  el conjunto de puntos interiores de  $V_{ij}$ , teniendo presente que cada  $A_{ij}$  es un campo, eventualmente vacío (si  $V_{ij}$  es vacío o, aún no siéndolo, si carece de pñ



(\*) La intersección de dos dominios no es, en general, un dominio; sin embargo siempre es un conjunto cerrado, ya que se puede fácilmente demostrar que la intersección de dos conjuntos cerrados siempre es un conjunto cerrado.



tos interiores).

Consideremos, por último, la clausura  $A_{ij}$  de cada campo  $A_{ij}$ ; sabemos (Cap. XIV, n° 7), que cada  $A_{ij}$  es un dominio (eventualmente vacío si  $A_{ij}$  es vacío).

Demostremos el siguiente teorema:

I - Los dominios (\*)  $\bar{A}_{ij}$  son todos medibles y proporcionan una descomposición  $\mathcal{D}^*$  del dominio  $T$ , que resulta sucesiva tanto a la  $\mathcal{D}$  como a la  $\mathcal{D}'$ .

Dem. Comencemos demostrando que cada dominio  $\bar{A}_{ij}$  es medible, o sea que  $\text{med}_e \mathcal{F}\bar{A}_{ij} = 0$  (Cap. XX, n° 3, teor. I). Es evidente que un punto interior (o exterior) a  $V_{ij}$  es también interior (o exterior) a  $\bar{A}_{ij}$ , por lo que un punto de  $\mathcal{F}\bar{A}_{ij}$  no puede ser ni interior ni exterior a  $V_{ij}$ ; necesariamente será un punto de  $\mathcal{F}V_{ij}$ . Queda así demostrado que  $\mathcal{F}\bar{A}_{ij} \subseteq \mathcal{F}V_{ij}$  de lo que se deduce  $\text{med}_e \mathcal{F}\bar{A}_{ij} \leq \text{med}_e V_{ij}$  (Cap. XX, n° 4, teor. I); pero  $V_{ij}$ , como intersección de los dos dominios medibles  $T_i$  y  $U_j$ , es un conjunto medible (Cap. XX, n° 4, Teor. IV) de lo que sigue  $\text{med}_e V_{ij} = 0$ . Entonces será  $\text{med}_e \mathcal{F}\bar{A}_{ij} = 0$ , que es lo que queríamos demostrar.

Demostremos ahora que cada dominio  $\bar{A}_{ij}$  está contenido en los dominios  $T_i$  y  $U_j$ . Sabemos que  $A_{ij} \subseteq V_{ij}$  de lo que sigue  $\mathcal{D}A_{ij} \subseteq \mathcal{D}V_{ij}$ . Además, siendo  $V_{ij}$  cerrado, tenemos  $\mathcal{D}V_{ij} \subseteq V_{ij}$  y, entonces,  $\mathcal{D}A_{ij} \subseteq V_{ij}$ , por lo que se tendrá  $A_{ij} \cup \mathcal{F}A_{ij} \subseteq V_{ij}$ , o sea,  $\bar{A}_{ij} \subseteq V_{ij}$ ; pero  $V_{ij} = T_i \cap U_j$ , de donde sigue la tesis.

Pasemos a demostrar que dos dominios distintos  $\bar{A}_{ij}$ ,  $\bar{A}_{i'j'}$ , no pueden tener puntos interiores en común. Hemos visto recién que

-----

(\*) En la  $\mathcal{D}^*$  se tendrán naturalmente en cuenta solamente los  $\bar{A}_{ij}$  que no son vacíos; sin embargo, en la demostración que realizamos, razonaremos sobre todos los  $\bar{A}_{ij}$ . Es claro que una vez demostrado que ellos descomponen a  $T$ , se habrá también asegurado que no todos son vacíos.



$\bar{A}_{ij} \subseteq T_i$ ,  $\bar{A}_{ij} \subseteq U_j$ , pudiendo entonces afirmarse que un punto interior de  $\bar{A}_{ij}$  resulta interior tanto de  $T_i$  como de  $U_j$ . Análogamente para  $\bar{A}_{i'j'}$ . En tonces, si  $\bar{A}_{ij}$  y  $\bar{A}_{i'j'}$  tuviesen un punto interior en común, este sería interior a  $T_i$ ,  $T_{i'}$ ,  $U_j$ ,  $U_{j'}$ . Como  $A_{ij}$  y  $\bar{A}_{i'j'}$  son distintos, debe por lo menos ser  $i \neq i'$  o  $j \neq j'$ ; si  $i \neq i'$  se llega al absurdo que  $T_i$  y  $T_{i'}$  tendrían un punto interior en común o si  $j \neq j'$  que lo tendrían  $U_j$  y  $U_{j'}$ , quedando así demostrada la tesis.

Demostremos por último que

$$T = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n \bar{A}_{ij} \quad (1)$$

De las dos relaciones evidentes  $T = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n V_{ij}$ ;  $V_{ij} = A_{ij} \cup \mathcal{F} V_{ij}$  sigue esta otra  $T = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n (A_{ij} \cup \mathcal{F} V_{ij})$ . Llamando con  $A$  la  $\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n A_{ij}$  y con  $V$  a  $\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n \mathcal{F} V_{ij}$ , escribiremos también  $T = A \cup V$

Observemos, además, que el conjunto  $V$  tiene medida nula, ya que es la unión de un número finito de conjuntos  $\mathcal{F} V_{ij}$ , cada uno de ellos de medida nula; esto implica (Cap. XX, n° 3, teor. IV) que  $V$  carece de puntos interiores.

Advertidos de esto, consideremos un punto  $P \in T$ . El punto  $P$  es de acumulación de puntos interiores de  $T$  (Cap. X, n° 7) y de ahí que en todo entorno circular de  $P$  pueda construirse un dominio circular  $C$ , que no contenga a  $P$  y formado totalmente por puntos de  $T = A \cup V$ . Resulta evidente que  $C$  no puede estar constituido totalmente por puntos de  $V$ , puesto que éste carece de puntos interiores; entonces  $C$  contiene necesariamente puntos de  $A$ . Esto nos permite asegurar que, en todo entorno circular de  $P$  hay puntos de  $A$  distintos de  $P$ , vale decir, que  $P$  es punto de acumulación de  $A$ .



Recordando que  $A$  es la unión de los campos  $A_{ij}$  (en número finito), se deduce que  $P$  es punto de acumulación de por lo menos un  $A_{ij}$  perteneciendo, entonces, a la clausura  $\bar{A}_{ij}$  del mismo.

Resumiendo: todo punto  $P \in T$  pertenece al menos a uno de los dominios  $A_{ij}$ , pudiéndose escribir

$$T \subseteq \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n \bar{A}_{ij} \quad (2)$$

Por otra parte ya se ha visto que cada  $\bar{A}_{ij}$  está contenido tanto en  $T_i$  como en  $U_j$ , y, por ende, en  $T$ ; se tendrá también

$$T \supseteq \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n \bar{A}_{ij} \quad ; \quad (3)$$

de (2) y (3) sigue la (1), que es lo que queríamos demostrar.

Hemos así probado cuatro proposiciones, de las cuales, la 1ª, 3ª, y 4ª aseguran que los  $\bar{A}_{ij}$  realizan una descomposición  $D^*$  de  $T$  en dominios medibles, mientras la 2ª afirma que  $D^*$  es sucesiva tanto a la  $D$  como a la  $D'$ . El teor. I queda así completamente demostrado.



## CAPITULO XXII

### Integración de las funciones continuas de varias variables y aplicaciones

#### 1 - DEFINICION Y PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCION CONTINUA SOBRE UN DOMINIO ACOTADO Y ME- DIBLE .

Sean  $A$  un dominio arbitrario del espacio euclídeo  $S_r$  y  $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  una función real definida y continua en  $A$ . Designando con  $\Phi$  a la familia infinitesimal constituida por todos los dominios acotados y medibles  $T$  contenidos en  $A$ , sabemos por el Cap. anterior que existe y es única la función aditiva de dominio  $F(T)$  que tiene por derivada, sobre la familia  $\Phi$ , a la función  $f(P)$  dada.

Para cada dominio  $T$  que se fije, el correspondiente valor  $F(T)$  de tal función será designado como la integral de la  $f(P)$  (extendida) sobre el dominio  $T$  e indicado con el símbolo

$$\int_T f(P) dT \quad \text{o también} \quad \int_T f(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_1 dx_2 \dots dx_r. \quad (1)$$

Teniendo en cuenta los resultados del n° 5 del Cap. precedente, se puede dar una definición directa de la integral (1) del siguiente modo. Considérense las descomposiciones  $\mathcal{D}$  de  $T$  en dominios parciales medibles  $T_1, T_2, \dots, T_n$ ; elíjase en cada  $T_i$  un punto  $P_i$  y calcúlese, sucesivamente, la suma integral

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(P_i) \text{ med } T_i; \text{ si se designa con } \delta \text{ a la norma de } \mathcal{D} \text{ se tendrá}$$

$$\int_T f(P) dT = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \text{ med } T_i, \quad (2)$$

o también, llamando con  $m_i$  y  $M_i$  al mínimo y al máximo de  $f(P)$  en  $T_i$ , se calculan las sumas  $s = \sum_{i=1}^n m_i \text{ med } T_i$ ,  $S = \sum_{i=1}^n M_i \text{ med } T_i$  y entonces la



integral (1) es el número de separación de las dos clases contiguas  $\{s\}$ ,  $\{S\}$  descriptas por las citadas sumas, cuando varía la descomposición  $D$  de  $T$ . De lo dicho surge que

I - Toda suma  $s = \sum_{i=1}^n m_i \text{ med } T_i$  proporciona un valor aproximado por defecto de la integral (1) [mientras que toda  $S = \sum_{i=1}^n M_i \text{ med } T_i$  lo hace por exceso].

Naturalmente la definición recién dada de integral se aplica también cuando  $f(P)$  sea función de una variable  $x$  y, en el caso particular que  $T$  sea un intervalo acotado  $[a, b]$  del eje  $x$ , nos permite reencontrar la integral introducida en el Cap. IX, n° 2 (como surge del teor. I del n° 2 del Cap. precedente).

La actual definición nos permite, sin embargo, considerar también integrales del tipo  $\int_T f(x) dx$  extendidas sobre un dominio acotado y medible del eje  $x$  (que en general, no será un intervalo). La consideración de estas integrales más generales para funciones de una variable tiene escasa importancia desde el punto de vista de las aplicaciones; es, en cambio, esencial para funciones de varias variables, para las que de ninguna manera nos podemos limitar a considerar solamente integrales extendidas sobre intervalos.

Las integrales de funciones de una variable se llaman también integrales simples; las de funciones de dos variables integrales dobles, usándose, para las mismas, también la notación  $\iint_T f(P) dT$  o la  $\iint_T f(x, y) dx dy$ ; las de funciones de tres variables, integrales triples, indicadas a menudo con  $\iiint_T f(P) dT$  o también  $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ ; en el caso general frecuentemente se usa la denominación de integrales múltiples.

En el Cap. IX, a propósito de las integrales simples, se había también introducido los conceptos de integral definida (dependiente de una orientación del intervalo de integración) y de integral indefinida; advirtamos que nada aná



logo haremos para las integrales dobles, triples, etc.

En el caso particular  $f(P) \equiv 0$ , la (2) nos da inmediatamente  $\int 0 dT = 0$ , mientras que, en el caso  $f(P) \equiv 1$ , nos proporciona el siguiente teorema:

II - Si  $T$  es un dominio acotado y medible de  $S_r$ , se tendrá:

$$\int_T dT = \text{med } T \quad (3)$$

y, en particular, para  $r = 2, 3$ :

$$\iint_T dT = \iint_T dx dy = \text{área } T; \quad \iiint_T dT = \iiint_T dx dy dz = \text{volumen } T. \quad (3')$$

Este teorema justifica el hecho de que al símbolo  $dT = dx_1 dx_2 \dots dx_r$ , que interviene en la notación adoptada para los integrales, se le da el nombre de elemento de medida (de área, de volumen, etc) del espacio  $S_r$  (del plano, del espacio, etc.).

Las propiedades de la integral  $\int_T f(P) dT$  son totalmente análogas a las expuestas en el Cap. IX, n.º 4; algunas de ellas son consecuencia inmediata de las propiedades de las funciones aditivas de dominio vistas en los n.ºs 3, 4 del Cap. precedente.

III - (Teorema de la media). Llamando con  $m$  y  $M$  al mínimo y al máximo de  $f(P)$  en  $T$ , se verifica

$$m \cdot \text{med } T \leq \int_T f(P) dT \leq M \cdot \text{med } T, \quad (4)$$

pudiéndose escribir

$$\frac{\int_T f(P) dT}{\text{med } T} = \mu \quad (4')$$

donde  $\mu$  representa un oportuno valor comprendido entre  $m$  y  $M$ . (\*) Si el dominio  $T$  es internamente conexo, existirá en él por lo menos un punto  $Q$  tal que resulte  $\mu = f(Q)$ , y entonces

-----

(\*) El número  $\mu$  se llama el valor medio de la  $f(P)$  en  $T$ .



$$\frac{\int_T f(P) dT}{\text{med } T} = f(Q) \quad (4'')$$

Dem. La (4) es una consecuencia inmediata del teor. de Cauchy-Fubini aplicado a la función aditiva de dominio  $F(T) = \int_T f(P) dT$  que tiene por derivada  $f(P)$  o también del teor. I teniendo en cuenta que  $m$ ,  $\text{med } T$  es un valor particular de  $s$  y  $M$ ,  $\text{med } T$  un valor particular de  $S$ . La (4'') surge del hecho que, en virtud de la hipótesis hecha sobre el dominio  $T$ , puede aplicarse el teor. III' del Cap. XV, n° 6 y concluir que  $f(P)$  asume en  $T$ , por lo menos una vez, el valor  $\mu$  comprendido entre  $m$  y  $M$ .

IV - (Teorema de la media generalizado). Sean  $f(P)$  y  $g(P)$  funciones continuas en  $T$  y, además, sea  $g(P) \geq 0$ . Designando con  $m$  y  $M$  al mínimo y al máximo valor de  $f(P)$  en  $T$ , se tendrá

$$m \int_T g(P) dT \leq \int_T f(P)g(P) dT \leq M \int_T g(P) dT, \quad (5)$$

y si el dominio  $T$  es internamente conexo, existirá en él por lo menos un punto  $Q$  para el que se verificará

$$\int_T f(P)g(P) dT = f(Q) \int_T g(P) dT \quad (5')$$

Dem. En virtud de la hipótesis  $g(P) \geq 0$ , será evidentemente (con las notaciones de costumbre):

$$m \sum_{i=1}^n g(P_i) \text{med } T_i \leq \sum_{i=1}^n f(P_i) g(P_i) \text{med } T_i \leq \sum_{i=1}^n M g(P_i) \text{med } T_i,$$

y de ésta, pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$ , resulta la (5).

Si  $\int_T g(P) dT = 0$  se deduce de la (5) que  $\int_T f(P)g(P) dT = 0$ , resultando cierta la (5') cualquiera sea el punto  $Q \in T$ . Si, en cambio,  $\int_T g(P) dT > 0$

de la (5) obtenemos para el cociente  $\frac{\int_T f(P)g(P) dT}{\int_T g(P) dT}$  un valor  $\mu$  comprendido entre  $m$  y  $M$ , y como  $T$  es internamente conexo, la  $f(P)$  asumirá, por lo menos una vez, el valor  $\mu$  en  $T$ , con lo que queda demostrada la (5').



V - (Teorema de la aditividad). Descompuesto el dominio  $T$  en un número finito de dominios parciales acotados y medibles  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , se tendrá

$$\int_T f(P) dT = \int_{T_1} f(P) dT + \int_{T_2} f(P) dT + \dots + \int_{T_n} f(P) dT \quad (6)$$

Dem. Es una consecuencia inmediata del hecho que  $F(T) = \int_T f(P) dT$  es una función aditiva de  $T$ .

VI - (Teorema de la distributividad) - Si  $f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)$  son funciones continuas en  $T$ , fijadas arbitrariamente las constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , será

$$\int_T [c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \dots + c_n f_n(P)] dT = c_1 \int_T f_1(P) dT + c_2 \int_T f_2(P) dT + \dots + c_n \int_T f_n(P) dT \quad (7)$$

Dem. Basta considerar el caso de dos funciones. Tendremos en ese caso, por la (1):

$$\begin{aligned} \int_T [c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P)] dT &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [c_1 f_1(P_i) + c_2 f_2(P_i)] \text{ med } T_i = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ c_1 \sum_{i=1}^n f_1(P_i) \text{ med } T_i + c_2 \sum_{i=1}^n f_2(P_i) \text{ med } T_i \right] = \\ &= c_1 \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(P_i) \text{ med } T_i + c_2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_2(P_i) \text{ med } T_i = \\ &= c_1 \int_T f_1(P) dT + c_2 \int_T f_2(P) dT \end{aligned}$$

De este teorema se extrae, en particular, la conclusión de que la integral de una suma de dos o más funciones es igual a la suma de las integrales de cada una de las funciones y que un factor constante se puede llevar fuera del signo de integral.

Con demostraciones totalmente análogas a la de los teoremas V, VI y VII del Cap. IX, n° 4, se pueden además establecer los siguientes tres teoremas:

VII - Si en el dominio  $T$  resulta  $f(P) \geq 0$ , se tendrá:



$$\int_T f(P) dT \geq 0, \quad (8)$$

y además, si  $T_1$  es cualquier dominio medible contenido en  $T$ , resultará

$$\int_T f(P) dT \geq \int_{T_1} f(P) dT. \quad (9)$$

En la (8) vale el signo  $=$  sólo si  $f(P)$  es idénticamente nula en  $T - T_1$ .

VIII - Si  $f(P)$ ,  $g(P)$  son funciones continuas en  $T$  y además es  $f(P) \geq g(P)$ , será

$$\int_T f(P) dT \geq \int_T g(P) dT, \quad (10)$$

valiendo el signo  $=$  sólo si  $f(P) \equiv g(P)$ .

IX - Vale la desigualdad

$$\left| \int_T f(P) dT \right| \leq \int_T |f(P)| dT, \quad (11)$$

valiendo el signo  $=$  en los únicos casos en que  $f(P)$  sea siempre no positiva o siempre no negativa.

Agreguemos una última propiedad de la integral, que aprovecharemos a continuación, y que en esencia ya estaba contenida en los teors. I y II del n° 4 del Cap. precedente.

Nosotros habíamos indicado con  $\Phi$  la familia infinitesimal de todos los dominios acotados y medibles contenidos en el dominio  $A$  de continuidad de la  $f(P)$ . Algunas veces puede ser necesario considerar familias infinitesimales  $\Phi'$  constituidas por dominios particulares  $T$  de la familia  $\Phi$  [por ejemplo: la familia de los intervalos contenidos en  $A$ ; o, en el caso del plano, la familia de los dominios normales respecto al eje  $x$  contenidos en  $A$ ; etc]. Es obvio que, también sobre tal familia parcial  $\Phi'$ , la integral  $\int_T f(P) dT$  resulta ser una función aditiva de dominio que tiene por derivada a  $f(P)$ .



Teniendo esta observación en cuenta, así como también los dos teoremas antes mencionados, se puede enunciar lo siguiente:

X - Dadas la función  $f(P)$  continua en  $A$  y cualquier familia in finitesimal  $\Phi'$  de dominios  $T$  acotados y medibles contenidos en  $A$ , supóngase haber logrado, con cualquier procedimiento, construir sobre  $\Phi'$  una función aditiva de dominio  $F(T)$  que tenga por derivada la  $f(P)$ , o que verifique la propiedad de la media respecto a la  $f(P)$ . En ambos casos será necesariamente  $F(T) = \int f(P) dT$ .

## 2 - EJEMPLOS DE CONJUNTOS MEDIBLES EN EL ESPACIO; SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE UNA INTEGRAL DOBLE.

Sean  $E$  un arbitrario conjunto acotado de puntos del plano  $xy$  y  $h$  un número positivo. Llamaremos cilindro recto, de base  $E$  y altura  $h$ , al conjunto  $T$  de puntos  $(x, y, z)$  del espacio que verifican las dos condiciones:  $(x, y) \in E$ ,  $0 \leq z \leq h$ . Demostraremos a continuación que

I - Si la base  $E$  del cilindro recto  $T$  es un conjunto plano medible, también el citado cilindro será un conjunto medible del espacio y se tendrá

$$\text{volumen } T = h \cdot \text{área } E. \quad (1)$$

Dem. La frontera de  $T$  consta de dos conjuntos situados en los planos  $z=0$ ,  $z=h$  (y, por ende, de volumen nulo) y del cilindro recto  $T^*$  que tiene por base a  $\mathcal{F}E$  y altura  $h$  (frontera lateral de  $T$ ). Para probar que  $T$  es medible basta hacer ver que  $T^*$  tiene volumen nulo. Demostraremos esto, y simultáneamente la (1), del siguiente modo.

Designemos con  $R$  a un intervalo (rectángulo) del plano  $xy$  que contenga a  $E$  y realicemos una descomposición coordenada  $\mathcal{D}$ , con norma  $\delta$ , de  $R$  en



rectángulos parciales, llamando  $R'_1, R'_2, \dots, R'_m$  a los rectángulos constituidos por puntos interiores de  $E$  y  $R^*_1, R^*_2, \dots, R^*_n$  a los que tienen por lo menos un punto en común con  $\mathcal{F}E$ . Designemos, por último con  $C'_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) al intervalo (paralelepípedo) del espacio que tiene por base  $R'_j$  y altura  $h$ , y con  $C^*_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) al que tiene por base  $R^*_k$  y altura  $h$ .

La frontera lateral  $T^*$  está contenida en la unión de los paralelepípedos  $C^*_k$ , siendo, por lo tanto.

$$\text{Volumen}_e T^* \leq h \sum_{k=1}^n \text{área } R^*_k.$$

Pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$ , resulta

$$\text{Volumen}_e T^* \leq h \text{área}_e \mathcal{F}E = 0$$

(ya que  $E$  es medible); entonces  $T^*$  tiene volumen nulo, resultando  $T$  un conjunto medible del espacio. Como  $T$  contiene a la unión de los paralelepípedos  $C'_j$  y está contenido en la de los  $C'_j$  y  $C^*_k$ , se tendrá

$$h \sum_{j=1}^m \text{área } R'_j \leq \text{volumen } T \leq h \left( \sum_{j=1}^m \text{área } R'_j + \sum_{k=1}^n \text{área } R^*_k \right);$$

de aquí, pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$ , se deduce

$$h \cdot \text{área } E \leq \text{volumen } T \leq h \cdot \text{área } E,$$

es decir, la (1), que es lo que queríamos demostrar

Supongamos ahora que  $A$  sea un dominio acotado y medible del plano  $xy$ , y  $f(x,y)$  una función continua y no negativa definida en  $A$ . Daremos el nombre de cilindroide de base  $A$ , relativo a la función  $f(x,y)$  al conjunto  $T$  de los puntos del espacio  $xyz$  que verifican las dos condiciones

$$(x,y) \in A, \quad 0 \leq z \leq f(x,y),$$

y demostraremos el teorema:

II - Un cilindroide  $T$  de base  $A$  y relativo a la función  $f(x,y)$



continua y no negativa, es un conjunto medible del espacio y resulta

$$\text{volumen } T = \iint_A f(x, y) dx dy \quad (2)$$

Dem. La frontera de  $T$  consta de los puntos del dominio  $A$ , de los puntos  $(x, y, z)$  de  $T$  tales que  $(x, y) \in \mathcal{F}A$  y, por último, de los puntos de la superficie  $S$ , diagrama de la función  $z = f(x, y)$  (véase fig. 19). Los puntos del primer tipo forman un conjunto de volumen nulo (pues está situado sobre el plano  $xy$ ).

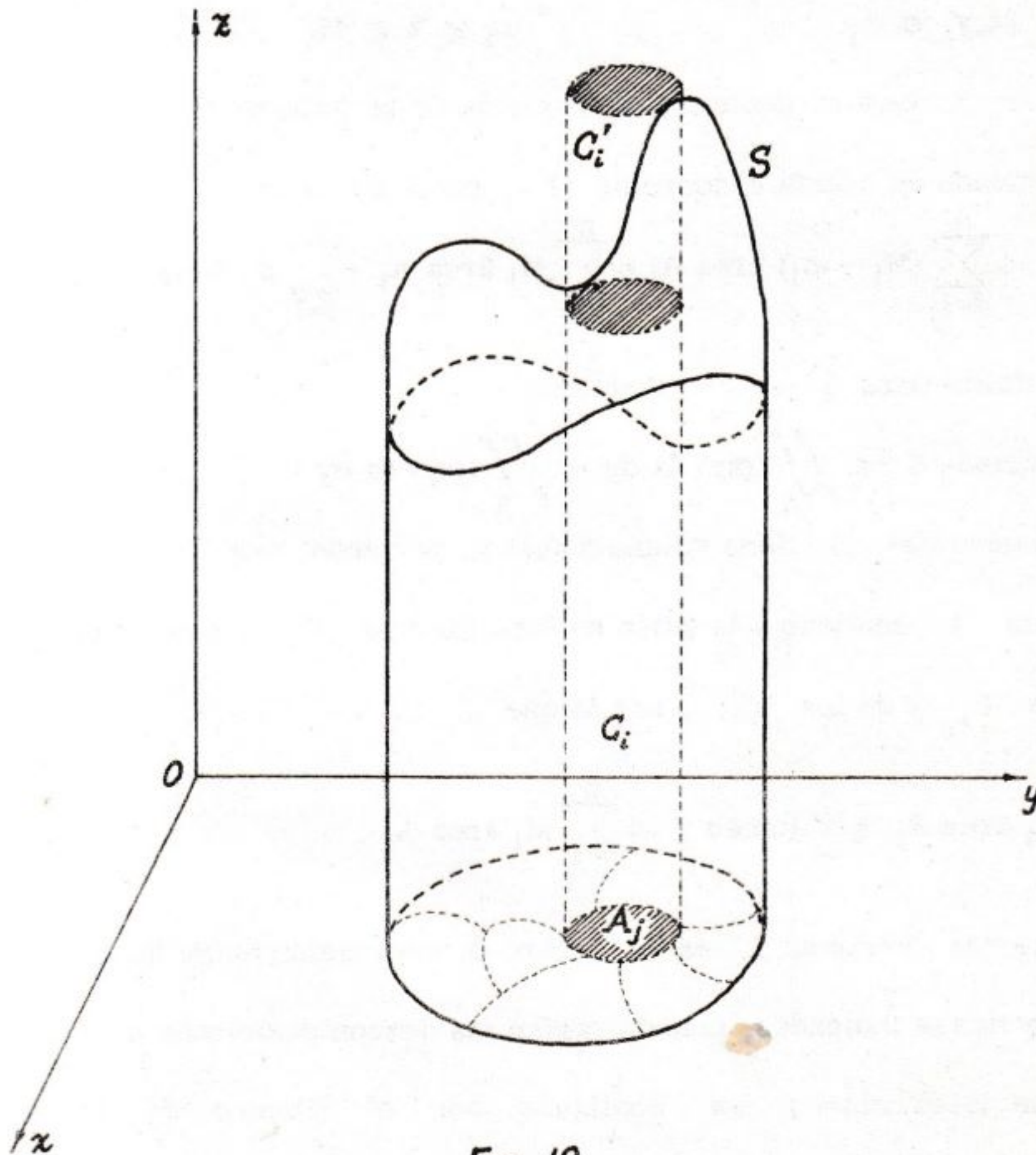


Fig. 19

También los del segundo tipo forman un conjunto de volumen nulo puesto que tal conjunto está contenido en el cilindro recto, de base  $\mathcal{F}A$  y altura igual al máximo de la  $f(x, y)$  en  $A$  (teniendo este cilindro volumen nulo en virtud del teorema I). Por lo tanto, para probar que  $T$  es medible, bastará hacer ver que la su



perficie  $S$  tiene volumen nulo. Esto resultará, junto a la (2), de lo que sigue.

Descompongamos el dominio  $A$  en un número finito de dominios medibles  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Indiquemos con  $\delta$  a la norma de la descomposición efectuada; con  $m_i, M_i$  al mínimo y al máximo valor de la  $f(x, y)$  en  $A_i$ ; con  $C_i$  al cilindro recto determinado por las

$$(x, y) \in A_i, \quad 0 \leq z \leq m_i;$$

con  $C'_i$  al individualizado por las

$$(x, y) \in A_i, \quad m_i \leq z \leq M_i. \quad (*)$$

La superficie  $S$  está evidentemente contenida en la unión de los cilindros  $C'_i$ , por lo que, teniendo en cuenta el teorema I, puede escribirse

$$\text{volumen}_e S \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \text{área } A_i = \sum_{i=1}^n M_i \text{área } A_i - \sum_{i=1}^n m_i \text{área } A_i.$$

Pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$  se obtiene

$$\text{volumen}_e S \leq \iint_A f(xy) dx dy - \iint_A f(xy) dx dy = 0;$$

de lo que se deduce que  $S$  tiene volumen nulo y, por ende, que  $T$  es medible.

El cilindroide  $T$  contiene a la unión de los cilindros  $C_i$  y está contenido en la unión de los  $C_i$  y de los  $C'_i$ , por lo que

$$\sum_{i=1}^n m_i \text{área } A_i \leq \text{volumen } T \leq \sum_{i=1}^n M_i \text{área } A_i$$

Esto nos dice que volumen  $T$  es un número de separación entre las clases descritas por las sumas indicadas, cuando varían las descomposiciones de  $A$ ; pero sabemos que tales clases son contiguas con el número de separación

$$\iint_A f(x, y) dx dy, \text{ llegándose así a la (2) que es lo que queríamos demostrar}$$

Este teorema nos indica que la integral de una función continua y no negativa  $f(x, y)$ , extendida sobre un dominio plano  $A$ , puede interpre-

-----

(\*) Si  $m_i = 0$ ,  $C_i$  se reduce al dominio  $A_i$  del plano  $xy$ ; si  $M_i = m_i$  se reduce a un dominio igual al  $A_i$ , situado en un plano  $z = \text{constante}$ .



tarse como el volumen del cilindroide de base  $A$ , relativo a la  $f(x,y)$  [cfr. Cap. IX, n° 3].

La (2) puede justificarse intuitivamente imaginando al cilindroide  $T$  descompuesto en cilindros elementales que tuvieran cada uno de ellos por base un rectángulo infinitésimo de lados  $dx$  y  $dy$ , y altura  $f(x,y)$ .

Supongamos ahora que en el citado dominio acotado y medible  $A$  del plano  $xy$  están definidas dos funciones continuas  $f_1(x,y)$ ,  $f_2(x,y)$  tales que resulte  $f_1(x,y) < f_2(x,y)$  en los puntos interiores de  $A$ .

El conjunto  $T$  de los puntos del espacio definido por las dos condiciones

$$(x,y) \in A, \quad f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y),$$

es un dominio del espacio, que designaremos como dominio normal (o simple) respecto al plano  $xy$ , de base  $A$ , y relativo a las dos funciones  $f_1(x,y)$ ,  $f_2(x,y)$ . Análogamente pueden definirse los dominios normales respecto a los planos  $xz$ ,  $yz$ .

Con razonamiento análogo al hecho para el teor. II del Cap. XX, n° 5, se llega a que:

III - Un dominio  $T$  del espacio  $xyz$ , normal respecto del plano  $xy$ , relativo a las funciones continuas  $f_1(x,y)$ ,  $f_2(x,y)$  y de base  $A$  (dominio acotado y medible del plano  $xy$ ), es un conjunto medible y se tiene

$$\text{volumen } T = \iint_A [f_2(x,y) - f_1(x,y)] dx dy. \quad (3)$$

### 3 - ALGUNAS APLICACIONES DEL CONCEPTO DE INTEGRAL.

El concepto de integral encuentra aplicación en numerosas cuestiones de mecánica y de física; deseamos ahora hacer referencia a algunas de ellas.

i°) Masa de un cuerpo material. Hemos visto (Cap. XXI, n° 2) que si  $A$



es un cuerpo material y  $T$  una genérica porción acotada y medible del mismo, la masa de  $T$  es una función aditiva, que indicaremos con  $\mu(T)$ , que tiene por derivada la densidad  $\varphi(P)$  del cuerpo considerado. Si esta densidad es una función continua en  $A$ , podrá escribirse, por definición de integral:

$$\mu(T) = \int_T \varphi(P) dT \quad (1)$$

La misma fórmula vale para la masa de una lámina plana o de una barra rectilínea, entendiéndose en esos casos que  $\varphi(P)$  sea la densidad superficial o la densidad lineal, respectivamente.

2º) Baricentros. Pongámonos en las mismas condiciones que recién. Cada porción  $T$  de  $A$  tendrá un cierto baricentro  $G$ , cuyas coordenadas indicaremos con  $\xi, \eta, \zeta$ . Cada una de estas coordenadas puede considerarse como una función del dominio  $T$ ; tratemos de obtener su expresión refiriéndonos, por ejemplo, a la  $\xi$ .

Nos apoyaremos únicamente sobre esta propiedad del baricentro: si se descompone  $T$  en dos partes  $T_1, T_2$  que tengan por baricentros los puntos  $G_1, G_2$  con las abscisas respectivas  $\xi_1, \xi_2$ , la abscisa  $\xi$  de  $G$  resulta vinculada a las  $\xi_1, \xi_2$  por la fórmula

$$\xi = \frac{\mu(T_1) \xi_1 + \mu(T_2) \xi_2}{\mu(T_1) + \mu(T_2)},$$

la que, teniendo en cuenta que  $\mu(T_1) + \mu(T_2) = \mu(T)$ , puede también escribirse  $\mu(T) \cdot \xi = \mu(T_1) \cdot \xi_1 + \mu(T_2) \cdot \xi_2$  lo que expresa que  $\mu(T) \cdot \xi$  es una función aditiva de  $T$ .

La derivada de tal función en un punto  $P(x, y, z)$  de  $A$  está dada por

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mu(T) \cdot \xi}{\text{volumen } T} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mu(T)}{\text{volumen } T} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \xi,$$

donde  $\delta$  es el diámetro del dominio  $T$  (que contiene al punto  $P$ ). El primer límite es igual a la densidad  $\varphi(x, y, z)$  y el segundo es, evidentemente, la abscisa  $x$  del punto  $P$ , por lo que concluimos que la derivada buscada vale  $x \cdot \varphi(x, y, z)$ . Suponiendo que la densidad  $\varphi(x, y, z)$  sea una función continua,



podrá escribirse

$$\mu(T) \cdot \xi = \iiint_T x \cdot \varphi(x, y, z) dx dy dz ;$$

llegamos así a que las coordenadas del baricentro, teniendo en cuenta la (1) están dadas por las fórmulas

$$\xi = \frac{\iiint_T x \cdot \varphi(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_T \varphi(x, y, z) dx dy dz} \quad \eta = \frac{\iiint_T y \cdot \varphi(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_T \varphi(x, y, z) dx dy dz} ,$$

$$\zeta = \frac{\iiint_T z \cdot \varphi(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_T \varphi(x, y, z) dx dy dz}$$

donde el denominador no es sino la masa de  $T$ . Si el cuerpo considerado es homogéneo, es decir, si la  $\varphi(x, y, z) = \text{constante}$ , las fórmulas precedentes se transforman en las

$$\xi = \frac{\iiint_T x dx dy dz}{\iiint_T dx dy dz} , \quad \eta = \frac{\iiint_T y dx dy dz}{\iiint_T dx dy dz} ,$$

$$\zeta = \frac{\iiint_T z dx dy dz}{\iiint_T dx dy dz} ,$$

donde el denominador representa el volumen de  $T$ .

Fórmulas análogas (con integrales dobles o simples,) valen para las coordenadas del baricentro de una lámina plana o de una barra rectilínea.

No profundizaremos más el estudio de los baricentros, indicando para eso el curso de Mecánica Racional.

3º) Momentos de inercia. Siempre en las condiciones indicadas al comienzo, el momento de inercia de la porción  $T$  del cuerpo  $A$  con respecto a un eje (o a un plano, o a un punto) es una función aditiva de  $T$  que indicaremos con  $J(T)$ . Indicaremos con  $\varphi(x, y, z)$  la distancia de un punto  $P(x, y, z)$  genérico de  $T$  al eje (o al plano, o a un punto) considerado; con  $r$  y  $R$  al mínimo y al máximo valor, respectivamente, asumidos por  $\varphi(x, y, z)$ , al variar de  $P$  en  $T$ . Si toda la masa de  $T$  estuviera concentrada en un punto situado a distancia  $r$  (o  $R$ ) del eje, tal masa tendría un momento de inercia  $\mu(T)r^2$  (o  $\mu(T)R^2$ ) no superior (o no inferior) al momento de inercia  $J(T)$ . Es decir



$$\mu(T) r^2 \leq J(T) \leq \mu(T) R^2,$$

y dividiendo por volumen  $T$

$$\frac{\mu(T)}{\text{volumen } T} r^2 \leq \frac{J(T)}{\text{volumen } T} \leq \frac{\mu(T)}{\text{volumen } T} R^2.$$

Pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$ , el cociente  $\frac{\mu(T)}{\text{volumen } T}$  tiende a la densidad  $\varphi(x, y, z)$ , mientras que  $r$  y  $R$  tienden, evidentemente, a  $\varrho(x, y, z)$ , lo que permite afirmar que  $J(T)$  es una función aditiva de dominio que tiene por derivada a  $\varphi(x, y, z) \varrho^2(x, y, z)$ ; entonces

$$J(T) = \iiint_T \varphi(x, y, z) \varrho^2(x, y, z) dx dy dz. \quad (3)$$

Fórmulas análogas (con una integral doble o simple) valen para el momento de inercia de una lámina plana (respecto de un eje o de un punto de su plano) o de una barra rectilínea (respecto de un punto de la recta a la que pertenece).

En las Ciencias aplicadas las consideraciones que acabamos de desarrollar son, en general, expresadas en forma mucho más abreviada. Por ejemplo, la (3) es justificada del siguiente modo: considerando un punto genérico  $(x, y, z)$  de  $T$  y un elemento de volumen  $dx dy dz$  que lo contenga, este elemento puede imaginarse como un punto material de masa  $\varphi(x, y, z) dx dy dz$ , ubicado a una distancia  $\varrho(x, y, z)$  del eje, dotado, por lo tanto, del momento de inercia  $\varphi(x, y, z) dx dy dz \cdot \varrho^2(x, y, z)$ . El momento de inercia de  $T$  es la suma de todos estos momentos de inercia elementales, siguiendo la (3).

#### 4 - INTEGRALES DE FUNCIONES COMPLEJAS.

En este capítulo se ha hablado, hasta ahora, exclusivamente de funciones  $f(P)$  reales, de  $r$  variables reales  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , para las cuales ha sido introducido el concepto de integral.

Tal como ya ha sido hecho en el caso de las funciones de una variable (cfr. Cap. XIX, nº 1), el concepto de integral puede inmediatamente extenderse al caso de funciones complejas de  $r$  variables reales. Si  $f(P) = \varphi(P) + i \psi(P)$  es



una de tales funciones, continua en un dominio acotado y medible  $T$  del espacio  $S_r$ , pondremos, por definición

$$\int_T f(P) dT = \int_T \varphi(P) dT + i \int_T \psi(P) dT \quad (1)$$

Con la notación de costumbre se tendrá, entonces

$$\begin{aligned} \int_T f(P) dT &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \varphi(P_k) \text{ med } T_k + i \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \psi(P_k) \text{ med } T_k = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [\varphi(P_k) + i \psi(P_k)] \text{ med } T_k = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \text{ med } T_k, \end{aligned}$$

es decir, una fórmula idéntica a la (2) del n° 1.

Es evidente que de las distintas propiedades de la integral expuestas en el n° 1, continúan valiendo el teor. V (de la aditividad) y VI (de la distributividad); no los otros que implican relaciones de desigualdad.

Permanece válido, sin embargo, si bien limitándose a la primera afirmación, el teor. IX, es decir, será

$$\left| \int_T f(P) dT \right| \leq \int_T |f(P)| dT \quad (2)$$

entendiendo que las barras verticales indican el módulo del número complejo que encierran. La (2) se demuestra mediante un razonamiento similar al ya expuesto, para funciones de una variable, en el Cap. XIX, n° 1.

De la (1) surge que podemos continuar refiriéndonos exclusivamente a funciones reales, y así haremos en los n°s sucesivos.

## 5 - FORMULAS DE REDUCCION PARA INTEGRALES DOBLES.

Para el cálculo efectivo de las integrales dobles, triples, etc. de funciones reales disponemos, hasta aquí, solamente de la (2) y del teor. I del n° 1; por otra parte hemos ya advertido en el mismo n° 1 que para tales integrales no existe un método análogo al que, para las integrales simples, surge cuando se conoce la integral indefinida de la función a integrar. En los casos más comunes el cálculo de una integral doble, triple, etc. puede intentarse mediante la aplicación de ciertas



fórmulas de reducción que expondremos en este n<sup>o</sup> y en el sucesivo. Bajo ciertas hipótesis, estas fórmulas reducen el cálculo de una integral doble al de dos integrales simples, y el cálculo de una integral triple, al de una doble y una simple o al de tres simples.

Comenzando con el caso de las integrales dobles, se tiene el teorema fundamental siguiente:

I - Sea  $A$  un dominio normal respecto del eje  $x$ , que tiene por base el intervalo  $[a, b]$  de dicho eje, relativo a las dos funciones continuas  $y = \alpha(x)$ ,  $y = \beta(x)$  [véase Cap. XX n<sup>o</sup> 5]. Vale, para la integral doble  $\iint_A f(x, y) dx dy$  de una función  $f(x, y)$  continua en  $A$ , la siguiente fórmula de reducción (\*)

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy. \quad (1)$$

Si  $A$  es un dominio normal respecto del eje  $y$ , con base el intervalo  $[c, d]$  de tal eje, relativo a las dos funciones continuas  $x = \gamma(y)$ ,  $x = \delta(y)$ , se tendrá análogamente

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx. \quad (2)$$

Dem. Tomamos, por ejemplo, la (1). Consideremos la familia infinitesimal

$\phi'$  de todos los dominios  $T [x_1 \leq x \leq x_2, \lambda_1(x) \leq y \leq \lambda_2(x)]$  norma-

(\*) Para valuar la expresión escrita en el segundo miembro de (1), se debe primeramente calcular la integral  $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$  (con lo que se obtiene una cierta función  $\varphi(x)$ ) y sucesivamente la otra integral  $\int_a^b \varphi(x) dx$ . Con mayor propiedad, el segundo miembro de (1) debería escribirse

$$\int_a^b \left[ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

pero la costumbre es escribirlo del modo indicado.

Para el caso  $f(x, y) \equiv 1$ , la (1) se transforma en área  $A = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy$ , o sea, área  $A = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)] dx$ , coincidente con el teor. II del Cap. XX, n<sup>o</sup> 5.



les respecto del eje  $x$ , y contenidos<sup>(\*)</sup> en  $A$ .

En correspondencia a cada uno de tales dominios queda perfectamente definido el número

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dy \quad (3)$$

ya que, por las hipótesis de continuidad de las funciones  $f(x, y)$ ,  $\lambda_1(x)$  y  $\lambda_2(x)$ , la integral  $\int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dy$  resulta una función continua de  $x$  en  $(x_1, x_2)$  (Cap. XIX, n° 5), teniendo entonces sentido integrar dicha función en  $[x_1, x_2]$ .

La expresión (3) proporciona, entonces, una función de dominio  $F(T)$ , definida en la familia  $\Phi'$ . Poniendo

$$F(T) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dy, \quad (4)$$

hagamos ver que esta función es aditiva.

Con ese objeto observemos que el dominio  $T$  puede descomponerse en dos dominios  $T_1, T_2$  de la familia  $\Phi'$ , de dos modos diferentes. Un primer modo consiste en descomponer el intervalo base  $[x_1, x_2]$  en dos intervalos parciales  $[x_1, \xi]$ ,  $[\xi, x_2]$ , dejando inalteradas las funciones  $\lambda_1(x)$ ,  $\lambda_2(x)$ , de modo que  $T$  resulte descompuesto en los dos dominios

$$T_1[x_1 \leq x \leq \xi, \lambda_1(x) \leq y \leq \lambda_2(x)], \quad T_2[\xi \leq x \leq x_2, \lambda_1(x) \leq y \leq \lambda_2(x)] \quad (5)$$

Un segundo modo consiste en no alterar el intervalo base  $[x_1, x_2]$ , pero elegir una función continua  $\lambda(x)$  tal que en todos los puntos interiores de  $[x_1, x_2]$  resulte  $\lambda_1(x) < \lambda(x) < \lambda_2(x)$ , lográndose así la descomposición de  $T$  en los dos dominios

$$T_1[x_1 \leq x \leq x_2, \lambda_1(x) \leq y \leq \lambda(x)], \quad T_2[x_1 \leq x \leq x_2, \lambda(x) \leq y \leq \lambda_2(x)] \quad (6)$$

En el caso (5) se tiene

$$F(T_1) + F(T_2) = \int_{x_1}^{\xi} dx \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dy + \int_{\xi}^{x_2} dx \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dy = F(T);$$

en el caso (6) se tiene

-----

(\*) A tal familia  $\Phi'$  pertenece también  $A$ .



$$\begin{aligned}
 F(T_1) + F(T_2) &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda(x)} f(x, y) dy + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\lambda(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dy = \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda(x)} f(x, y) dy + \int_{\lambda(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dy \right] = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dy = F(T),
 \end{aligned}$$

y esto prueba que  $F(T)$  es aditiva.

Demostremos ahora que la  $F(T)$  verifica la propiedad de la media respecto de la función  $f(x, y)$ .

Como para cada  $x \in [x_1, x_2]$ , vale

$$m \left[ \lambda_2(x) - \lambda_1(x) \right] \leq \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dy \leq M \left[ \lambda_2(x) - \lambda_1(x) \right]$$

(donde con  $m$  y  $M$  hemos indicado al mínimo y al máximo respectivamente, de la  $f(x, y)$  en  $T$ ); integrando con respecto a la  $x$  y teniendo en cuenta la (4), será

$$m \int_{x_1}^{x_2} [\lambda_2(x) - \lambda_1(x)] dx \leq F(T) \leq M \int_{x_1}^{x_2} [\lambda_2(x) - \lambda_1(x)] dx ;$$

vale decir (cfr. Cap. XX, n° 5, teor. II),

$$m. \text{ área } T \leq F(T) \leq M. \text{ área } T ,$$

lo que prueba lo antes afirmado.

Tras esto, la  $F(T)$  siendo aditiva y verificando la propiedad de la media respecto de la función continua  $f(x, y)$ , debe necesariamente coincidir (teor. X del n° 1) con la integral  $\iint_T f(x, y) dx dy$ , y entonces resultará, recordando la (4)

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} f(x, y) dx dy . \quad (7)$$

Esta relación vale, cualquiera sea el dominio  $T$  de la familia  $\Phi'$ ; aplicándola en particular al dominio  $A$  se obtiene la (1), con lo que nuestro teorema queda demostrado

Si el dominio  $A$  es normal tanto respecto del eje  $x$  como respecto del eje  $y$  valen tanto la (1) como la (2), llegándose a la relación

$$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx ,$$

llamada de inversión del orden de la integración. Por ejemplo, si



A es un rectángulo  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , la (7) proporciona

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx ;$$

si A es el triángulo limitado por las rectas  $y = a$ ,  $x = b$ ,  $x - y = 0$  (con  $b > a$ ), de la (7) sigue

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx .$$

Si el dominio A no es un dominio normal, sucede casi siempre en las aplicaciones que puede ser descompuesto en un número finito de dominios normales  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ; ; en ese caso, el cálculo de la integral  $\iint_A f(x, y) dx dy$  puede realizarse tras escribir

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{A_1} f(x, y) dx dy + \iint_{A_2} f(x, y) dx dy + \dots + \iint_{A_n} f(x, y) dx dy ,$$

aplicando en cada una de las integrales del segundo miembro el teor. I .

Otro método de cálculo de las integrales dobles será expuesto en el sucesivo Cap. XXIII .

Demos, a continuación, dos ejemplos de aplicación de lo recién dicho.

1º) Calcular el volumen del sólido comprendido entre dos cilindros circulares, de igual radio, cuyos ejes se encuentran según un ángulo recto (ver fig. 20) .

Tomando tales ejes como los ejes coordenados  $y, z$  y designando con  $r$  al radio, las ecuaciones de los dos cilindros resultan ser  $x^2 + z^2 = r^2$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$ . El volumen  $V$  buscado será igual a 8 veces el del cilindroide relativo a la función  $z = \sqrt{r^2 - x^2}$ , que tiene por base el dominio A, normal al eje  $x$ , definido por  $0 \leq x \leq r$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$ .

Entonces, por el teor. II del nº 2, será

$$V = 8 \iint_A \sqrt{r^2 - x^2} dx dy ;$$

utilizando la (1) :



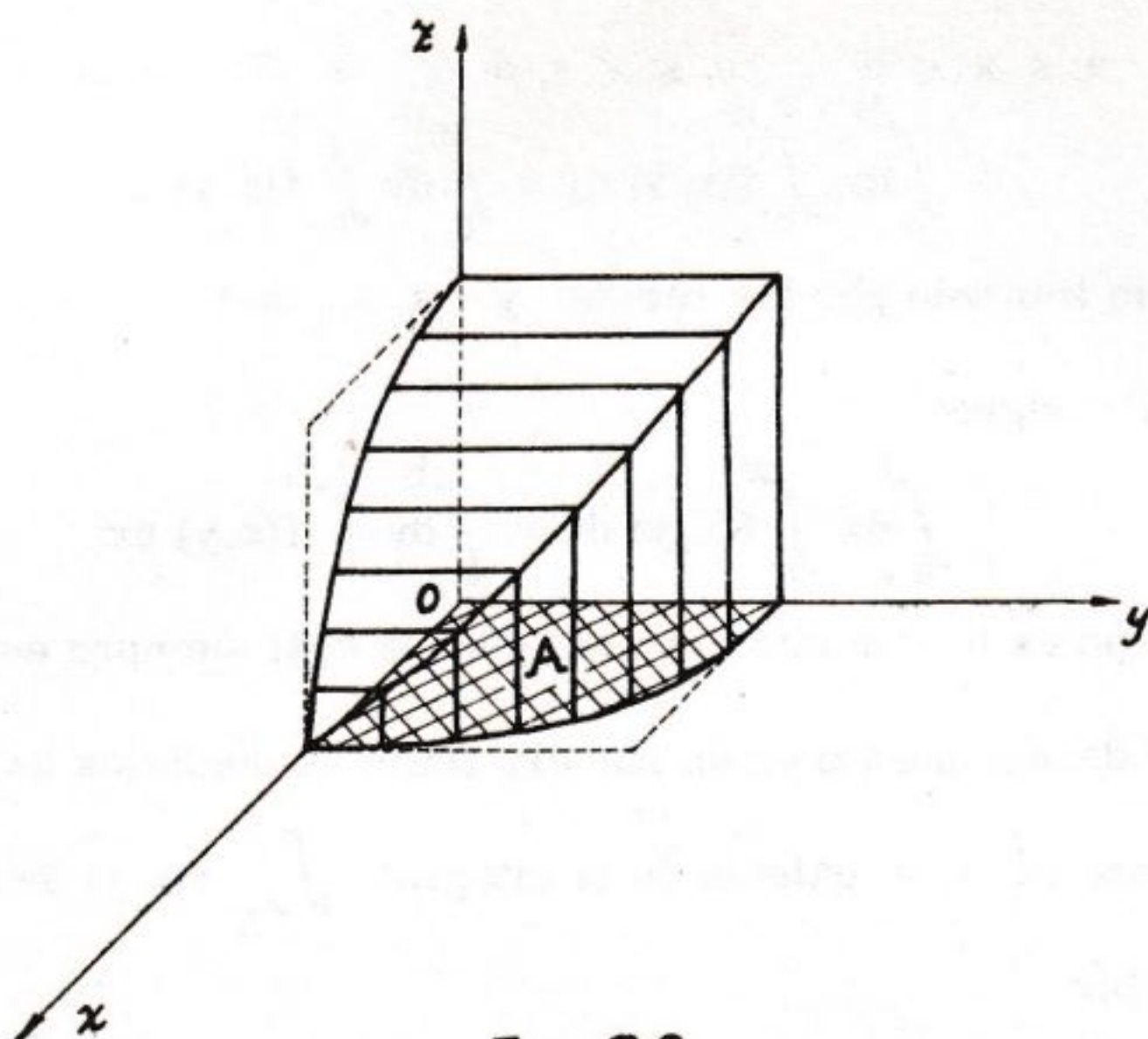


Fig. 20

$$V = 8 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = 8 \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 8 \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{16}{3} \pi r^3 .$$

2<sup>o</sup>) Calcular el momento de inercia de un segmento parabólico respecto de su eje de simetría.

Sea A el segmento parabólico considerado (véase fig. 21) simétrico respecto del eje x, limitado por la parábola  $y^2 = 2px$  y por la recta  $x = h$  ( $h > 0$ ,  $p > 0$ ).

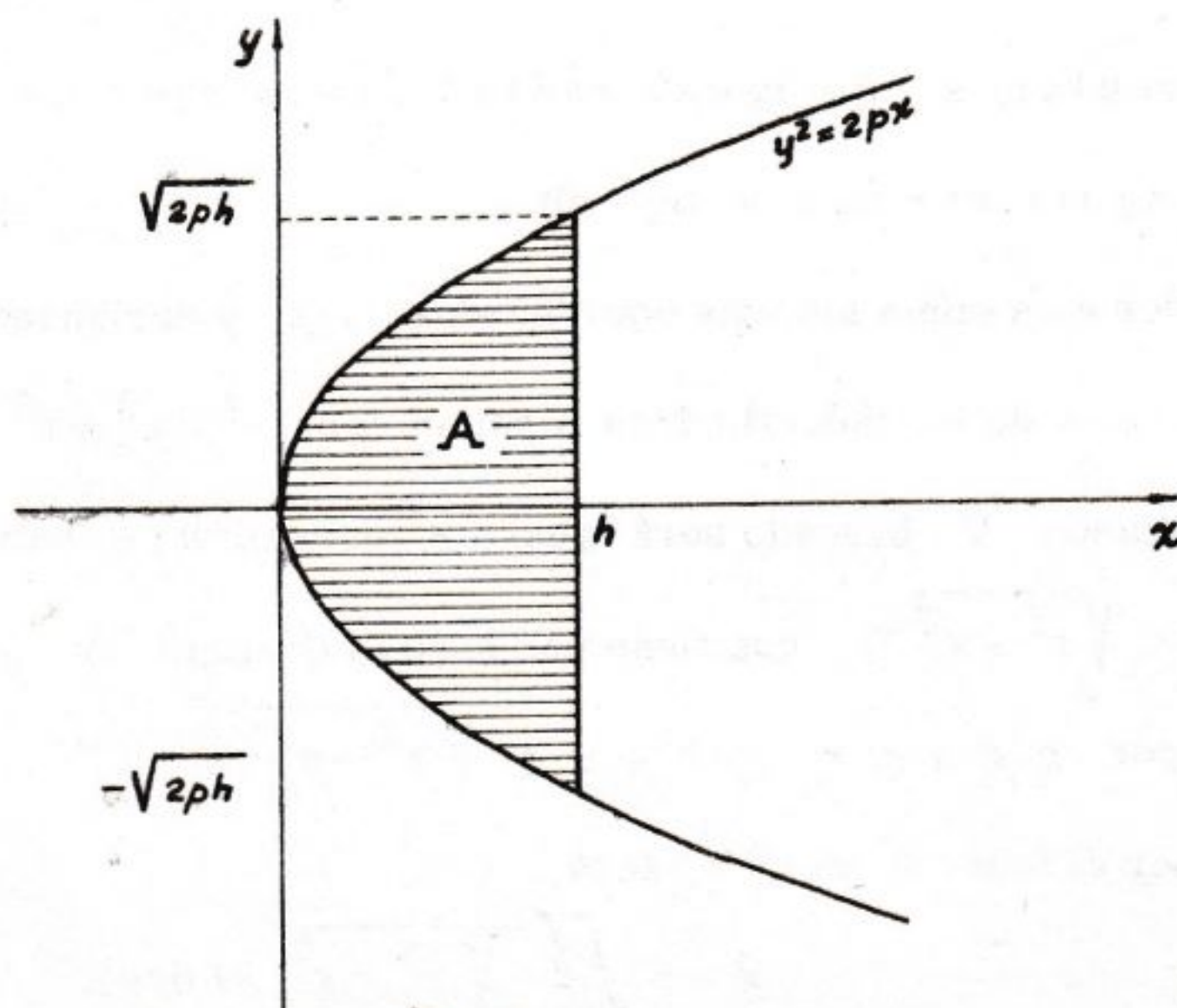


Fig. 21



Imaginando a  $A$  como una lámina plana homogénea (y poniendo la densidad superficial igual a 1), tendremos para el momento de inercia buscado la siguiente expresión:

$$J = \iint_A y^2 dx dy ;$$

aplicando la (2)

$$J = \int_{-\sqrt{2ph}}^{\sqrt{2ph}} y^2 dy \int_{y^2/2p}^h dx = \int_{-\sqrt{2ph}}^{\sqrt{2ph}} y^2 \left( h - \frac{y^2}{2p} \right) dy = \left[ \frac{hy^3}{3} - \frac{y^5}{10p} \right]_{-\sqrt{2ph}}^{\sqrt{2ph}} = \frac{8}{15} ph^2 \sqrt{2ph}.$$

## 6 - FORMULAS DE REDUCCION PARA LAS INTEGRALES TRIPLES.

Para las integrales triples vale un teorema análogo al teor. I del n° precedente:

I - Sea  $A$  un dominio normal con respecto al plano  $xy$ , que tiene por base al dominio acotado y medible  $B$  del plano  $xy$  y relativo a las dos funciones continuas  $z = \alpha(x, y)$ ,  $z = \beta(x, y)$ , (véase n° 2); para la integral triple  $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$  de una función  $f(x, y, z)$  continua en  $A$ , vale la siguiente fórmula de reducción

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_B dx dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz . \quad (1)$$

Formulas análogas valen para los dominios normales respecto del plano  $xz$  o del plano  $yz$ .

Dè m. La demostración es similar a la del teor. I del n° precedente, Consideremos la familia infinitesimal  $\Phi'$  de todos los dominios  $T$   $[(x, y) \in U$ ,

$\lambda_1(x, y) \leq z \leq \lambda_2(x, y)]$  normales respecto del plano  $xy$ , contenidos en  $A$ .

En correspondencia con cada  $T$  queda bien determinado el número

$$F(T) = \iint_U dx dy \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} f(x, y, z) dz .$$

Esta función de dominio, definida en  $\Phi$ , resulta aditiva puesto que, si



se descompone  $T$  en dos dominios  $T_1, T_2$ , ambos relativos a las mismas funciones  $\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y)$  y con base dos dominios planos  $U_1, U_2$  que descomponen a  $U$ , se tendrá

$$\begin{aligned} F(T_1) + F(T_2) &= \int \int_{U_1} dx dy \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} f(x, y, z) dz + \int \int_{U_2} dx dy \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \int \int_U dx dy \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} f(x, y, z) dz = F(T) \quad ; \end{aligned}$$

mientras que si  $T_1, T_2$  tienen la misma base  $U$  pero son relativos a las funciones  $\lambda_1(x, y), \lambda(x, y)$ , y  $\lambda(x, y), \lambda_2(x, y)$ , respectivamente  $\int$  donde  $\lambda(x, y)$  es cualquier función continua tal de resultar  $\lambda_1(x, y) < \lambda(x, y) < \lambda_2(x, y)$  en los puntos interiores de  $U$ , tendremos

$$\begin{aligned} F(T_1) + F(T_2) &= \int \int_U dx dy \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda(x, y)} f(x, y, z) dz + \int \int_U dx dy \int_{\lambda(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \int \int_U dx dy \left( \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda(x, y)} f(x, y, z) dz + \int_{\lambda(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) = \\ &= \int \int_U dx dy \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} f(x, y, z) dz = F(T) . \end{aligned}$$

Además la  $F(T)$  verifica la propiedad de la media respecto de la función  $f(x, y, z)$ .

En efecto; llamando con  $m$  y  $M$  al mínimo y al máximo de  $f(x, y, z)$  en  $T$ , para todo punto  $(x, y)$  de  $U$  resulta

$$m [\lambda_2(x, y) - \lambda_1(x, y)] \leq \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} f(x, y, z) dz \leq M [\lambda_2(x, y) - \lambda_1(x, y)]$$

y entonces

$$m \iint_U [\lambda_2(x, y) - \lambda_1(x, y)] dx dy \leq F(T) \leq M \iint_U [\lambda_2(x, y) - \lambda_1(x, y)] dx dy,$$

vale decir, por el teor. III del n° 2:



$$m \cdot \text{Volumen } T \leq F(T) \leq M \cdot \text{Volumen } T.$$

Tras esto, por el teor. X del n<sup>o</sup> 1, la  $F(T)$  debe necesariamente coincidir con la integral

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz ;$$

sigue, por tanto, para todo  $T$

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_U dx \, dy \int_{\lambda_1(x, y)}^{\lambda_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz ,$$

y, en particular la (1), cuando  $T \equiv A$  que implica  $U \equiv B$ .

La (1) traslada el cálculo de una integral triple a una integración simple seguida de una doble.

Si el dominio  $A$  es simultáneamente normal respecto de dos planos coordenados, o inclusive respecto de los tres, surgen varias fórmulas de inversión en el orden de las integraciones, análogas a la (7) del n<sup>o</sup> precedente, que dejamos al lector examinarlas.

Supongamos ahora que el dominio  $A$ , normal respecto de uno de los planos coordenados goce de la propiedad de tener por base  $B$  también un dominio normal (respecto de uno de los ejes del plano al que pertenece); en tal caso es fácil reconocer que el cálculo de la referida integral triple  $\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  puede reducirse al de tres integrales simples sucesivas. Supongamos para eso, por ejemplo, que  $A$  sea normal con respecto al plano  $xy$ :

$$A \left[ (x, y) \in B, \quad \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \right],$$

y que su base  $A$  sea normal respecto del eje  $x$ :

$$B \left[ a \leq x \leq b, \quad \gamma(x) \leq y \leq \delta(x) \right].$$

Vale entonces la (1), donde en la integral doble extendida al dominio  $B$  pue



de aplicársele el teor. I del n<sup>o</sup> precedente . Se llega así a la siguiente fórmula de reducción

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) \, dz, \quad (2)$$

que es, precisamente, de la forma deseada.

Demos un ejemplo de aplicación de la (2) calculando el momento de inercia  $J$  respecto del origen  $O$ , del tetraedro  $A$  limitado por los tres planos coordenados y el plano  $x + y + z = a$ , ( $a > 0$ ), suponiendo  $A$  como un cuerpo homogéneo, de densidad 1. Se tendrá

$$J = \iiint_A (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

y como  $A$  es un dominio normal respecto del plano  $xy$  relativo a las dos funciones  $z = 0$ ,  $z = a - x - y$ , que tiene por base el triángulo  $B$  definido por  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a - x$ , se obtiene para la (2):

$$\begin{aligned} J &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} \left[ (x^2 + y^2)(a - x - y) + \frac{1}{3} (a - x - y)^3 \right] dy = \\ &= \int_0^a \left[ \frac{1}{2} x^2 (a - x)^2 + \frac{1}{6} (a - x)^4 \right] dx = \frac{a^5}{20}. \end{aligned}$$

Observemos también que, supuestas satisfechas las condiciones de validez de la (2), fijado arbitrariamente un punto  $\bar{x}$  del intervalo  $(a, b)$ , la sección del dominio  $A$  con un plano perpendicular al eje  $x$  en  $\bar{x}$  resulta ser un dominio plano  $C_{\bar{x}}$  normal respecto del eje  $y$ , con base el intervalo  $[\gamma(\bar{x}), \delta(\bar{x})]$  y relativo a las dos funciones  $z = \alpha(\bar{x}, y)$ ,  $z = \beta(\bar{x}, y)$ . Por el teor. I del n<sup>o</sup> precedente se tendrá, entonces,

$$\int_{\gamma(\bar{x})}^{\delta(\bar{x})} dy \int_{\alpha(\bar{x}, y)}^{\beta(\bar{x}, y)} f(\bar{x}, y, z) \, dz = \iint_{C_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y, z) \, dy \, dz;$$



entonces, escribiendo  $x$  en lugar de  $\bar{x}$ , se ve que la (2) puede también escribirse

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{C_x} f(x, y, z) dy dz \quad (3)$$

Mediante esta fórmula una integral triple se transforma en una integración doble seguida por una simple

---

El cálculo de una integral triple extendida sobre un dominio no normal, pero posible de ser descompuesto en un número finito de dominios normales, puede realizarse aplicando a las integrales extendidas sobre cada uno de estos distintos dominios parciales una de las precedentes fórmulas de reducción (1), (2), (3).

En el Cap. XXIV señalaremos otro método de cálculo para las integrales triples.

## 7 - CAMBIO DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS EN POLARES, EN LAS INTEGRALES DOBLES.

En el Cap. IX, n<sup>o</sup> 11 habíamos visto, para las integrales simples, la regla de integración definida por sustitución, mediante la cual se precisa la ley de transformación de la integral  $\int_a^b f(x) dx$  cuando se efectúa un cambio  $x = \varphi(t)$  de la variable de integración. Entre otras cosas, se puso en evidencia que el  $dx$  se transforma en  $\varphi'(t) dt$ , es decir, como un diferencial efectivo.

Nos ocuparemos ahora de la cuestión análoga para una integral múltiple

$$\int_T f(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_1, dx_2 \dots dx_r, \quad (r \geq 2), \quad (1)$$

analizando su transformación cuando se efectúa un cambio de las  $r$  variables

$x_1, x_2, \dots, x_r$  en otras  $r$  variables  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , mediante fórmulas del tipo



$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_r) \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_r) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ x_r = \varphi_r(u_1, u_2, \dots, u_r) \end{array} \right.$$

No podemos tratar aquí por completo esta difícil cuestión; daremos solamente una breve idea en el n<sup>o</sup> 9, tras haber examinado en este n<sup>o</sup> y en el sucesivo algunos casos particulares notables. Advirtamos, sin embargo desde ya, que para la integral múltiple (1) no subsiste la propiedad de que los símbolos  $dx_1, dx_2, \dots, dx_r$  se transformen como los diferenciales, sino que veremos que el elemento de medida  $dx_1, dx_2, \dots, dx_r$  debe transformarse en bloque de modo oportuno.

---

Comencemos estudiando el caso particular de la transformación de una integral doble

$$\iint_A f(x, y) dx dy \quad (3)$$

cuando se sustituyen las coordenadas cartesianas  $x, y$  por las coordenadas polares  $\rho, \varphi$  (con el polo en el origen  $O$  y eje polar coincidente con el eje  $x$ ) mediante las conocidas fórmulas

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (4)$$

Resulta evidente, por el momento, que la  $f(x, y)$  se transforma en una función  $f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  de las dos variables  $\rho, \varphi$ . Es oportuno considerar entonces a  $\rho, \varphi$  (además, naturalmente, que como coordenadas polares en el plano  $xy$ ) como coordenadas cartesianas en otro plano auxiliar  $\rho \varphi$ .

A cada punto  $Q(\rho, \varphi)$  de este plano  $\rho \varphi$  (con  $\rho \geq 0$ ) las (4) le hacen corresponder un punto bien determinado  $P(x, y)$  del plano  $xy$ . Si el pun-



to  $Q$  describe en el plano  $\varrho, \varphi$  un intervalo  $R[a \leq \varrho \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta]$ , con  $0 \leq a < b$ ,  $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ , el correspondiente punto  $P(x, y)$  describirá en el plano  $xy$  un sector  $S$  de corona circular (o de círculo, si  $a=0$ ) de radios  $a, b$  y ángulo central  $\beta - \alpha$ . Como sabemos, será

$$\text{área } S = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) (\beta - \alpha); \quad (5)$$

pero es útil observar que tal área puede también expresarse así:

$$\text{área } S = \iint_R \varrho \, d\varrho \, d\varphi. \quad (6)$$

En efecto; aplicando en (6) la fórmula de reducción (1) del n<sup>o</sup> 5, la integral doble aquí escrita resulta igual a

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_a^b \varrho \, d\varrho = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \left[ \frac{\varrho^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) (\beta - \alpha).$$

Supongamos ahora que el punto  $Q(\varrho, \varphi)$  describa en el plano  $\varrho, \varphi$  un dominio acotado  $B$  contenido en un intervalo  $R$  del tipo antedicho; entonces el correspondiente punto  $P(x, y)$  describirá en el plano  $xy$  un dominio acotado  $A$  contenido en el sector  $S$  que corresponde a  $R$ .

Demostraremos el lema siguiente, que extiende la fórmula (6):

I - En las hipótesis hechas, si el dominio  $B$  del plano  $\varrho, \varphi$  es medible, también será medible el correspondiente dominio  $A$  del plano  $xy$ , y se tendrá:

$$\text{área } A = \iint_B \varrho \, d\varrho \, d\varphi. \quad (7)$$

Dem. Efectuada en el rectángulo  $R$  una descomposición coordenada  $\mathcal{D}$ , de norma  $\delta$ , indicaremos con  $R'_1, R'_2, \dots, R'_m$  los rectángulos de  $\mathcal{D}$  que están constituidos por puntos interiores de  $B$ , y con  $R_1^*, R_2^*, \dots, R_n^*$  los que tienen puntos comunes con  $\mathcal{F}B$ . Designemos después con  $S'_1, S'_2, \dots, S'_m$  a los sectores del plano  $xy$  que corresponden a  $R'_1, R'_2, \dots, R'_m$  y con  $S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*$  los que corresponden a  $R_1^*, R_2^*, \dots, R_n^*$ .



Es fácil persuadirse de que la frontera de  $A$  está contenida en la unión de los sectores  $S_k^*$  y entonces, por la (6), se tendrá

$$\text{área}_e \mathcal{F} A \leq \sum_{k=1}^n \iint_{R_k^*} \varphi d\varphi d\psi.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que todo punto de  $R$  verifica  $\varphi \leq b$ , resulta

$$\iint_{R_k^*} \varphi d\varphi d\psi \leq b \text{área } R_k^*, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

y en consecuencia,  $\text{área}_e \mathcal{F} A \leq b \sum_{k=1}^n \text{área } R_k^*$ . Pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$ ,

se encuentra  $\text{área}_e \mathcal{F} A \leq b \text{área}_e \mathcal{F} B = 0$  (ya que  $B$  es medible); entonces  $\text{área}_e \mathcal{F} A = 0$ , con lo que queda demostrado que  $A$  es medible.

Para dar el valor del área, observemos que  $A$  contiene la unión de los sectores  $S_i'$  y está contenida en la unión de los  $S_i'$  y  $S_k^*$ ; por lo tanto, teniendo en cuenta (6) y (8):

$$\sum_{i=1}^m \iint_{R_i'} \varphi d\varphi d\psi \leq \text{área } A \leq \sum_{i=1}^m \iint_{R_i'} \varphi d\varphi d\psi + b \sum_{k=1}^n \text{área } R_k^*. \quad (9)$$

Si suponemos ahora al dominio  $B$  descompuesto en los rectángulos  $R_i'$  y en otro dominio medible  $B'$ , podremos también escribir

$$\sum_{i=1}^m \iint_{R_i'} \varphi d\varphi d\psi = \iint_B \varphi d\varphi d\psi - \iint_{B'} \varphi d\varphi d\psi, \quad (10)$$

donde  $0 \leq \iint_{B'} \varphi d\varphi d\psi \leq b \text{área } B' = b (\text{área } B - \sum_{i=1}^m \text{área } R_i')$ . Por otra parte,

como  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \text{área } R_i' = \text{área } B$ , se deduce  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{B'} \varphi d\varphi d\psi = 0$ , siguiendo

de la (10):

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \iint_{R_i'} \varphi d\varphi d\psi = \iint_B \varphi d\varphi d\psi.$$



Entonces, habiéndose ya visto que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \text{área } R_k^* = 0$ , pasando al límite

en (9) para  $\delta \rightarrow 0$ , resulta la (7) que es lo que queríamos demostrar (\*).

Podemos ahora dar el teorema relativo al cambio de las coordenadas cartesianas en polares para las integrales dobles:

II - Sea  $B$  un dominio acotado y medible del plano  $\varrho, \varphi$ , contenido en un rectángulo  $R$  ( $a \leq \varrho \leq b$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ), con  $0 \leq a < b$ ,  $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ , y sea  $A$  el dominio del plano  $xy$  descrito por el punto  $P(x = \varrho \cos \varphi, y = \varrho \sin \varphi)$  cuando el punto  $Q(\varrho, \varphi)$  varía en  $B$ . Si  $f(x, y)$  es una función continua en  $A$ , vale la fórmula

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \varrho d\varrho d\varphi. \quad (11)$$

Dem. Consideremos la familia infinitesimal  $\Psi$  de todos los dominios  $U$  acotados y medibles contenidos en  $B$ . Para cada  $U$  designemos con  $T$  al dominio, también acotado y medible (teor. I) que le corresponde en el plano  $xy$ ; cuando  $U$  varía en  $\Psi$ ,  $T$  describirá la familia infinitesimal  $\Phi$  de dominios acotados y medibles contenidos en  $A$ . Si  $U$  contiene un punto  $Q(\varrho, \varphi)$ ,  $T$  contiene el correspondiente punto  $P(x, y)$  y se ve inmediatamente que al tender a cero el diámetro  $\delta$  de  $U$ , tiende también a cero el diámetro  $\delta'$  de  $T$ .

La integral  $\iint_T f(x, y) dx dy$  puede considerarse como una función del dominio  $U$ , definida en la familia  $\Psi$ . Poniendo

(\*) Nótese que si  $B$  es un rectángulo  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $0 \leq \varrho \leq f(\varphi)$  del plano  $\varrho, \varphi$ , el correspondiente dominio  $A$  del plano  $xy$  resulta ser un sector plano (ver Cap. XX, n° 5). En dicho caso, aplicando a la integral doble que figura en (7) la fórmula de reducción del n° 5, se obtiene

$$\text{área } A = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} \varrho d\varrho = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \left[ \frac{\varrho^2}{2} \right]_0^{f(\varphi)} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi,$$

confirmando el teor. III del Cap. XX, n° 5.



$$F(U) = \iint_T f(x, y) \, dx \, dy \quad , \quad (12)$$

hagamos ver que esta función es aditiva. Si en el plano  $\varrho, \varphi$  se descompone  $U$  en dos dominios medibles  $U_1$  y  $U_2$ , es evidente que, llamando  $T_1$  y  $T_2$  a los dominios del plano  $xy$  que corresponden a  $U_1$  y  $U_2$ , el dominio  $T$  resulta descompuesto en  $T_1, T_2$ ; por lo tanto:

$$F(U_1) + F(U_2) = \iint_{T_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{T_2} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_T f(x, y) \, dx \, dy = F(U) \quad .$$

Vamos ahora a calcular la derivada de la  $F(U)$  en un punto  $Q$  de  $B$ . Estará dada por

$$\begin{aligned} F'(Q) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(U)}{\text{área } U} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{F(U)}{\text{área } T} \cdot \frac{\text{área } T}{\text{área } U} \right) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\iint_T f(x, y) \, dx \, dy}{\text{área } T} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\iint_U \varrho \, d\varrho \, d\varphi}{\text{área } U} \end{aligned}$$

donde, en el último paso, hemos tenido en cuenta la (12) y el teor. I. Por definición de integral, el primer límite vale  $f(x, y) = f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi)$  y el segundo vale  $\varrho$ , de modo que resultará  $F'(Q) = f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \cdot \varrho$ ; entonces, por el teor. X del n.º 1, será necesariamente

$$F(U) = \iint_U f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \varrho \, d\varrho \, d\varphi \quad . \quad (13)$$

De (12) y (13) sigue

$$\iint_T f(x, y) \, dx \, dy = \iint_U f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \varrho \, d\varrho \, d\varphi \quad ,$$

y poniendo  $U \equiv B$  (y por ende  $T \equiv A$ ), se obtiene la (11), que es lo que queríamos demostrar.

La (11) muestra entonces que para efectuar en una integral doble el cambio de las coordenadas cartesianas en coordenadas polares es necesario sustituir, no solamente  $x, y$  por  $\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi$  en la función que se integra, sino también al elemento de área  $dx \, dy$  por la expresión  $\varrho \, d\varrho \, d\varphi$ , y al dominio  $A$  del plano  $xy$  por



cualquier dominio  $B$  del plano  $\varphi$   $\varphi$  que tenga  $A$  por correspondiente.

La expresión  $\varphi d\varphi d\varphi$  suele llamarse elemento de área en coordenadas polares. De modo intuitivo se puede aceptar ese valor observando que dos circunferencias de centro  $O$ , con radios  $\varphi$  y  $\varphi + d\varphi$ , y dos semirectas que partiendo de  $O$  tengan anomalías  $\varphi$  y  $\varphi + d\varphi$ , limitan un sector de corona circular que, para  $d\varphi$  y  $d\varphi$  muy pequeños puede confundirse con un rectángulo de lados  $\varphi d\varphi$  y  $d\varphi$ , con área igual a  $\varphi d\varphi d\varphi$ .

Demos un ejemplo de aplicación de la (11) proponiéndonos encontrar el baricentro de un semicírculo (considerado como lámina plana homogénea). Si tal semicírculo  $A$  está limitado por la semicircunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $y \geq 0$  y por el eje  $x$ , el baricentro  $G$  estará sin duda ubicado sobre el eje  $y$ , por lo que bastará calcular la ordenada  $\eta$  que, según la fórmula vista en el n° 3, viene dada por

$$\eta = \frac{1}{\text{área } A} \iint_A y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi r^2} \iint_A y \, dx \, dy.$$

Aplicando la (11) tendremos

$$\eta = \frac{2}{\pi r^2} \iint_B \varphi^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\varphi$$

donde  $B$  es el rectángulo  $0 \leq \varphi \leq r$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Entonces

$$\eta = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^r \varphi^2 \, d\varphi = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}.$$

## 8 - CAMBIO DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS EN POLARES (O EN CILINDRICAS) EN LAS INTEGRALES TRIPLES.

Tomemos en consideración, para las integrales triples el problema análogo al estudiado en el n° precedente para las integrales dobles. Refiramos el espacio  $xyz$  a un sistema de coordenadas polares  $\varphi$  (radio vector),  $\theta$  (colatitud),  $\varphi$  (longitud), con polo en el origen  $O$ , eje polar coincidente con el eje  $z$  y semi



plano polar coincidente con el semiplano  $y = 0$ ,  $x > 0$  (cfr. con la última parte del Cap. X, n° 11). Recordemos que  $\rho > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  y que valen las fórmulas

$$x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (1)$$

Consideremos otro espacio auxiliar con los ejes cartesianos  $\rho, \theta, \varphi$  y a cada punto del mismo,  $Q(\rho, \theta, \varphi)$  (con  $\rho > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ) hagámosle corresponder aquel punto  $P$  del espacio  $xyz$  que tiene las coordenadas  $\rho, \theta, \varphi$ , o sea, las coordenadas cartesianas definidas por las (1). Entonces, con un estudio análogo al expuesto en el n° precedente, se llega a establecer el siguiente teorema relativo al cambio de las coordenadas cartesianas en polares en las integrales triples:

I - Sea  $B$  un dominio acotado y medible del espacio  $\rho, \theta, \varphi$ , contenido en un paralelepípedo  $R(a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, \gamma \leq \varphi \leq \delta)$ , con  $0 \leq a < b$ ,  $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ ,  $\gamma < \delta \leq \gamma + 2\pi$ , y sea  $A$  (que resultará medible y acotado) el dominio del espacio  $xyz$  descrito por el punto  $P(x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, z = \rho \cos \theta)$  al variar el punto  $Q(\rho, \theta, \varphi)$  en  $B$ . En estas condiciones, si  $f(x, y, z)$  es una función continua en  $A$ , valdrá la siguiente fórmula:

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \operatorname{sen} \theta d\rho d\theta d\varphi. \quad (2)$$

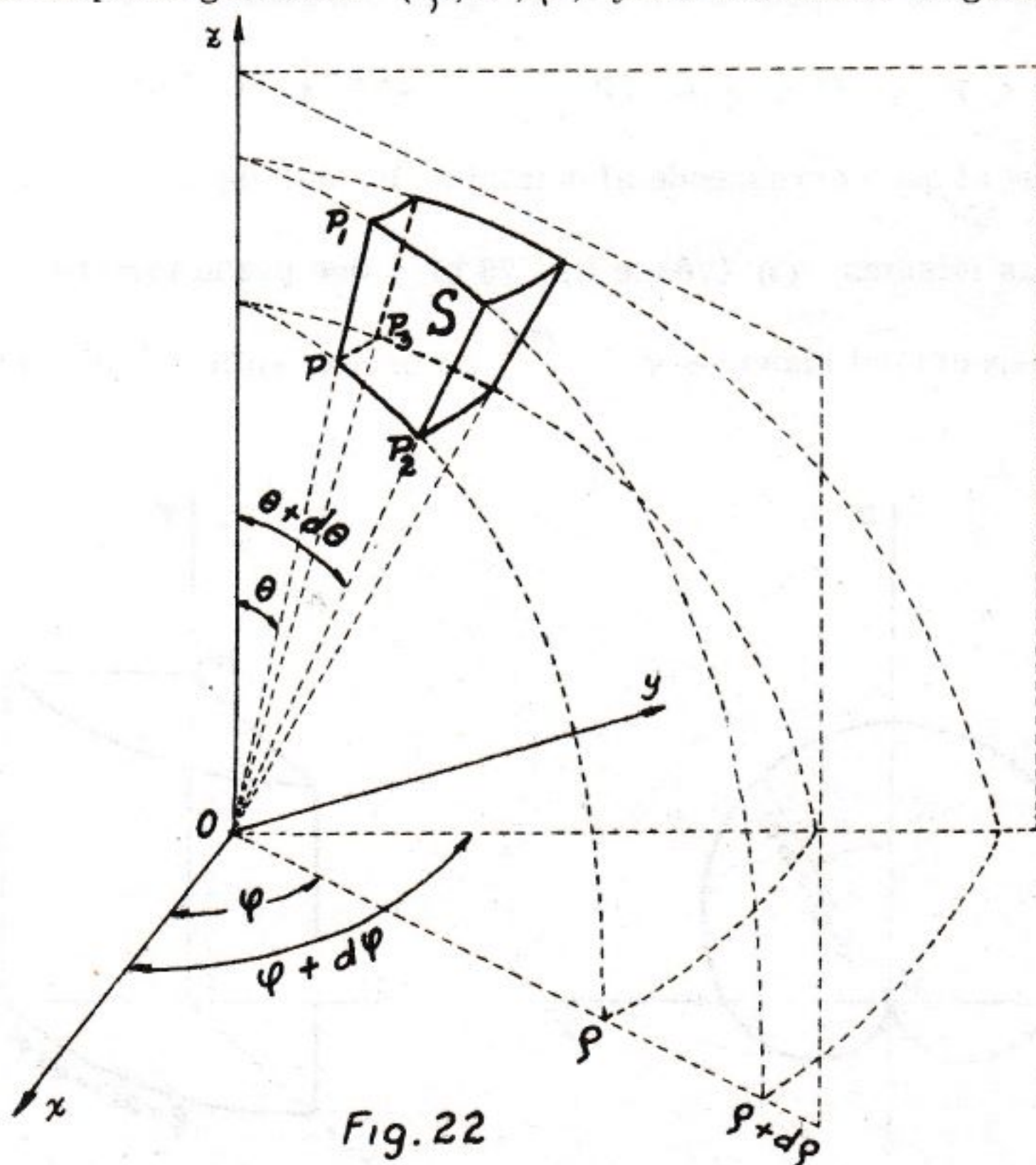
La (2) muestra que para efectuar en una integral triple el cambio de las coordenadas cartesianas por las coordenadas polares, es necesario no sólo sustituir  $x, y, z$  por  $\rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$ ,  $\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$ ,  $\rho \cos \theta$  respectivamente, sino también al elemento de volumen  $dx dy dz$  por la expresión  $\rho^2 \operatorname{sen} \theta d\rho d\theta d\varphi$  y al dominio  $A$  del espacio  $xyz$  por cualquier dominio  $B$  del espacio  $\rho, \theta, \varphi$



que tenga  $A$  por correspondiente.

No entraremos a exponer en detalle todas las consideraciones necesarias para de mostrar el teor. I ; nos limitaremos a dar una justificación intuitiva de la expresión  $\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$ , elemento de volumen en coordenadas polares.

En el espacio  $\rho \theta \varphi$ , el elemento de volumen  $d\rho d\theta d\varphi$  coincide con el volumen de un paralelepípedo con las aristas paralelas a los ejes coordenados, con un vértice en el punto genérico  $(\rho, \theta, \varphi)$  y las aristas de longitud  $d\rho, d\theta, d\varphi$ .



A este paralelepípedo le corresponde, en el espacio  $xyz$  un sólido  $S$  (véase fig. 22) limitado por dos esferas con centro en el origen y radios  $\rho$  y  $\rho + d\rho$ ; por dos conos circulares de vértice  $O$  y eje  $z$ , correspondientes a las colatitudes  $\theta$  y  $\theta + d\theta$  y por dos semiplanos correspondientes a las longitudes  $\varphi$  y  $\varphi + d\varphi$ . Si  $d\rho, d\theta$ , y  $d\varphi$  son suficientemente pequeños, puede confundirse  $S$  con un paralelepípedo cuyas aristas  $PP_1$ ,  $PP_2$  y  $PP_3$  tienen,



respectivamente, las longitudes  $d\rho$ ,  $\rho d\theta$  y  $\rho \sin \theta d\varphi$  y, por lo tanto, considerar al volumen  $S = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$ .

Demos un ejemplo de aplicación de la (2), calculando el volumen del sólido obtenido, haciendo rotar una cardioide (véase Cap. XX, n° 5) alrededor de su eje de simetría. Supuesta la cardioide en el plano  $xz$  como lo indica la fig. 23 a, el sólido  $A$  que se obtiene haciéndola rotar alrededor del eje  $z$  está caracterizado por el conjunto de los puntos del espacio para los cuales se cumple

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq a(1 + \cos \theta). \quad (3)$$

Tal sólido es el que corresponde al dominio  $B$  del espacio  $\rho \theta \varphi$  que está definido por las mismas (3) (véase fig. 23 b) y que puede tomarse como un dominio normal respecto del plano  $\theta \varphi$ . (\*) Entonces, aplicando la (2) y poste-

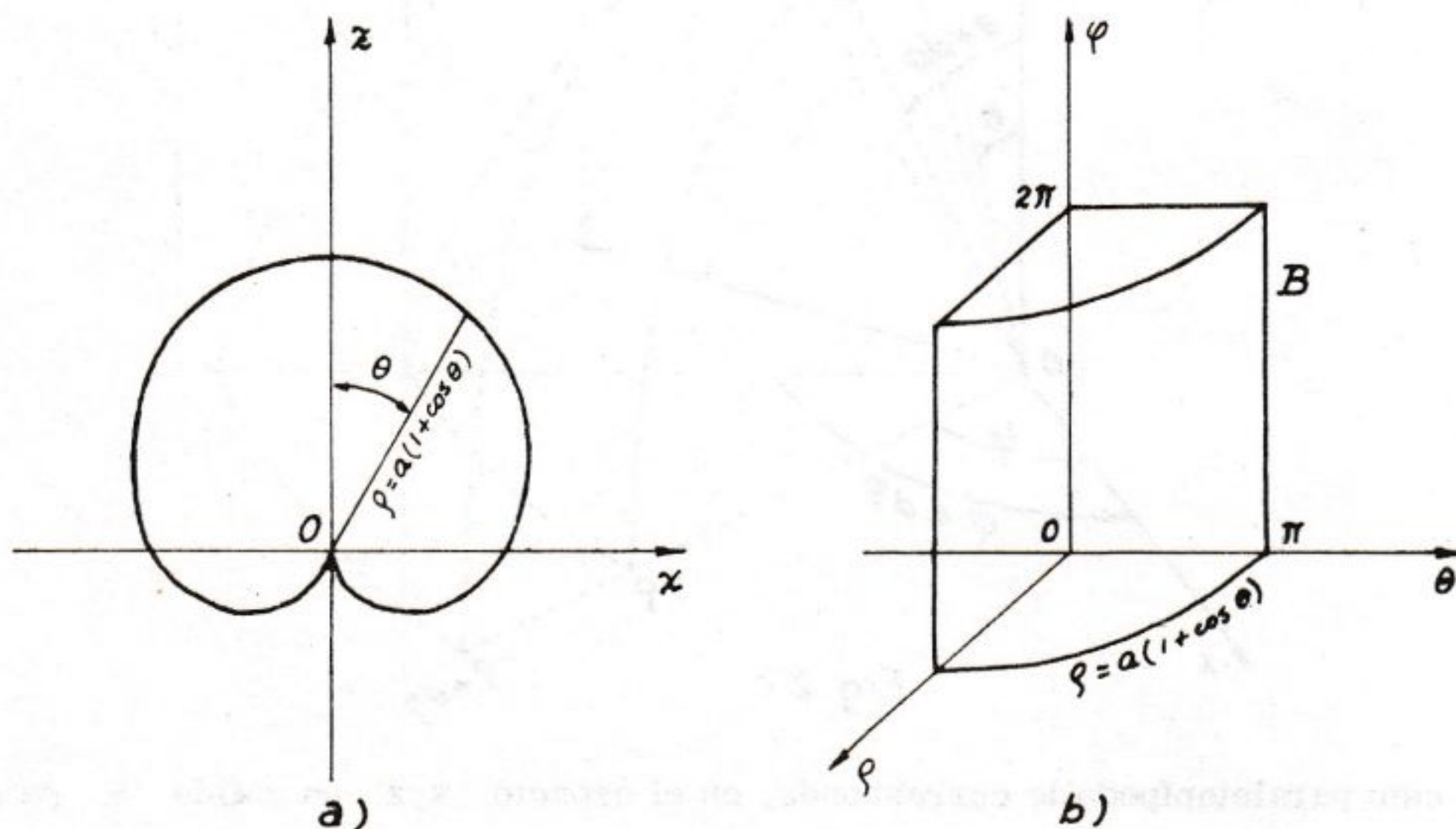


Fig. 23

riormente la fórmula de reducción (2) del n° 6, se tendrá

$$\text{volumen } A = \iiint_A dx dy dz = \iiint_B \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi =$$

(\*) El carácter de medible de  $A$  proviene del de ser medible  $B$  (n° 2, teor. III) según lo afirmado en el teor. I. Volveremos sobre este aspecto, en general, en el n° 10.



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{a(1+\cos \theta)} \rho^2 \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \cdot \frac{a^3}{3} (1+\cos \theta)^3 \, d\theta = \\
 &= -\frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (1+\cos \theta)^3 \, d(1+\cos \theta) = -\frac{a^3}{3} 2\pi \left[ \frac{(1+\cos \theta)^4}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{8}{3} \pi a^3.
 \end{aligned}$$

Analicemos, por último, para las integrales triples, el pasaje de las coordenadas cartesianas a las coordenadas cilíndricas  $\rho, \varphi, z$  (véase fig. 24), según las siguientes fórmulas

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (4)$$

Consideremos otro espacio auxiliar con los ejes cartesianos  $\rho, \varphi, z$  y a cada punto  $Q(\rho, \varphi, z)$  del mismo (con  $\rho \geq 0$ ) hagámosle corresponder aquel punto  $P$  del espacio  $xyz$  que tiene las coordenadas cilíndricas  $\rho, \varphi, z$ , o sea, las coordenadas cartesianas definidas por (4). Entonces, con consideraciones similares a las del n° precedente, se llega al siguiente teorema:

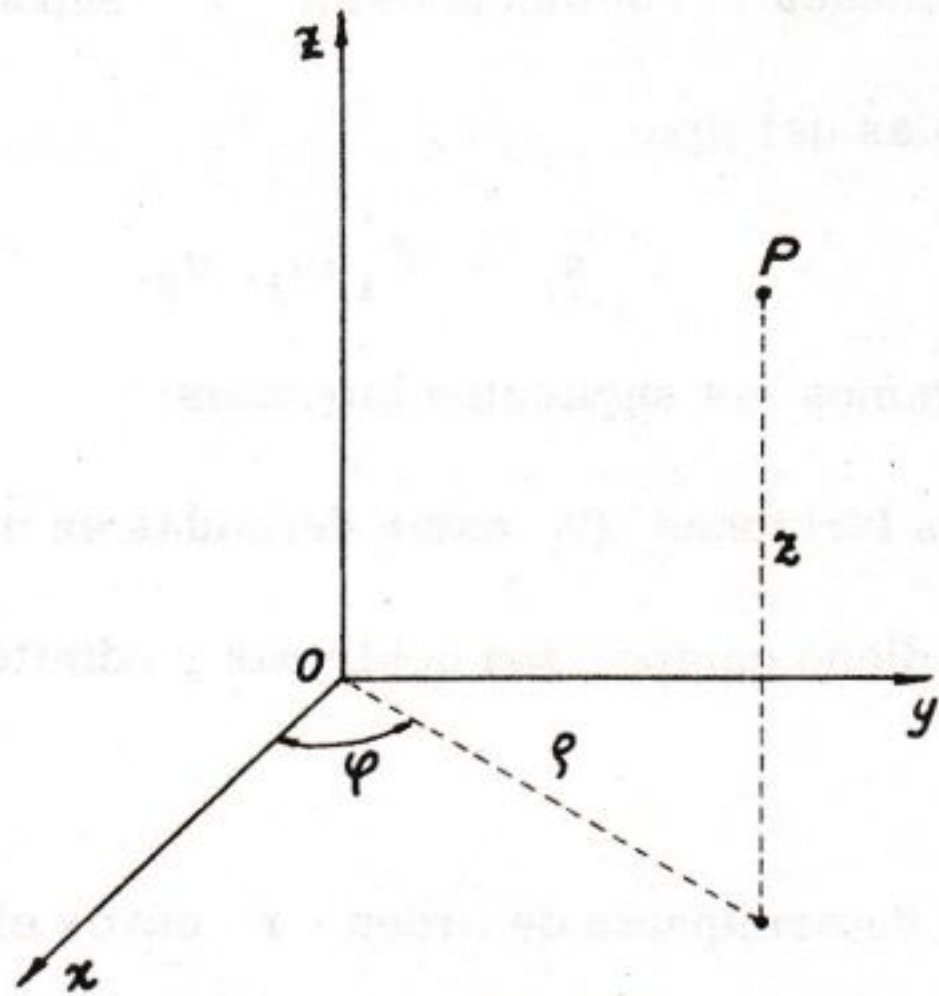


Fig. 24

II - Sea  $B$  un dominio acotado y medible del espacio  $\rho, \varphi, z$ , contenido en un paralelepípedo  $R$  ( $a \leq \rho \leq b$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $c \leq z \leq d$ ), con  $0 \leq a < b$ ,  $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ , y sea  $A$  el dominio (que resultará acotado y medible) del espacio  $xyz$  descripto por el punto  $P$  ( $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ ) cuando  $Q(\rho, \varphi, z)$  varía en  $B$ . Con estas hipótesis, si  $f(x, y, z)$  es una función continua en  $A$ , vale la siguiente fórmula:

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_B f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz. \quad (5)$$



Puede repetirse aquí una observación análoga a la hecha a propósito del teor. I. Observemos que la expresión del elemento de volumen en coordenadas cilíndricas resulta ser  $\varrho \, d\varrho \, d\varphi \, dz$ ; dejamos al lector dar de esta expresión la justificación intuitiva. Para aplicaciones de la (5) véase el n° 10.

## 9 - NOCIONES SOBRE EL CAMBIO GENERAL DE VARIABLES EN LAS INTEGRALES MÚLTIPLES.

Retomemos la cuestión general del cambio de variables en las integrales múltiples

$$\int_T f(x_1, x_2, \dots, x_r) \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_r, \quad (r \geq 2), \quad (1)$$

ya insinuada al comienzo del n° 7. Supongamos que tal cambio esté definido por fórmulas del tipo:

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (2)$$

Hagamos las siguientes hipótesis:

$\alpha$ ) las funciones (2) están definidas en un campo  $B$  del espacio  $u_1, u_2, \dots, u_r$  y, en dicho campo, son continuas y admiten derivadas parciales primeras continuas;

$\beta$ ) el determinante de orden  $r$  cuyos elementos son las derivadas parciales primeras de las funciones (2) o, como se dice brevemente, el determinante jacobiano (o simplemente el jacobiano) de las funciones (2):

$$J(u_1, u_2, \dots, u_r) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_r} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_r} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_r} \end{vmatrix}$$

se mantiene distinto de cero en todo  $B$ .

En estas condiciones puede demostrarse que, mientras el punto  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$  describe el campo  $B$ , el punto  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  que le corresponde a través



de las (2) describe también un campo  $A$  del espacio  $x_1 x_2 : \dots x_r$ . Agreguemos ahora esta tercer hipótesis:

$\gamma$ ) las (2) establecen una correspondencia biunívoca entre los puntos de los dos campos  $A$  y  $B$ .

Con estas hipótesis, los números  $(u_1, u_2, \dots, u_r)$  correspondientes a un punto  $P(x_1, x_2, \dots, x_r) \in A$  pueden asumirse como coordenadas de  $P$  y toman el nombre de coordenadas curvilíneas.

Se demuestran los siguientes teoremas:

I - En las hipótesis  $\alpha), \beta), \gamma)$ , fijado arbitrariamente un dominio  $U \subseteq B$ , las (2) le harán corresponder un dominio  $T \subseteq A$ , transformando puntos interiores de  $U$  en puntos interiores de  $T$  y puntos de  $\mathcal{F}U$  en puntos de  $\mathcal{F}T$ .

II - En las hipótesis  $\alpha), \beta), \gamma)$ , si el citado dominio  $U$  es acotado y medible, también el correspondiente dominio  $T$  resultará acotado y medible, teniéndose

$$\text{med } T = \int_U |J(u_1, u_2, \dots, u_r)| du_1 du_2 \dots du_r. \quad (4)$$

III - En las hipótesis  $\alpha), \beta), \gamma)$ , considerados dos dominios correspondientes  $U$  y  $T$ , acotados y medibles, para cada función  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  continua en  $T$  resulta

$$\begin{aligned} \int_T f(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_1 dx_2 \dots dx_r &= \\ &= \int_U f[\varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_r), \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_r), \dots, \varphi_r(u_1, u_2, \dots, u_r)] \\ &\quad |J(u_1, u_2, \dots, u_r)| du_1 du_2 \dots du_r. \end{aligned}$$

Renunciando a exponer las demostraciones correspondientes, nos limitaremos a señalar que, una vez demostrados los teoremas I y II, el teorema III, se deduce inmediatamente con un razonamiento totalmente análogo al realizado para el teor. II del n° 7.



De (4) y (5) surge que el elemento de medida en las coordenadas curvilíneas  $u_1, u_2, \dots, u_r$  está expresado por

$$\left| J(u_1, u_2, \dots, u_r) \right| du_1 du_2 \dots du_r. \quad (6)$$

Esto muestra la analogía con la regla de sustitución para las integrales simples. Es evidente que, cuando en una integral simple se efectúa el cambio de variable  $x = \varphi(t)$ , el jacobiano correspondiente (3) resulta igual a  $\varphi'(t)$ . Por otra parte sabemos que el elemento de longitud  $dx$  se transforma en  $\varphi'(t) dt$ , expresión que es precisamente del tipo (6) pero sin el símbolo de valor absoluto. Esto es debido al hecho de que para las integrales simples hemos introducido una orientación en el intervalo de integración (con el concepto de integral definida), cosa que no hemos hecho para las integrales múltiples.

Podemos también indicar una justificación intuitiva de la (6), limitándonos por simplicidad a las integrales dobles ( $r = 2$ ) y escribiendo las (2) bajo la forma

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad (7)$$

Dejando fijo  $u$ , el punto  $(x, y)$  describe una línea  $u = \text{constante}$ ; análogamente, teniendo fijo  $v$ , tal punto describe una línea  $v = \text{constante}$ . Asumamos como elemento de área al dominio infinitesimal  $T$  delimitado por dos líneas  $u = \text{const.}$  infinitamente vecinas y dos líneas  $v = \text{const.}$  también infinitamente vecinas (ver fig. 25). Tal dominio  $T$  tiene un área que puede valorarse como el doble del área del triángulo  $PP_1P_2$ . Designa-

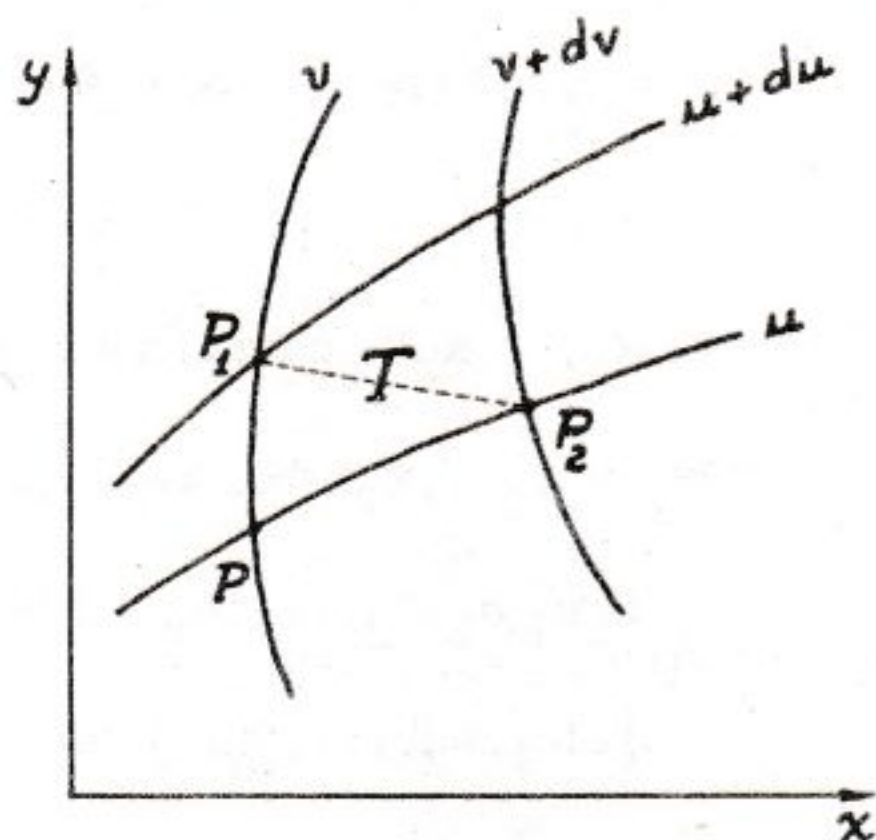


Fig. 25

das las coordenadas de  $P$  con  $x, y$ , el punto  $P_1$  tiene coordenadas próximas a  $(x + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du, y + \frac{\partial \psi}{\partial u} du)$  y análogamente  $P_2$  tiene coordenadas vecinas a  $(x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, y + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv)$ .



Entonces, por una conocida fórmula de la geometría analítica, puede admitirse que área  $T$  sea igual al valor absoluto de

$$2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du & y + \frac{\partial \psi}{\partial u} du & 1 \\ x + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv & y + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} du & \frac{\partial \psi}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv & \frac{\partial \psi}{\partial v} dv & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} du dv$$

que es, precisamente, el valor asignado por la (6).

Podemos volver a encontrar, como casos particulares de la (6), los elementos de área y de volumen ya encontrados en los nos 7 y 8.

En el caso de las coordenadas polares del plano  $\angle$  para el que las (2) se escriben  $x = \varrho \cos \varphi$ ,  $y = \varrho \sin \varphi$ , el jacobiano vale

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho \geq 0$$

y, por lo tanto, se tiene el elemento de área  $\varrho d\varrho d\varphi$ .

En el caso de las coordenadas polares del espacio  $\angle$  en el que las (2) toman la forma  $x = \varrho \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = \varrho \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = \varrho \cos \theta$  con  $0 \leq \theta \leq \pi$  el jacobiano vale

$$\begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \varrho \cos \theta \cos \varphi & \varrho \cos \theta \sin \varphi & -\varrho \sin \theta \\ -\varrho \sin \theta \sin \varphi & \varrho \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \varrho^2 \sin \theta \geq 0,$$

por lo que el elemento de volumen resulta  $\varrho^2 \sin \theta d\varrho d\theta d\varphi$ .

Por último, en el caso de las coordenadas cilíndricas  $\angle$  en el que las (2) se escriben  $x = \varrho \cos \varphi$ ,  $y = \varrho \sin \varphi$ ,  $z = z$  se tiene el jacobiano



$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \geq 0$$

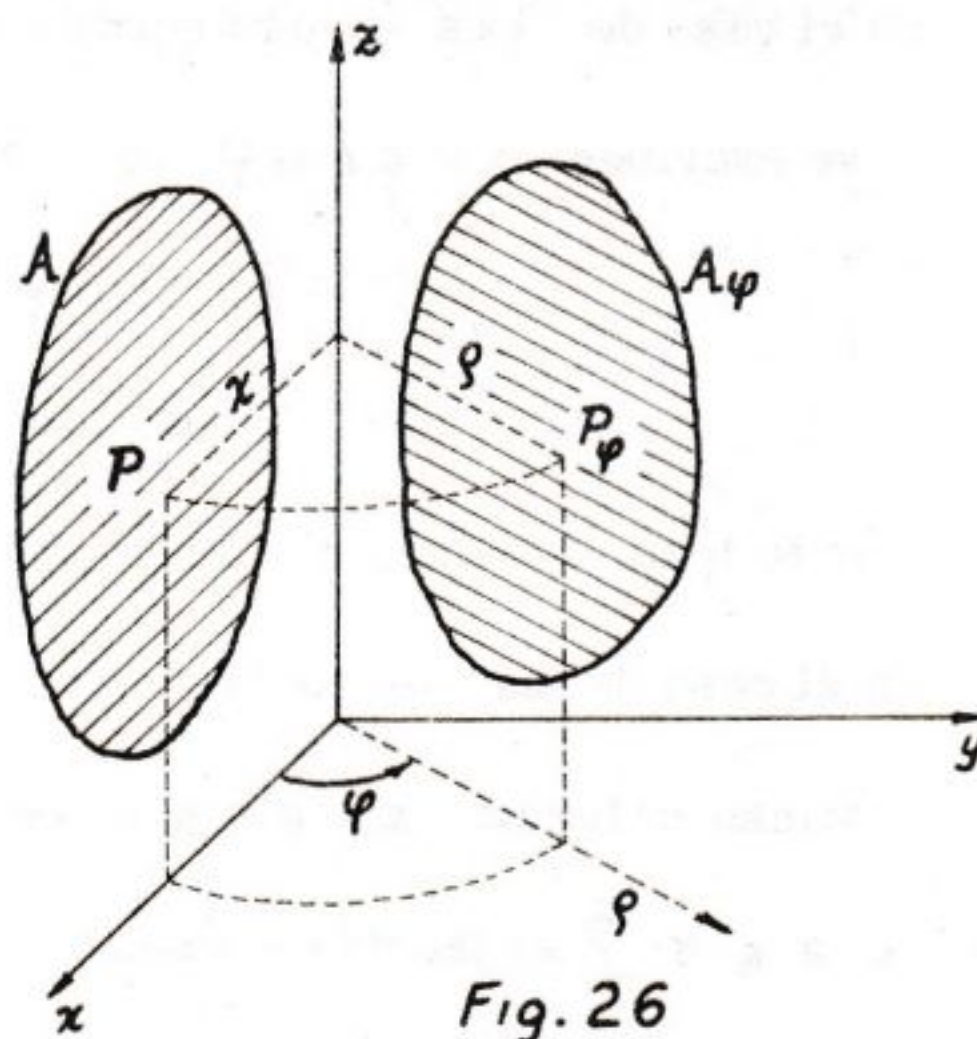
y el elemento de volumen,  $\rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$ .

Es de observarse sin embargo que en estos tres casos particulares no se cumple ni la hipótesis  $(\beta)$  ya que el jacobiano puede anularse ni la  $(\gamma)$  puesto que hay excepciones a la biunivocidad de la correspondencia allí mencionada. Por lo tanto los teoremas de los n<sup>os</sup> 7 y 8 no pueden sin más deducirse del teorema general dado en este número y por eso es que esos casos fueron estudiados por separado.

#### 10 - APLICACIONES EN EL CALCULO DE VOLUMENES.

Retomemos ahora el argumento del n<sup>o</sup> 2, indicando otras categorías de conjuntos medibles en el espacio y algunas reglas útiles para el cálculo de sus volúmenes.

Comencemos con los sólidos de rotación. En el plano  $xz$  supongamos dado un dominio  $A$ , acotado y medible, cuyos puntos están todos situados en el semiplano  $x \geq 0$ . Haciendo rotar a



tal semiplano un giro completo alrededor del eje  $z$ , el dominio  $A$  generará cierto sólido de rotación  $T$  (fig. 26). Cada semiplano que parte del eje  $z$  (y definido por una cierta anomalía) corta al sólido  $T$  según un dominio  $A_\varphi$  que es igual al  $A$  y que respecto de los ejes  $\rho, z$  de la figura está dispuesto como el dominio  $A$  respecto de los ejes  $x, z$ . Entonces, utilizando las coordenadas cilíndricas  $\rho, \varphi, z$  podemos decir que el sólido de rotación  $T$  es el



lugar de los puntos  $\rho, \varphi, z$  tales de resultar  $(\rho, z) \in A$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . En otras palabras, el sólido  $T$  es el correspondiente del cilindro  $U$  del espacio  $\rho\varphi z$ , representado en la fig. 27. Puesto que  $U$  es un dominio acotado y medible (nº 2 teor. I), podemos decir en virtud del teor. II del nº 8, que también  $T$  es un dominio medible y que resultará

volumen  $T = \iiint_T dx dy dz = \iiint_U \rho d\rho d\varphi dz$ . Aplicando a esta última integral triple la fórmula de reducción (3) del nº 6, obtenemos volumen  $T = \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_{A_\varphi} \rho d\rho dz$ .

Pero, por la propiedad ya observada del dominio  $A_\varphi$ , la integral doble  $\iint_{A_\varphi} \rho d\rho dz$  resulta igual a  $\iint_A x dx dz$  (cualquiera sea  $\varphi$ ) y puede entonces enunciarse el teorema:

I - El sólido  $T$  generado por la rotación alrededor del eje  $z$  de un dominio acotado y medible  $A$  situado en el semiplano  $y=0, x \geq 0$ , es un dominio acotado y medible cuyo volumen está dado por la fórmula

$$\text{Volumen } T = 2\pi \iint_A x dx dz \quad (*) \quad (1)$$

Observemos ahora que la (1) puede también escribirse

$$\text{Volumen } T = \text{área } A \cdot 2\pi \frac{\iint_A x dx dz}{\text{área } A};$$

y si se tiene en cuenta, tal como se ha visto en el nº 3, que el cociente  $\frac{\iint_A x dx dz}{\text{área } A}$  representa la abscisa  $\bar{x}$  del baricentro del dominio  $A$  (pensado como lámina

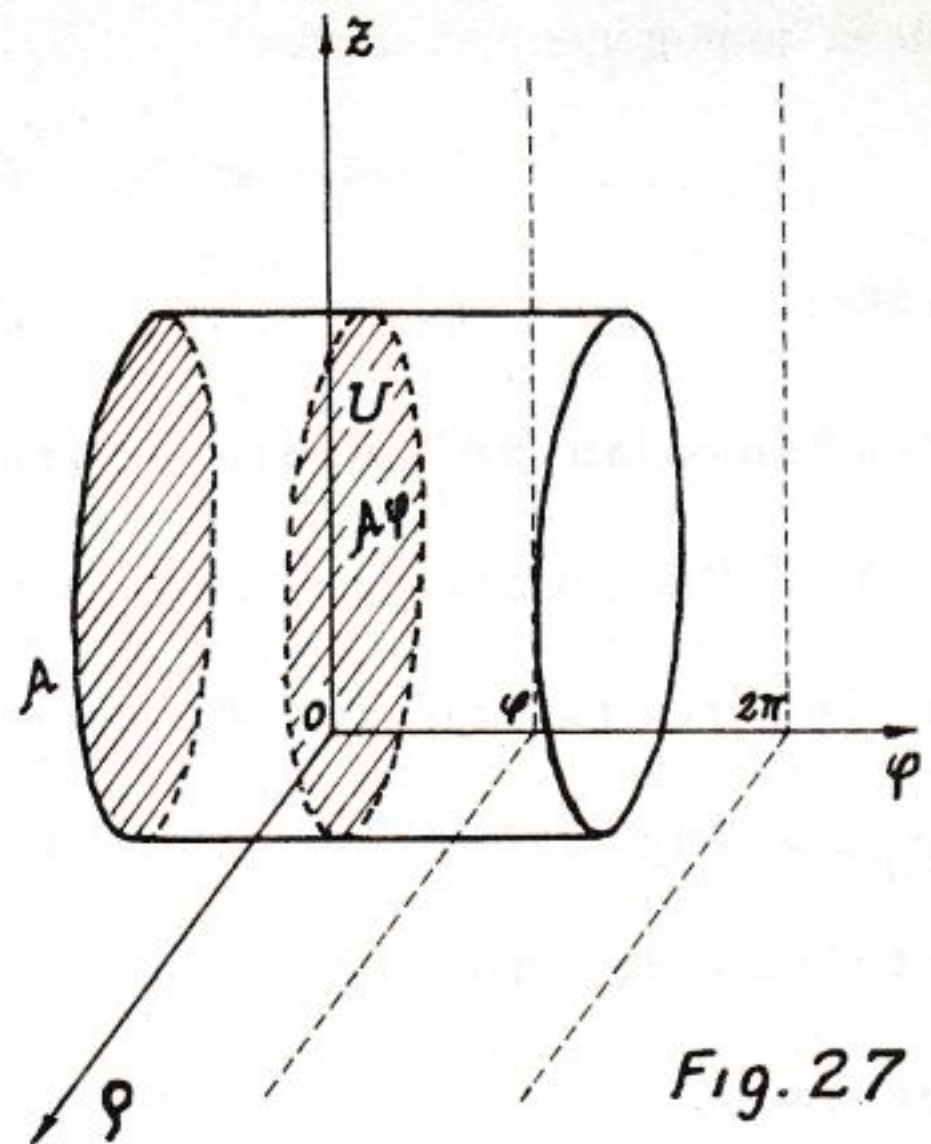


Fig. 27

(\*) A decir verdad, la demostración dada aquí de este teorema I certifica su validez solamente si  $A$  verifica particulares condiciones aptas para asegurar que en el dominio  $U$  sea aplicable la fórmula de reducción (3) del nº 6, obtenida por nosotros bajo hipótesis bastante particulares. Sin embargo, el teor. I es válido en general, como puede establecerse con otra demostración.



plana homogénea) se llega a

$$\text{volumen } T = \text{área } A \cdot 2\pi\xi, \quad (2)$$

o sea:

II - (Teorema de Guldin sobre el volumen de un sólido de rotación). Un dominio plano, rotando un giro completo alrededor de una recta (contenida en su mismo plano) que no lo atraviese, genera un sólido cuyo volumen está dado por el producto del área del dominio por la longitud de la circunferencia descrita por el baricentro del mismo dominio.

Por ejemplo, un círculo de radio  $r$  que rote respecto de una recta de su plano de la cual su centro tenga distancia  $d \geq r$ , y describa un giro completo, genera un sólido (llamado toro de revolución) cuyo volumen vale

$$\pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d.$$


---

Agreguemos algún otro teorema útil para el cálculo de volúmenes. Sea  $T$  un dominio acotado y medible del espacio y supongamos que  $T$  sea tal de resultar posible aplicar la fórmula de reducción (3) del n° 6; es decir, supongamos que  $T$  pueda descomponerse en un número finito de dominios normales respecto de uno de los planos coordenados (por ejemplo: plano  $xy$ ) cada uno de los cuales tenga por base un dominio de dicho plano que sea normal respecto de uno de los ejes del mismo plano (por ejemplo: eje  $x$ ). Entonces, designando con  $[a, b]$  al intervalo proyección de  $T$  sobre el eje  $x$  y con  $C_x$  al dominio plano (medible) que es sección de  $T$  con el plano lugar de los puntos de abscisa  $x$ , se tiene:

$$\text{volumen } T = \iiint_T dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \iint_{C_x} dx \, dy; \\ \text{pero } \iint_{C_x} dx \, dy = \text{área } C_x \text{ y entonces}$$



$$\text{volumen } T = \int_a^b \text{área } C_x \cdot dx \quad (3)$$

y de aquí, el teorema:

III.—Bajo las hipótesis introducidas, el dominio de un volumen acotado y medible  $T$  es expresable mediante una integral simple a través de la fórmula (3) donde  $C_x$  es la sección de  $T$  con el plano lugar de los puntos de abscisa  $x$  y  $[a, b]$  es el intervalo proyección de  $T$  sobre el eje  $x$ .

Este teorema es útil cuando se sepa valorar inmediatamente el área de las secciones de  $T$  con los planos perpendiculares a uno de los ejes coordenados. Obsérvese además que la (3) tiene justificación intuitiva inmediata si se piensa que  $T$  ha sido descompuesto en fetas asimilables a cilindros de base  $C_x$  y altura  $dx$ .

Calculemos, como ejemplo, el volumen de un elipsoide. Sea  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  la ecuación de la superficie frontera del elipsoide  $E$ . Un plano horizontal, de cota  $z$  (con  $-c \leq z \leq c$ ) corta a  $E$  según una elipse cuyos semiejes valen  $a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ ,  $b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ ; tal elipse tiene, entonces (Cap. IX, n° 12), área igual a  $\pi a b (1 - \frac{z^2}{c^2})$  y se tendrá, por lo tanto, volumen  $E = \int_{-c}^c \pi a b (1 - \frac{z^2}{c^2}) dz = \pi a b \left[ z - \frac{z^3}{3c^2} \right] = \frac{4}{3} \pi a b c$ .

Para  $a = b = c = R$  reencontramos, en particular, el volumen  $\frac{4}{3} \pi R^3$  de la esfera de radio  $R$ .

Hagamos otra aplicación del teor. III. Consideremos en el plano  $xy$  el rectánguloide que tiene por base un intervalo  $[a, b]$ , relativo a la función  $f(x)$  continua y no negativa. Rotando tal rectánguloide un giro completo alrededor del eje  $x$ , se obtiene un sólido de rotación  $T$  cuyo volumen podría expresarse mediante la (1); pero es más simple aplicar el teorema III, después de haber notado que las secciones de  $T$  con los planos perpendiculares al eje  $x$  son cír-



culos de radio igual a  $f(x)$  y, por lo tanto, de área  $\pi [f(x)]^2$ . Tendremos, entonces,

$$\text{volumen } T = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (4)$$

Veamos todavía otra consecuencia del teor. III. Se ha visto en el Cap. XIX, n<sup>o</sup> 4, teor. I que, si  $\varphi(x)$  es un polinomio de grado 3, vale la fórmula

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[ \varphi(a) + 4 \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b) \right].$$

Si la aplicamos a la integral que está en el segundo miembro de (3), se obtiene:

IV - Si el área de la sección plana de abscisa  $x$  del dominio acotado y medible  $T$  es expresable mediante un polinomio en  $x$  de grado  $\leq 3$ , entonces el volumen de  $T$  se obtiene multiplicando por  $\frac{1}{6}$  de la altura a la suma de las áreas de las secciones extremas y de 4 veces el área de la sección mediana.

El lector puede aplicar este teorema para obtener, por ejemplo, el volumen de un cono, de una esfera, de un segmento esférico, etc.

## 11 - AREA DE UNA SUPERFICIE

Pasemos a exponer otra importante aplicación de las integrales dobles, ocupándonos de la cuestión del área de una superficie.

Sea  $S$  una superficie regular (Cap. XVI, n<sup>o</sup> 10) representada por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (1)$$

donde las funciones de los segundos miembros se suponen definidas en el dominio base  $A$  internamente conexo, del plano  $uv$ . Suponiendo además que  $A$  sea acotado y medible, deseamos definir el área de  $S$  y dar la fórmula para su cálculo.

Siguiendo un orden de ideas análogo al que nos condujo al concepto de longitud de



un arco de curva (Cap. X, n° 11), parecería oportuno proceder de la siguiente manera. Designemos con  $R$  a un intervalo del plano  $u v$  que contenga al dominio base  $A$  y descompongámoslo en triángulos (de modo arbitrario), considerando entre éstos solamente a aquellos cuyos tres vértices están contenidos en  $A$  que serán indicados con  $T_1, T_2, \dots, T_n$  (ver fig. 28). Llamemos  $P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}$  a los vértices de  $T_i$  y  $Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3}$  a los puntos de la superficie  $S$  que les corresponden respectivamente, y consideremos en el espacio  $xyz$  el triángulo  $U_i$  de vértices  $Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3}$  (eventualmente degenerado en un segmento).

Los triángulos  $U_1, U_2, \dots, U_n$  así obtenidos forman una superficie poliédrica que puede considerarse inscrita en la  $S$ . Si calculamos la suma  $s = \sum_{i=1}^n \text{área } U_i$  podría suponerse que al tender a cero el máximo de los lados de

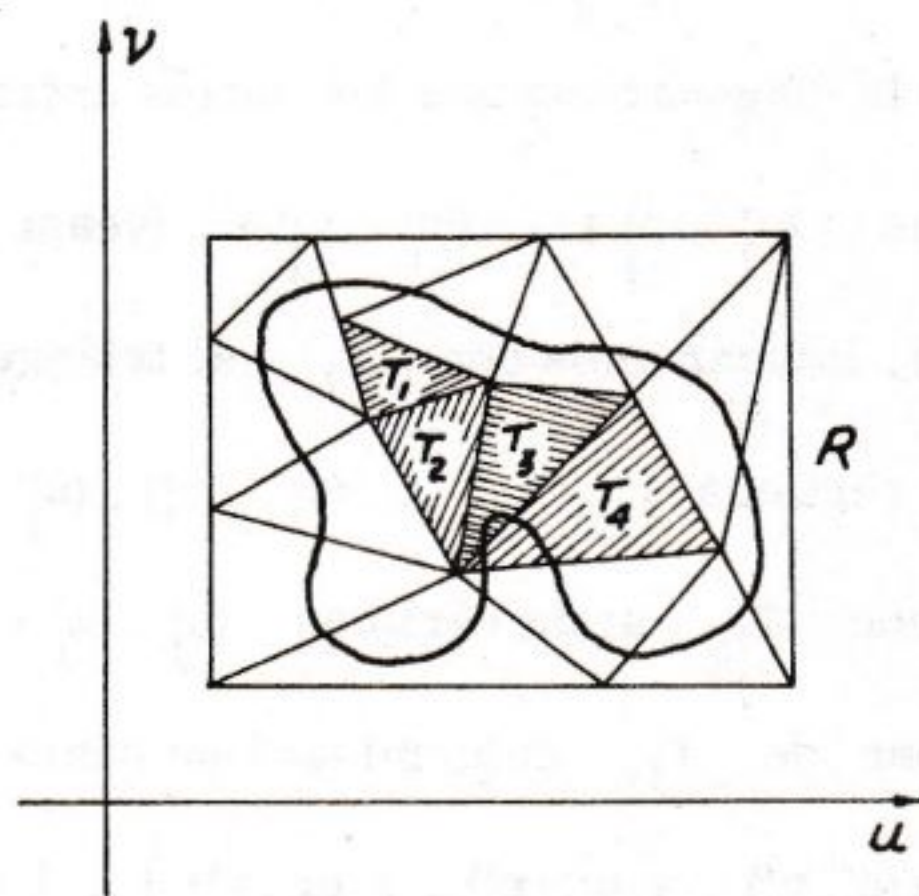


Fig. 28

los triángulos del plano  $u v$  en los que se ha descompuesto a  $R$ , la suma  $s$  tendiera a un límite determinado y finito al que sería natural asumir como área de  $S$ . En realidad no suceden así las cosas y se puede probar con ejemplos que para  $\delta \rightarrow 0$ , la  $s$  no tiende en general a un límite determinado, mientras que sí lo hace si se limita convenientemente la arbitrariedad de la descomposición de  $R$  en triángulos parciales. Sin entrar en detalles sobre esta difícil cuestión, indicaremos ahora un modo particular de efectuar tal descomposición que cumple con el objeto de obtener para  $S$  un límite determinado y finito, que por definición asumiremos como área de la superficie  $S$ . Tal definición permitirá reencon-



trar, para las superficies estudiadas en geometría elemental (esferas, conos, cilindros, ...) las áreas ya conocidas.

Efectuemos una descomposición coordenada  $\mathcal{D}$  del citado intervalo  $R$  en rectángulos parciales, y entre éstos limitémosnos a considerar aquéllos que están constituidos solamente por puntos interiores de  $A$ , a los que indicaremos, como de costumbre, con  $R'_1, R'_2, \dots, R'_m$  Suponiendo que en  $R'_j$  sean  $u'_j \leq$

$\leq u \leq u''_j$ ,  $v'_j \leq v \leq v''_j$ , descomponemos cada  $R'_j$  en dos triángulos trazando la diagonal que une los puntos extremos  $(u'_j, v'_j)$ ,  $(u''_j, v''_j)$ , (véase fig. 29). Indicaremos con  $T_{j1}$  al triángulo de vértices  $(u'_j, v'_j)$ ,  $(u''_j, v'_j)$ ,  $(u''_j, v''_j)$

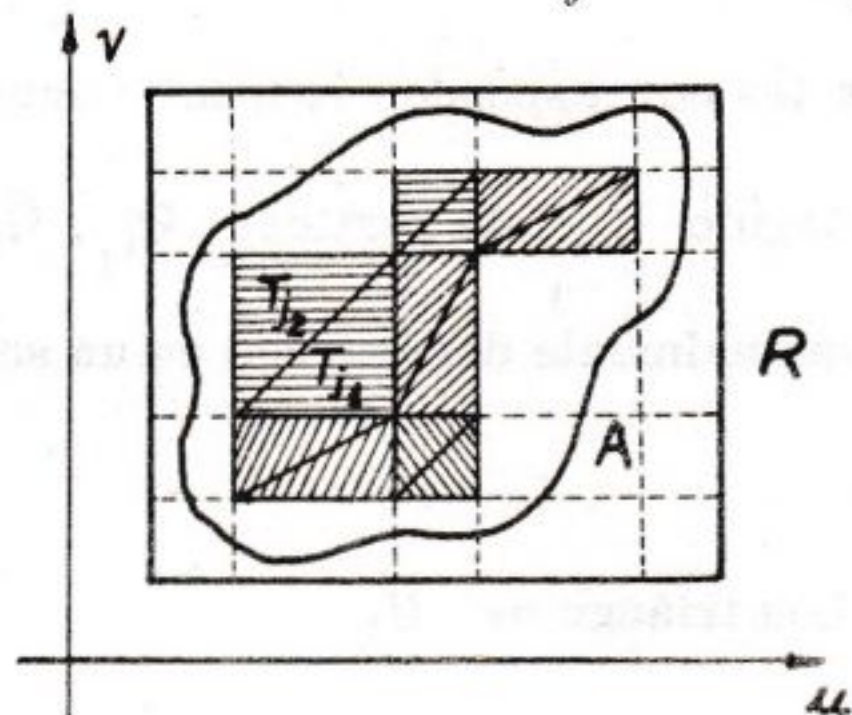


Fig. 29

y con  $T_{j2}$  al de vértices  $(u'_j, v'_j)$ ,  $(u'_j, v''_j)$ ,  $(u''_j, v''_j)$ ; cada uno de los vértices de  $T_{j1}$  determinará un punto sobre la superficie  $S$ :

$$[x(u'_j, v'_j), y(u'_j, v'_j), z(u'_j, v'_j)], [x(u''_j, v'_j), \dots, \dots], [x(u''_j, v''_j), \dots, \dots]$$

los que serán vértices de un cierto triángulo  $U_{j1}$ , mientras que, en correspondencia con los tres vértices de  $T_{j2}$ , quedarán determinados sobre  $S$  los puntos:

$$[x(u'_j, v'_j), \dots, \dots], [x(u'_j, v''_j), \dots, \dots], [x(u''_j, v''_j), \dots, \dots]$$

que serán vértices de un triángulo  $U_{j2}$ . Calculemos ahora la suma

$$s = \sum_{j=1}^m (\text{área } U_{j1} + \text{área } U_{j2})$$

y demostremos que la misma admite un límite determinado y finito, al tender a cero la norma  $\delta$  de la descomposición  $\mathcal{D}$ .

Escribamos  $s = s_1 + s_2$ , con  $s_1 = \sum_{j=1}^m \text{área } U_{j1}$ ,  $s_2 = \sum_{j=1}^m \text{área } U_{j2}$  y

consideremos, por ejemplo, la suma  $s_1$ . Por una conocida fórmula de geome -



tría analítica, resulta (\*)

$$s_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sqrt{\begin{vmatrix} x(u_j'', v_j') - x(u_j', v_j') & y(u_j'', v_j') - y(u_j', v_j') & z(u_j'', v_j') - z(u_j', v_j') \\ x(u_j'', v_j'') - x(u_j'', v_j') & y(u_j'', v_j'') - y(u_j'', v_j') & z(u_j'', v_j'') - z(u_j'', v_j') \end{vmatrix}}^2$$

o también, aplicando el teorema de Lagrange

$$s_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sqrt{\begin{vmatrix} (u_j'' - u_j') x_u(u_{j1}, v_j') & (u_j'' - u_j') y_u(u_{j2}, v_j') & (u_j'' - u_j') z_u(u_{j3}, v_j') \\ (v_j'' - v_j') x_v(u_j'', v_{j1}) & (v_j'' - v_j') y_v(u_j'', v_{j2}) & (v_j'' - v_j') z_v(u_j'', v_{j3}) \end{vmatrix}}^2$$

donde  $u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}$  son tres oportunos puntos interiores al intervalo  $[u_j', u_j'']$

y  $v_{j1}, v_{j2}, v_{j3}$  son tres oportunos puntos interiores al  $[v_j', v_j'']$ . La prece -

dente expresión de  $s_1$  se transforma inmediatamente en la

$$s_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sqrt{\begin{vmatrix} x_u(u_{j1}, v_j') & y_u(u_{j2}, v_j') & z_u(u_{j3}, v_j') \\ x_v(u_j'', v_{j1}) & y_v(u_j'', v_{j2}) & z_v(u_j'', v_{j3}) \end{vmatrix}}^2 \text{ área } R_j',$$

donde los seis puntos indicados pertenecen todos a  $R_j'$ .

Observemos ahora que podemos suponer al dominio base  $A$  descompuesto en los rectángulos  $R_1', R_2', \dots, R_m'$  y en otro dominio medible  $B$ . Realizada después una descomposición de  $B$  en dominios medibles  $B_1, B_2, \dots, B_n$  con norma  $\leq \delta$ , es claro que se origina así, para  $A$ , una descomposición en los dominios  $R_1', R_2', \dots, R_m', B_1, B_2, \dots, B_n$ , con norma  $\leq \delta$ . Eligiendo en cada  $R_j'$ , por ejemplo, el punto  $(u_j', v_j')$  y en cada  $B_k$  un punto cualquiera  $(u_k, v_k)$ , consideremos las sumas siguientes:

$$s_1^* = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sqrt{\begin{vmatrix} x_u(u_j', v_j') & y_u(u_j', v_j') & z_u(u_j', v_j') \\ x_v(u_j', v_j') & y_v(u_j', v_j') & z_v(u_j', v_j') \end{vmatrix}}^2 \cdot \text{área } R_j', \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sqrt{\begin{vmatrix} x_u(u_k, v_k) & y_u(u_k, v_k) & z_u(u_k, v_k) \\ x_v(u_k, v_k) & y_v(u_k, v_k) & z_v(u_k, v_k) \end{vmatrix}}^2 \cdot \text{área } B_k \quad (4)$$

(\*) En el cálculo que sigue haremos uso de algunas nociones sobre matrices (cuadrado de una matriz, teorema de Binet, ...) vistas en Cap. XII, n° 9.



Es evidente que  $s_1^* + \sigma$  es una suma integral relativa a la función continua

$$f(u, v) = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}^2} \quad (5)$$

y al dominio  $A$ ; seguirá, entonces, que

$$\lim (s_1^* + \sigma) = \iint_A f(u, v) du dv \quad (6)$$

Posteriormente observemos que, llamando con  $M$  al máximo de  $f(u, v)$  en  $A$ , de la (4) se obtiene

$0 \leq \sigma \leq M \sum_{k=1}^n \text{área } B_k = M (\text{área } A - \sum_{j=1}^m \text{área } R_j') ;$   
y teniendo en cuenta que, para  $\delta \rightarrow 0$ , la suma  $\sum_{j=1}^m \text{área } R_j'$  tiende al área de  $A$ , se deduce que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma = 0$  por lo que sigue de la (6):

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s_1^* = \iint_A f(u, v) du dv \quad (7)$$

Volviendo ahora a considerar la suma (3), queremos probar que también se tendrá

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s_1 = \iint_A f(u, v) du dv \quad (8)$$

para lo que bastará hacer ver que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (s_1 - s_1^*) = 0$$

Con ese objeto comencemos observando que, dadas dos matrices  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ ,

$\begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 1' & m' & n' \end{pmatrix}$  para las que se cumplen las desigualdades

$$|a - 1|, |b - m|, |c - n|, |a' - 1'|, |b' - m'|, |c' - n'| \leq \tau \leq 1, \quad (10)$$

se puede demostrar la siguiente fórmula de mayoración

$$\left| \sqrt{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}^2} - \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 1' & m' & n' \end{pmatrix}^2} \right| \leq 2\sqrt{3} (2H + 1) \tau,$$

donde  $H$  indica al mayor de los números  $|1|, |m|, |n|, |1'|, |m'|, |n'|$ .

En efecto; designando con  $A, B, C$  a los tres menores de  $2^\circ$  orden de la primera matriz, y con  $L, M, N$  a los de la segunda, el primer miembro de (11)



vale  $\left| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \right|$  (por el teor. de Binet) y es entonces no superior a  $\sqrt{(A-L)^2 + (B-M)^2 + (C-N)^2}$  (cfr. Cap. X, n° 11).

Además, por ejemplo para  $A - L$ , se tiene

$$A - L = \begin{vmatrix} b - c \\ b' - c' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m - n \\ m' - n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m + (b - m) & n + (c - n) \\ m' + (b' - m') & n' + (c' - n') \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} =$$

$$= m(c' - n') - m'(c - n) + n'(b - m) - n(b' - m') + (b - m)(c' - n') - (b' - m')(c - n),$$

de modo que, por la (10) y el significado de  $H$  :

$$|A - L| \leq 4H\zeta + 2\zeta^2 \leq 4H\zeta + 2\zeta = 2(2H + 1)\zeta ;$$

lo mismo para  $|B - M|$ ,  $|C - N|$ , siguiendo la (11).

Entonces, para demostrar la (9), si indicamos con  $K$  un número positivo que mayor en  $A$  los valores absolutos de las seis funciones continuas  $x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v$ , recordemos que, por el teorema de Heine - Cantor aplicado a dichas funciones podemos afirmar que, dado  $\epsilon > 0$  (y podemos suponer  $\epsilon \leq \sqrt{3}(2K + 1) \text{ med } A$ ), existe un  $\delta_\epsilon > 0$  tal que, para dos puntos cualesquiera  $P(u', v')$ ,  $Q(u'', v'')$  de  $A$  que verifiquen  $\overline{PQ} < \delta_\epsilon$ , resultarán

$$|x_u(u', v') - x_u(u'', v'')| < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}(2K + 1) \text{ área } A} \leq 1, \dots, |z_v(u', v') - z_v(u'', v'')| <$$

$$< \frac{\epsilon}{\sqrt{3}(2K + 1) \text{ área } A} \leq 1 ;$$

seguirá que, apenas la descomposición  $\mathcal{D}$  del rectángulo  $R$  tenga norma  $\delta < \delta_\epsilon$ , podrá escribirse:

$$|s_1 - s_1^*| = \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^m \left( \sqrt{(\text{matriz } (2))^2} - \sqrt{(\text{matriz } (3))^2} \right) \text{área } R_j' \right| \leq$$

$$\text{por la (11)} \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2\sqrt{3}(2K + 1) \frac{\epsilon}{\sqrt{3}(2K + 1) \text{ área } A} \text{área } R_j' =$$

$$= \frac{\epsilon}{\text{área } A} \sum_{j=1}^n \text{área } R_j' < \frac{\epsilon}{\text{área } A} \text{área } A = \epsilon ,$$



lo que prueba la validez de la (9) y por ende de la (8).

Análogamente se demuestra la

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s_2 = \iint_A f(u, v) du dv, \quad (12)$$

de modo que, de (8) y de (12), se puede concluir que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s = 2 \iint_A f(u, v) du dv. \quad (13)$$

Pero, como sabemos (Cap. XII, n° 9) se tendrá  $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}^2 = E G - F^2$ ,

donde E, F, G son (Cap. XVI, n° 10) las expresiones habituales

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad (14)$$

por lo que, de la (5), sigue  $2 f(u, v) = \sqrt{E G - F^2}$ , de modo que la (13) puede escribirse como

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} s = \iint_A \sqrt{E G - F^2} du dv \quad (15)$$

y enunciar el teorema

I - El área de la superficie regular S considerada está dada por la fórmula

$$\text{área } S = \iint_A \sqrt{E G - F^2} du dv \quad (16)$$

donde E, F y G están dados por la (14) y A es el dominio base en el plano de los parámetros u, v.

Agreguemos que, para una superficie que se pueda descomponer en un número finito de superficies regulares (carentes, dos a dos, de puntos interiores en común) el área se define como la suma de las áreas de cada una de las superficies regulares.

La expresión  $\sqrt{E G - F^2} du dv$  que aparece en la (16) se denomina el elemento de área de la superficie S. Puede justificarse intuitivamente tal denominación del siguiente modo.

Consideremos en el dominio base A el rectángulo limitado por dos rectas pa-



rales al eje  $v$  (de abscisas  $u$ ,  $u + du$ ) y dos rectas paralelas al eje  $u$  (de ordenadas  $v$ ,  $v + dv$ ).

A dicho rectángulo ~~correspondería~~ sobre  $S$  la porción de superficie encerrada por las dos líneas coordenadas  $u = \text{cte.}$  (correspondientes a los valores  $u$ ,  $u + du$ ) y por las dos líneas coordenadas  $v = \text{cte.}$  (correspondientes a  $v$ ,  $v + dv$ ). Si  $du$ ,  $dv$  son suficientemente pequeños, tal trozo de superficie puede confundirse con un paralelogramo plano que tiene por lados los elementos de arco  $ds_u$ ,  $ds_v$  de las líneas coordenadas y el ángulo comprendido igual al ángulo  $\omega$  de las tangentes a tales líneas; tal paralelogramo tendrá área igual a  $ds_u ds_v \sin \omega$ .

Teniendo ahora presente que la línea  $u = \text{cte.}$  tiene por ecuaciones paramétricas (1) en el parámetro  $v$ , se tendrá  $ds_u = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} dv = \sqrt{G} dv$ ; análogamente se encuentra  $ds_v = \sqrt{E} du$  mientras que, como es sabido (Cap. XVI, n° 11), resulta  $\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{E G}}$  de donde  $\sin \omega = \frac{\sqrt{E G - F^2}}{\sqrt{E G}}$ . Entonces el área indicada vale  $\int \int \sqrt{E G - F^2} du dv$ .

En el caso particular que la porción de superficie regular  $S$  sea representada por la ecuación cartesiana  $z = f(x, y)$  con  $f(x, y)$  continua y dotada de derivadas parciales continuas en el dominio  $A$  (internamente conexo, acotado y medible) del plano  $xy$ , se puede adoptar para  $S$  la representación paramétrica  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = f(u, v)$ . Resultará entonces  $E = 1 + f_u^2$ ,  $F = f_u f_v$ ,  $G = 1 + f_v^2$ ,  $E G - F^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2$  y entonces, escribiendo  $x, y$  en lugar de  $u, v$  se obtiene

$$\text{área } S = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (17)$$

Téngase presente que, en este caso,  $A$  es la proyección ortogonal de  $S$  sobre el plano  $xy$ .



## 12 - OBSERVACIONES Y EJEMPLOS SOBRE EL AREA DE UNA SUPERFICIE .

En este n<sup>o</sup> queremos hacer resaltar que, inclusive para las superficies más elementales, raramente se verifican todas las hipótesis de regularidad admitidas para establecer las fórmulas (15) y (16) del n<sup>o</sup> precedente.

Consideremos, por ejemplo, la esfera  $S$  de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  de la que conocemos (Cap. XVI, n<sup>o</sup> 11) la representación paramétrica

$$x = R \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = R \cos u, \quad (1)$$

donde  $u$  es la colatitud,  $v$  la longitud de un punto de  $S$  y el dominio base  $A$  coincide con el rectángulo  $0 \leq u \leq \pi$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ . Sabemos también que las (1) no establecen una correspondencia biunívoca entre los puntos de  $A$  y los puntos de  $S$ , ya que el punto  $(0, 0, R)$  de  $S$  se obtiene para  $u = 0$  y  $v$  arbitrario, el punto  $(0, 0, -R)$  para  $u = \pi$  y  $v$  arbitrario, mientras que los puntos del semimeridiano  $x \geq 0$ ,  $y = 0$  se obtienen sea para  $v = 0$  como para  $v = 2\pi$ . Sin embargo, estas excepciones a la biunivocidad de la correspondencia entre los puntos de  $A$  y los puntos de  $S$  se manifiestan solamente en los puntos de la frontera de  $A$ .

En un caso de esta naturaleza, nos podemos convencer fácilmente de que las consideraciones realizadas en el n<sup>o</sup> precedente para llegar a la fórmula (15) permanecen todavía perfectamente válidas<sup>(\*)</sup> y, entonces, podemos decir

I - La fórmula (15) del n<sup>o</sup> precedente también es aplicable cuando, permaneciendo válidas las otras hipótesis, las ecuaciones paramétricas de  $S$  no establecen una correspondencia biunívoca entre  $A$  y  $S$ ; pero las excepciones se producen en puntos de la frontera de  $A$ .

-----

(\*) Téngase presente que hemos tomado en consideración solamente los rectángulos  $R_1^i, R_2^i, \dots, R_p^i$  constituidos por puntos interiores de  $A$ .



Así, en el ejemplo precedente de la esfera, puesto que de la (1) sigue  $E=R^2$ ,  $F=0$ ,  $G=R^2 \sin^2 u$ , se obtiene

$$\text{área } S = \iint_A R^2 \sin u \, du \, dv = R^2 \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi \sin u \, du = 4\pi R^2 \quad (2)$$

en conformidad con un conocido resultado de la geometría elemental.

Como otro ejemplo elemental, considérese la superficie lateral  $S$  de un tronco de cono circular. Disponiendo los ejes como en la fig. 30, pongamos  $OA = a$ ,  $OB = b$  y designemos con  $\alpha$  a la semiapertura del cono correspondiente; el tronco de cono tiene entonces los radios de las dos bases dados por  $R_1 = a \sin \alpha$ ,  $R_2 = b \sin \alpha$  y la apotema  $l = b - a$ . In-

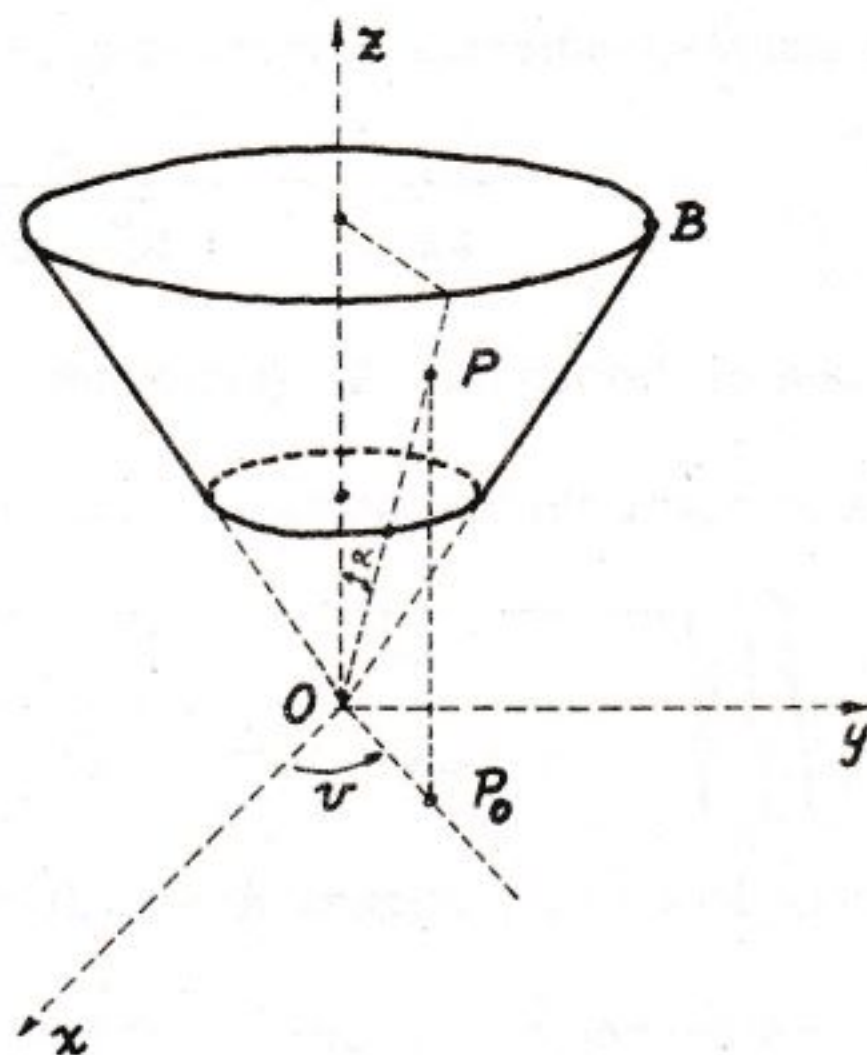


Fig. 30

troduciendo como parámetros al radio vector  $u = \overline{OP}$  y la longitud  $v$ , la superficie  $S$  tiene evidentemente la representación paramétrica

$$x = u \sin \alpha \cos v, \quad y = u \sin \alpha \sin v, \quad z = u \cos \alpha,$$

siendo el dominio base  $A$  el rectángulo  $a \leq u \leq b$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ . Un cálculo inmediato muestra que  $E=1$ ,  $F=0$ ,  $G=u^2 \sin^2 \alpha$ , por lo que se tie-

ne

$$\begin{aligned} \text{área } S &= \sin \alpha \iint_A u \, du \, dv = \sin \alpha \int_0^{2\pi} dv \int_a^b u \, du = \pi(b^2 - a^2) \sin \alpha = \\ &= \pi(b-a)(b+a) \sin \alpha = \pi l (R_1 + R_2), \end{aligned}$$

como ya era conocido de la geometría elemental.

Otra dificultad puede presentarse a propósito de la fórmula (17) del n<sup>o</sup> precedente. También para las superficies más simples sucede a menudo que la función  $z = f(x, y)$  no tiene las derivadas parciales primeras continuas, de modo que la f $\bar{o}$ r-



mula citada no tendría (al menos en base a los conceptos hasta ahora introducidos) ningún sentido.

Por ejemplo, considerada la semiesfera de ecuación  $z = + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  que se proyecta sobre el plano  $xy$  en el círculo  $A$  definido por  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , las correspondientes derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

no son continuas en  $A$  (evidentemente resultan infinitas en los puntos de  $\bar{A}$ ) y la integral correspondiente, que en este caso toma la forma

$$(3) \iint_A \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

carece hasta el momento de significado.

Consideremos entonces un círculo  $A'$  concéntrico al  $A$  y de radio  $r < R$ , y la calota esférica  $S'$  (de la semiesfera  $S$ ) que se proyecta en él. Para  $S'$  no existe ya la dificultad de antes y se tendrá

$$\text{área } S' = R \iint_{A'} \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

o también, pasando a coordenadas polares  $\varrho, \varphi$ :

$$\text{área } S' = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} = 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2}). \quad (*)$$

Pasando al límite para  $r \rightarrow R$  se encuentra  $2\pi R^2$ , que es precisamente el área de la semiesfera  $S$ . Sin embargo este número  $2\pi R^2$  no coincide con la integral (3) que, repetimos, no tiene en el momento actual ningún significado. Nos preguntamos, entonces: ¿es posible extender la noción de integral de modo de atribuir a la integral (3) precisamente el valor  $2\pi R^2$ ? Veremos en el Cap.

-----

(\*) Se ha reencontrado el conocido resultado elemental: el área de una calota esférica es igual al producto de la circunferencia máxima de la esfera por la altura de la calota.



XXV que eso es efectivamente posible.

Por lo tanto el lector debe tener presente que, en el cálculo del área de una superficie puede no ser suficiente la teoría de la integral de las funciones continuas y que, inclusive para las superficies más comunes, será indispensable la teoría de la integración de las denominadas funciones sumables que expondremos en el ya citado Cap. XXV.

### 13 - AREA DE UNA SUPERFICIE DE ROTACION.

Apliquemos los resultados de los n<sup>os</sup> 11 y 12 al cálculo del área de la superficie  $S$  generada por un arco de curva regular  $C$  situado en el semiplano  $y = 0$ ,  $x \geq 0$ , tras haber rotado una vuelta completa alrededor del eje  $z$ . Sean  $x = \varphi(u) \geq 0$ ,  $z = \psi(u)$ , ( $a \leq u \leq b$ ) las ecuaciones paramétricas de  $C$ , siendo las funciones indicadas derivables con derivada continua. Un punto genérico  $P(x, y, z)$  de  $S$  proviene por rotación de un cierto punto  $Q[\varphi(u), 0, \psi(u)]$  del meridiano  $C$ . Designando con  $v$  el ángulo que debe rotar  $Q$  para superponerse con  $P$ , resulta evidentemente

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) \cos v \\ y &= \varphi(u) \sin v \\ z &= \psi(u) \end{aligned} \quad (1)$$

que pueden considerarse como las ecuaciones paramétricas de  $S$ , al variar el punto  $(u, v)$  en el rectángulo  $A$  ( $a \leq u \leq b$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ ).

Con la representación paramétrica (1), la  $S$  no resulta una porción de superficie regular, ya que no existe correspondencia biunívoca entre los puntos del rectángulo  $A$  y los puntos de  $S$ . En efecto: a los puntos de  $C$  corresponde tanto  $v = 0$  como  $v = 2\pi$ ; además en todo punto eventualmente común a  $C$  y al eje  $z$ , el valor de  $v$  es indeterminado. Si suponemos por simplicidad



que  $C$  tenga en común con  $z$  como máximo sus dos puntos terminales (corres

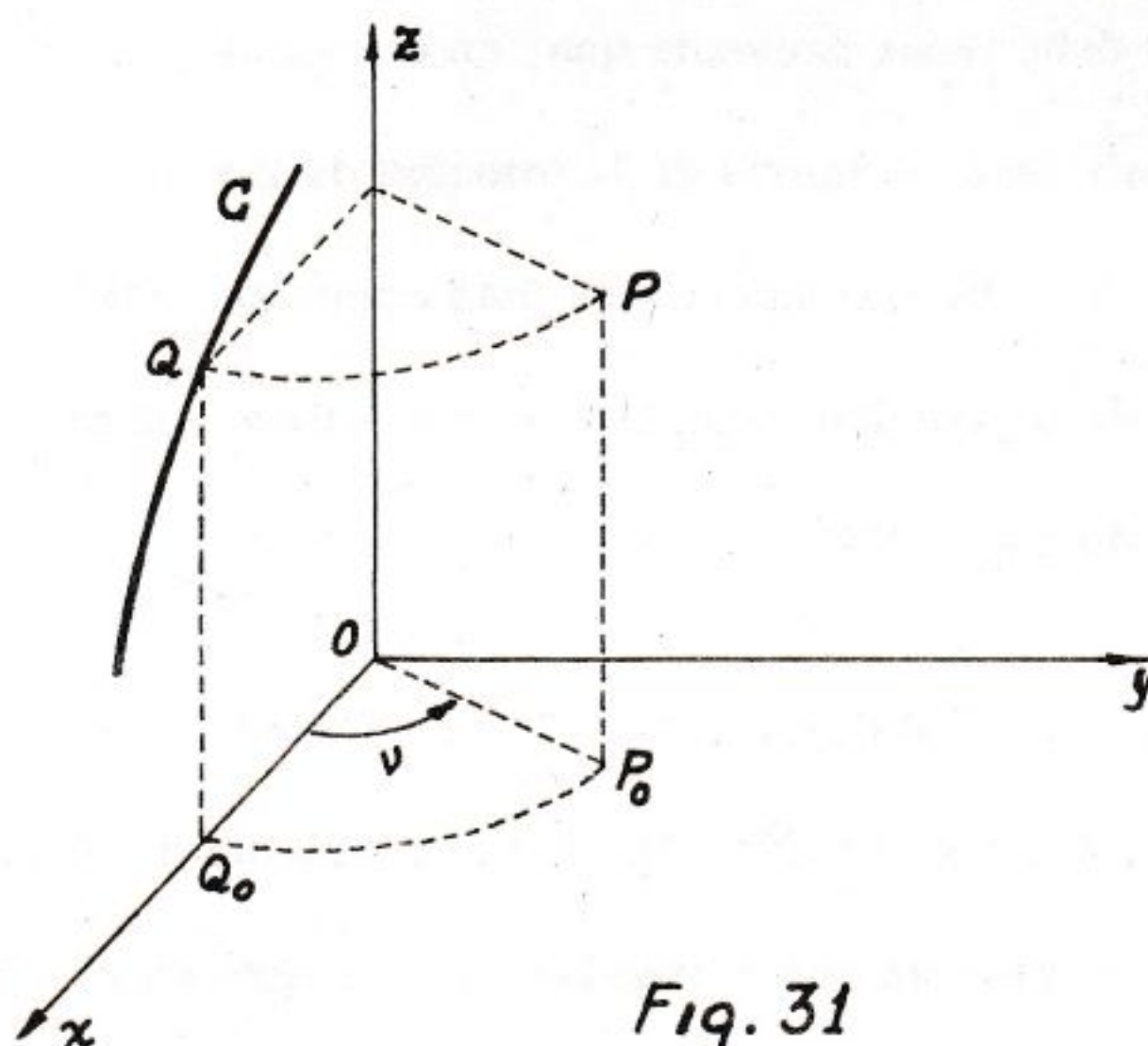


Fig. 31

pondientes a  $u = a$  ,  $u = b$  ) vemos que las excepciones a la biunivocidad de la correspondencia entre los puntos  $(u, v)$  de  $A$  y los puntos  $P$  de la superficie  $S$  se manifiestan solamente en puntos de  $\mathcal{F}A$  , y entonces, por el teor. I del n<sup>o</sup> precedente, podemos aplicar la fórmula (16) del n<sup>o</sup> 11 .

De la (1) sigue

$$E = \varphi'^2(u) + \psi'^2(u) \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = \varphi^2(u) \quad .$$

obteniéndose, por lo tanto,

$$\text{área } S = \iint_A \varphi(u) \sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)} du dv = 2\pi \int_a^b \varphi(u) \sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)} du \quad .$$

Si indicamos con  $s(u)$  al arco de la curva  $C$  , orientado en el sentido de las  $u$  crecientes, se tiene (Cap. IX, n<sup>o</sup> 11),  $ds(u) = \sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)} du$  y la fórmula precedente puede también escribirse

$$\text{área } S = 2\pi \int_a^b \varphi(u) ds(u) \quad ,$$

o más concisamente

$$\text{área } S = 2\pi \int x ds \quad . \quad (2)$$

entendiendo que es necesario expresar  $x$  y  $s$  por medio del parámetro  $u$  , según las ecuaciones paramétricas de  $C$  y hacer variar  $u$  en el correspondien



te intervalo base .

Sobre la fórmula (2) volveremos en el Cap. sucesivo. Nos conviene ahora observar que la misma puede justificarse intuitivamente , notando que un elemento de arco  $ds$  de la curva  $C$  , que tenga por punto medio el genérico punto  $Q$  de ésta, genera, rotando alrededor del eje  $z$  , una faja de la superficie  $S$  que puede considerarse como la superficie lateral de un tronco de cono cuya circunferencia media tiene como radio la abscisa  $x$  del punto  $Q$  y cuya apotema vale  $ds$  ; tal faja tiene entonces el área elemental  $2 \pi x \cdot ds$  y el área de  $S$  es la suma de todas estas áreas elementales.

Demos un ejemplo de aplicación de la (2) . El arco de parábola  $z = x^2$  ,  $0 \leq x \leq 1$  genera, por rotación alrededor del eje  $z$  , una calota de paraboloides circular cuya área (asumiendo  $x$  como parámetro) tiene la expresión

$$2 \pi \int_0^1 x \sqrt{1 + 4 x^2} dx ,$$

valiendo, entonces

$$2 \pi \left[ \frac{1}{12} (1 + 4 x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} (5 \sqrt{5} - 1) .$$



## CAPITULO XXIII

### Integración de las formas diferenciales lineales e integrales curvilíneas

#### 1 - EL PROBLEMA DE LA INTEGRACION DE LAS FORMAS DIFERENCIALES LINEALES.

Para las funciones continuas de una variable  $f(x)$  hemos visto en el Cap. IX que el concepto de integral definida permite, entre otras cosas, resolver este problema: encontrar una función  $F(x)$  que, en un intervalo dado, tenga  $f(x)$  por derivada  $\frac{d}{dx}$  o tenga  $f(x) dx$  como diferencial  $\frac{d}{dx}$ . Sabemos, en efecto, que tal  $F(x)$  está dada, salvo una constante aditiva, por la integral definida  $\int_a^x f(t) dt$  realizada entre un punto fijo  $a$  y un punto variable  $x$  del intervalo  $A$ .

Pasando a funciones de varias variables, el problema análogo es el siguiente: encontrar una función continua  $F(x_1, x_2, \dots, x_r)$  que, en un campo conexo  $A$  dado (del espacio  $S_r$ ), tenga por derivadas parciales primeras, respecto de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , y en ese orden, ciertas  $r$  funciones continuas asignadas previamente  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_r), f_2(x_1, x_2, \dots, x_r), \dots, f_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$   $\frac{d}{dx}$  o que tenga como diferencial total la expresión  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_1 + f_2(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_2 + \dots + f_r(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_r$   $\frac{d}{dx}$  (\*).

Llamando forma diferencial lineal a toda expresión del tipo:  $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_r dx_r$ , donde  $f_1, f_2, \dots, f_r$  son funciones asignadas (lla —

-----  
(\*) Advertimos que, en todo este Capítulo, las funciones que consideraremos pueden ser in diferentemente reales o complejas.



mas coeficientes de la forma), podemos enunciar también del siguiente modo el problema: encontrar una función continua  $F(x_1, x_2, \dots, x_r)$  que tenga por diferencial total una forma diferencial lineal dada.

Se trata, entonces, de resolver la siguiente ecuación en la incógnita  $F$ :

$$dF = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_r dx_r \quad (1)$$

que equivale al siguiente sistema de  $r$  ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_r} = f_r. \quad (2)$$

La función  $F$ , supuesta existente, se denomina una integral de la forma diferencial dada y el citado problema es llamado el problema de la integración de una forma diferencial lineal.

Demostremos el siguiente teorema:

I - Si en el campo conexo  $A$  la forma diferencial lineal  $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_r dx_r$  admite una integral  $F_0(x_1, x_2, \dots, x_r)$ , admitirá infinitas, todas dadas por la fórmula

$$F(x_1, x_2, \dots, x_r) = F_0(x_1, x_2, \dots, x_r) + C, \quad (3)$$

con  $C$  constante arbitraria. Una integral de la forma resulta individualizada dando (arbitrariamente) el valor que la misma asume en un punto fijado  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$  de  $A$ .

Dem. En efecto; si  $F_0$  es una integral de la forma dada, lo será también sin duda  $F_0 + C$ . Viceversa, si  $F$  es una integral distinta de  $F_0$ , la diferencia  $F - F_0$  es una función continua en  $A$ , que tiene en  $A$  derivadas parciales idénticamente nulas; pero como  $A$  es un campo conexo, por el teor. IV del n° 4 del Cap. XVI, sigue que  $F - F_0$  es una constante, resultando la (3). Si además se quiere que resulte  $u_0 = F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$  es necesario y suficiente elegir la constante  $C$  de modo que sea  $u_0 = F_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0) + C$ ;



con esto queda determinado  $C$  y se tendrá una sola integral que verifique la condición dicha, dada por la fórmula

$$F(x_1, x_2, \dots, x_r) = F_0(x_1, x_2, \dots, x_r) + u_0 - F_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0),$$

que es lo que deseábamos demostrar.

Hasta aquí las cosas están planteadas como en el caso de las funciones de una variable; pero debemos inmediatamente advertir que, en lo que se refiere a la existencia de la  $F$ , existe una substancial diferencia. Precisamente, mientras en el caso  $r = 1$  la  $F$  existe siempre, en el caso  $r = 2$  no existe, en general, ninguna función  $F$  que verifique la (1) o la 2 o. En otras palabras: las  $r$  derivadas parciales primeras de una función de  $r \geq 2$  variables no pueden ser asignadas en forma completamente arbitraria.

En efecto; suponiendo que las funciones dadas  $f_1, f_2, \dots, f_r$  sean, además que continuas, tales de admitir derivadas parciales primeras continuas, admitamos que exista una función  $F$  que verifica la (2). En ese caso, designando con  $h$  y  $k$  a dos cualesquiera de los números  $1, 2, \dots, r$ , de las ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = f_h, \quad \frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k,$$

seguirán, derivando la primera respecto de  $x_k$  y la segunda respecto de  $x_h$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial f_h}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_h} = \frac{\partial f_k}{\partial x_h};$$

si se tiene ahora en cuenta el teorema de Schwarz (Cap. XVI, n° 1), deberá ser

$\frac{\partial^2 F}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_h}$ , y se ve entonces que entre las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_r$  dadas, deberán cumplirse las relaciones

$$\frac{\partial f_h}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_h}, \quad (h, k = 1, 2, \dots, r) \quad (3)$$

que suman  $\binom{r}{2}$ , ya que serán tantas como modos de elegir los dos índices  $h, k$  entre los  $r$  números  $1, 2, \dots, r$ . De aquí que si las (3) no se verifican, el problema planteado por la (1) o por la (2) o no puede



tener solución.

Establecido así que el problema (1)  $\int_{\gamma}^{\circ} (2) \int$  podrá tener solución sólo bajo particulares condiciones, nos conviene introducir la siguiente locución: diremos que la forma diferencial lineal  $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_r dx_r$  es un diferencial exacto en el campo  $A \int_{\gamma}^{\circ}$  que la misma forma es integrable en  $A \int$  cuando el problema (1)  $\int_{\gamma}^{\circ} (2) \int$  admite por lo menos una solución (y, por lo tanto, infinitas, según el teor. I).

En base a todo lo recién dicho, podemos enunciar el teorema:

II - Si en el campo conexo  $A$  las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_r$  son continuas y admiten derivadas parciales primeras continuas, condición necesaria para que la forma diferencial lineal  $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_r dx_r$  sea en  $A$  un diferencial exacto es que se satisfagan idénticamente las  $\binom{r}{2}$  relaciones (3)  $^{(*)}$

Suponiendo ahora que de alguna manera hemos logrado saber que el segundo miembro de (1) es un diferencial exacto, queda siempre el problema de calcular la función  $F$ . En el caso  $r = 1$  hemos recordado que el problema se resuelve con una integración hecha entre un punto fijo  $a$  y un punto variable  $x$ . En el caso  $r \geq 2$  veremos que el objetivo se alcanza con un procedimiento análogo para el que es necesario introducir nuevas integrales, llamadas integrales curvilíneas.

---

En lo sucesivo, a fin de permanecer en el campo de las aplicaciones más comunes, nos referiremos exclusivamente a funciones de dos o tres variables, usando para las formas diferenciales lineales las siguientes notaciones :

-----

(\*) Advirtamos desde ya que esta condición necesaria no es en general suficiente para asegurar que la forma dada sea un diferencial exacto. La cuestión será estudiada más adelante.



$X(x, y) dx + Y(x, y) dy$  o también  $X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz$  .

En estos casos particulares, el teor. I se traduce en:

II - Si en el campo conexo  $A$  del plano  $xy$  , las funciones  $X$ ,  $Y$  son continuas y admiten derivadas parciales primeras continuas, condición necesaria para que la forma diferencial  $X dx + Y dy$  sea en  $A$  un diferencial exacto es que sea idénticamente satisfecha la

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} .$$

III - Si en el campo conexo  $A$  del espacio  $xyz$  las funciones  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  son continuas y admiten derivadas parciales primeras continuas, condición necesaria para que la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy + Z dz$  sea en  $A$  un diferencial exacto es que se satisfagan idénticamente las

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} . \quad (5)$$

## 2 - INTEGRAL CURVILINEA DE UNA FORMA DIFERENCIAL LINEAL Y APLICACIONES A LOS DIFERENCIALES.

Definiremos ahora la integral curvilínea de una forma diferencial lineal arbitraria  $X dx + Y dy + Z dz^{(*)}$ ; veremos que, en el caso particular en que la forma sea un diferencial exacto, la integral curvilínea goza de propiedades especiales que permitirán resolver el problema considerado en el n<sup>o</sup> precedente.

Sean  $X(x, y, z)$  ,  $Y(x, y, z)$  ,  $Z(x, y, z)$  tres funciones continuas en un campo conexo asignado  $A$  del espacio, y sea  $C$  una curva regular, con las ecuaciones paramétricas:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \quad ; \quad (a \leq t \leq b) \quad , \quad (1)$$

(\*) Nos referiremos a tres variables; el caso de dos variables se derivará como caso particular, poniendo  $z = 0$  ;  $Z \equiv 0$



totalmente contenida en  $A$ . Fijados sobre  $C$  dos puntos  $P'$ ,  $P''$  (en correspondencia a  $t = t'$ ,  $t = t''$  respectivamente) y designando con  $\gamma$  al arco por ellos individualizado, definiremos qué se entiende por integral curvilínea de la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy + Z dz$ , extendida al arco  $\gamma$ , en el sentido de  $P'$  a  $P''$ , integral que denotaremos con el símbolo

$$\int_{\gamma(P', P'')} X dx + Y dy + Z dz \quad (2)$$

Sobre el arco  $\gamma$  las funciones  $X, Y, Z$  se transforman en tres funciones del parámetro  $t$ :  $X[x(t), y(t), z(t)]$ ,  $Y[x(t), y(t), z(t)]$ ,  $Z[x(t), y(t), z(t)]$ ; a lo largo de dicho arco resultan  $dx = x'(t) dt$ ,  $dy = y'(t) dt$ ,  $dz = z'(t) dt$ , y por eso nuestra forma diferencial lineal se reduce formalmente al diferencial

$$\left\{ X[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Y[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + Z[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \right\} dt.$$

Es entonces natural asumir como definición de la integral (2) la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(P', P'')} X dx + Y dy + Z dz &= \\ &= \int_{t'}^{t''} \left\{ X[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Y[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + Z[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \right\} dt, \end{aligned}$$

donde el segundo miembro tiene un sentido bien preciso, ya que se trata de la integral definida entre los puntos  $t'$ ,  $t''$  de la función de la única variable  $t$  indicada entre llaves, que es continua en virtud de la continuidad de las funciones  $X, Y, Z$  y del hecho que, por la regularidad de la curva, las funciones  $x(t), y(t), z(t)$  son continuas junto a sus derivadas primeras.

Es necesario observar que la circunstancia de considerar  $\gamma$  en el sentido de  $P'$  a  $P''$  se tradujo en el hecho de haber puesto, en la citada integral definida, a  $t'$  como límite inferior y  $t''$  como límite superior. Por lo tanto, si la integral curvilínea se hubiese extendido al arco  $\gamma$  en el sentido de  $P''$  a  $P'$



se habría debido escribir  $\int_{t''}^{t'} \dots y$  se habría obtenido un resultado igual en valor absoluto pero de signo contrario al precedente; de nuestra definición surge, entonces,

$$\int_{\gamma(P', P'')} X dx + Y dy + Z dz = - \int_{\gamma(P'', P')} X dx + Y dy + Z dz \quad (*) \quad (4)$$

Es además inmediato demostrar mediante la (3) que si sobre  $\gamma$  se fija un punto  $P$  (distinto de los extremos) y se indica con  $\gamma'$  el arco de extremos  $P'P$  y con  $\gamma''$  el de extremos  $PP''$ , vale la propiedad aditiva :

$$\int_{\gamma(P', P'')} \dots = \int_{\gamma'(P', P)} \dots + \int_{\gamma''(P, P'')} \dots \quad (5)$$

Esto sugiere la extensión de la definición de la integral curvilínea (2) al caso en que  $\gamma$  sea un arco de curva generalmente regular (Cap. X, n° 10) del siguiente modo: si  $\gamma$  se compone de las curvas regulares  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  con los extremos  $(P', P_1), (P_1, P_2), \dots, (P_{n-1}, P'')$  respectivamente, se pone por definición:

$$\int_{\gamma(P', P'')} X dx + Y dy + Z dz = \int_{\gamma_1(P', P_1)} \dots + \int_{\gamma_2(P_1, P_2)} \dots + \dots + \int_{\gamma_n(P_{n-1}, P'')} \dots \quad (6)$$

Observemos que la definición (6) se aplica también cuando los dos extremos  $P', P''$  de  $\gamma$  coinciden, es decir, cuando  $\gamma$  es una curva generalmente regular cerrada ; pero este caso da lugar a algunas otras consideraciones. Es obvio que, en este caso, sobre  $\gamma$  el sentido de  $P'$  a  $P''$  no queda determinado y se hace necesario en este caso definirlo aparte. Se hablará por lo tanto de integral curvilínea extendida a una curva cerrada  $\gamma$  en un determinado sentido y se usará para la misma el símbolo  $\int_{+\gamma} \dots$ , in

(\*) Es fácil verificar que la integral curvilínea (2) tiene un valor que depende solamente de la forma diferencial, del arco  $\gamma$  y del sentido fijado y no depende de la representación paramétrica (1) adoptada para  $\gamma$ . En efecto; efectuando un cambio  $t = \varphi(\tau)$  del parámetro se ve inmediatamente que el segundo miembro de (3) se transforma en una nueva integral definida igual a la precedente, simplemente obtenida de aquélla mediante la sustitución  $t = \varphi(\tau)$ .

(\*\*) También es muy usado el símbolo  $\oint_{+\gamma} \dots$



dicando en cambio con  $\int_{-\gamma} \dots = - \int_{+\gamma} \dots$  aquella realizada sobre  $\gamma$  en el sentido opuesto. Tanto la locución como el símbolo adoptado (donde no son citados los extremos  $P', P''$ ) quedan justificados por el hecho que no es necesario especificar en qué punto de  $\gamma$  se suponen coincidentes tales extremos, ya que de cualquier modo que se fije dicho punto,

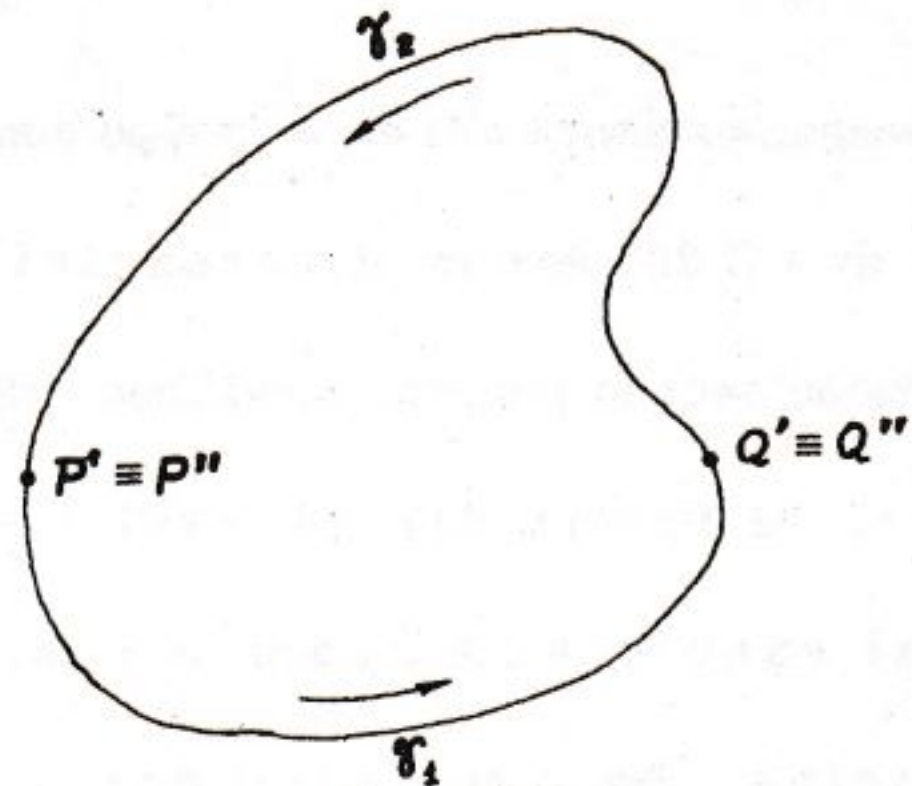


Fig. 32

la integral curvilínea considerada tiene el mismo valor. En efecto; por la propiedad aditiva se tiene (véase fig. 32):

$$\int_{+\gamma(P', P'')} \dots = \int_{\gamma_1(P', Q')} \dots + \int_{\gamma_2(Q', P'')} \dots = \int_{\gamma_2(Q', P')} \dots + \int_{\gamma_1(P', Q'')} \dots = \int_{+\gamma(Q', Q'')} \dots$$

Deseamos hacer notar que a la integral curvilínea (2) se le puede dar un importante significado en la Mecánica. Imaginemos  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  como componentes de una fuerza posicional  $\vec{f}$  aplicada en el punto  $P(x, y, z)$  y observemos que  $dx, dy, dz$  son las componentes de un desplazamiento infinitésimo  $\vec{ds}$  del punto  $P$ .

Por lo tanto, la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy + Z dz$  representa el producto escalar de los dos vectores  $\vec{f}$ ,  $\vec{ds}$  y, por ende, el trabajo elemental  $dL$  realizado por  $\vec{f}$  como consecuencia del desplazamiento  $\vec{ds}$  de su punto de aplicación. Haciendo describir al punto  $P$  el arco  $\gamma$  en el sentido fijado e imaginando descompuesto  $\gamma$  en arquitos infinitésimos, surge inmediatamente de las definiciones (3) y (6) que la integral curvilínea (2) representa la suma de todos los trabajos elementales  $dL$  cumplidos por  $\vec{f}$  como consecuencia de sucesivos desplazamientos de  $P$  sobre tales arquitos, de modo que la integral curvilínea (2) representa el trabajo total desarrollado por la fuerza  $\vec{f}(x, y, z)$  cuando su punto de aplicación



$P(x,y,z)$  describe  $\gamma$  en el sentido fijado.

Supongamos ahora que en el campo conexo  $A$  la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy + Z dz$  sea un diferencial exacto y veamos qué consecuencias se deducen para la integral curvilínea (2).

I - Si la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy + Z dz$  es un diferencial exacto en el campo conexo  $A$  y tiene como integral a la función  $F(x,y,z)$ , elegidos arbitrariamente en  $A$  dos puntos  $P'(x',y',z')$ ,  $P''(x'',y'',z'')$ , y un arco de curva generalmente regular  $\gamma$  que los tenga a dichos puntos por extremos, resulta

$$\int_{\gamma(P',P'')} X dx + Y dy + Z dz = F(x'',y'',z'') - F(x',y',z') \quad (*)$$

Por lo tanto, la integral curvilínea considerada tiene un valor que depende solamente de los puntos  $P', P''$ , no dependiendo para nada del arco  $\gamma$  elegido para unir dichos puntos.

Dem. Supongamos primeramente que  $\gamma$  sea un arco de curva regular, con (1) como ecuaciones paramétricas. Aplicando la (3) y teniendo en cuenta que  $X = F_x$ ,  $Y = F_y$ ,  $Z = F_z$ , puede escribirse

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(P',P'')} X dx + Y dy + Z dz &= \\ &= \int_{t'}^{t''} \left\{ F_x[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + F_y[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + \right. \\ &\quad \left. + F_z[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \right\} dt \end{aligned}$$

Por el teorema de derivación de las funciones compuestas (Cap. XVI, n° 4), la

(\*) Sabemos, (n° 1, teor. I) que  $F$  está determinada salvo una constante aditiva; se puede por lo tanto afirmar que el incremento de  $F$  escrito en el segundo miembro de (7) queda unívocamente determinado.



expresión entre llaves es igual a  $\frac{d}{dt} F [x(t), y(t), z(t)]$ , teniéndose

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(P', P'')} X dx + Y dy + Z dz &= \int_{t'}^{t''} \frac{d}{dt} F [x(t), y(t), z(t)] dt = \\ &= F [x(t''), y(t''), z(t'')] - F [x(t'), y(t'), z(t')] = \\ &= F (x'', y'', z'') - F (x', y', z') . \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $\gamma$  sea un arco de curva generalmente regular, constituido por  $m$  arcos regulares  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  de puntos extremos  $(P', P_1), (P_1, P_2), \dots, (P_{m-1}, P'')$ , respectivamente. Entonces, aplicando la (6) y teniendo en cuenta el resultado ya establecido para los arcos regulares, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(P', P'')} X dx + Y dy + Z dz &= [F(P_1) - F(P')] + [F(P_2) - F(P_1)] + \dots + \\ &+ [F(P'') - F(P_{m-1})] = F(P'') - F(P') , \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

En el caso en que  $\gamma$  sea una curva cerrada, es decir cuando  $P' \equiv P''$  que implica  $F(P') = F(P'')$ , el teorema precedente proporciona este otro:

II - Si la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy + Z dz$  es un diferencial exacto en el campo conexo  $A$ , fijada arbitrariamente en  $A$  una curva cerrada (generalmente regular), resulta

$$\int_{\pm \gamma} X dx + Y dy + Z dz = 0 . \quad (8)$$

Nótese que para las integrales curvilíneas de diferenciales exactos se puede, en lugar de (2), adoptar la notación

$$\int_{P'}^{P''} X dx + Y dy + Z dz \quad \text{o también} \quad \int_{(x', y', z')}^{(x'', y'', z'')} X dx + Y dy + Z dz , \quad (9)$$

ya que, por el teor. I, es inútil la especificación de la curva  $\gamma$ .

Otra importante consecuencia del teor. I es la siguiente:

III - Si la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy + Z dz$  es un diferencial exacto en el campo conexo  $A$ , su integral  $F(x, y, z)$  es tá dada por la fórmula



$$F(x, y, z) = C + \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} X(u, v, w) du + Y(u, v, w) dv + Z(u, v, w) dw, \quad (10)$$

donde  $(x_0, y_0, z_0)$  es cualquier punto fijado en  $A$ ,  $(x, y, z)$  es un punto variable en  $A$ , y  $C$  es una constante arbitraria.

Dem. La (10) no es sino la (7) aplicada a dos puntos  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(x, y, z)$  y en la que se ha puesto  $C = F(x_0, y_0, z_0)$  (valor que, por el teor. I del n<sup>o</sup> precedente, puede ser dado arbitrariamente). Observemos que en la (10) hemos indicado con tres letras  $u, v, w$  las variables de integración, con el objeto de no crear confusión con las coordenadas del punto variable  $(x, y, z)$ , del que resulta dependiente la función  $F$  (cfr. Cap. IX, n<sup>o</sup> 6).

El teor. III es evidentemente el análogo del teorema de Torricelli - Barrow y resuelve el problema de encontrar la integral de un diferencial exacto; sin embargo, para poder aplicarlo es necesario saber previamente que la forma diferencial lineal dada es un diferencial exacto. Por lo tanto, el teor. III debe completarse con la búsqueda de criterios útiles para reconocer con facilidad si una forma diferencial es o no un diferencial exacto. Tal búsqueda da lugar a estudios bastante amplios que comenzaremos en el n<sup>o</sup> sucesivo y proseguiremos en el Cap. XXIV.

---

Obsérvese que a los teoremas I y II puede dárseles la siguiente interpretación mecánica. Si las componentes  $X, Y, Z$  de la fuerza posicional  $\vec{f}$  son tales que el trabajo elemental  $X dx + Y dy + Z dz$  resulta ser un diferencial exacto, vale decir, si existe una función  $F(x, y, z)$  tal de cumplir  $X = \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $Y = \frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $Z = \frac{\partial F}{\partial z}$ , se dice que la fuerza  $\vec{f}$  es conservativa y que admite el potencial  $V(x, y, z) = -F(x, y, z)$ . En ese caso, del teorema I sigue que el trabajo realizado por la fuerza conservativa  $\vec{f}$  mientras su punto de a



plicación  $P$  se traslada de la posición  $P'$  a la  $P''$ , resulta igual a  $V(P') - V(P'')$  (diferencia del potencial) y, por lo tanto, depende solamente de  $P'$  y  $P''$  y no del camino que recorrió  $P$ . El teor. II expresa que resulta nulo el trabajo realizado por  $\vec{f}$  cuando  $P$  describe cualquier camino cerrado.

Los teoremas I, II, III valen para formas diferenciales en dos variables  $X dx + Y dy$ ; bastará introducir algunas modificaciones obvias en los enunciados, que dejamos al lector precisar.

### 3 - CONDICIONES PARA QUE UNA FORMA DIFERENCIAL LINEAL SEA UN DIFERENCIAL EXACTO.

Como ya se dijo, para que el teorema III del n° precedente sea eficaz, se hace necesario determinar las condiciones que aseguren que  $X dx + Y dy + Z dz$  es un diferencial exacto.

Comencemos demostrando el siguiente teorema:

I - Condición necesaria y suficiente para que la forma diferencial lineal sea un diferencial exacto en el campo conexo  $A$  es que, para toda curva simple y cerrada (generalmente regular) (\*) trazada en  $A$  resulte

$$\int_{\gamma} X dx + Y dy + Z dz = 0 \quad (1)$$

Dem. La necesidad de la condición ya está expresada por el teor. II del n° precedente. Demostraremos la suficiencia haciendo ver que si vale la (1) para toda curva simple cerrada, la forma  $X dx + Y dy + Z dz$  es un diferencial exacto.

Comencemos probando que de la hipótesis (1) sigue que, elegidos arbitraria

(\*) Recordemos (Cap. X, n° 10) que una curva cerrada se denomina simple cuando carece de puntos múltiples. El teorema podría también enunciarse diciendo simplemente "para toda curva cerrada  $\gamma$ "; pero permanece válido (como condición suficiente), también en el caso en que nos limitemos a pedir que la (1) subsista solamente "para toda curva simple y cerrada  $\gamma$ ".



mente en A dos puntos  $P'$ ,  $P''$  y una curva  $\gamma_1$  que los una, la integral curvilínea  $\int_{\gamma(P', P'')} X dx + Y dy + Z dz$  tiene un valor independiente de la elección de  $\gamma_1$  (es decir, depende solamente de  $P'$  y  $P''$ ).

Tomemos ahora otra curva  $\gamma_2$  que una a  $P'$  y  $P''$ . Si tiene en común solamente los extremos (fig. 33 a), resulta claro que recorriendo  $\gamma_1$  de  $P'$  a  $P''$  y luego  $\gamma_2$  de  $P''$  a  $P'$  se obtiene una curva simple cerrada  $\gamma$ ; por la hipótesis (1) será entonces

$$\int_{\gamma_1(P', P'')} \dots + \int_{\gamma_2(P'', P')} \dots = 0$$

o sea

$$\int_{\gamma_1(P', P'')} \dots = \int_{\gamma_2(P', P'')} \dots$$

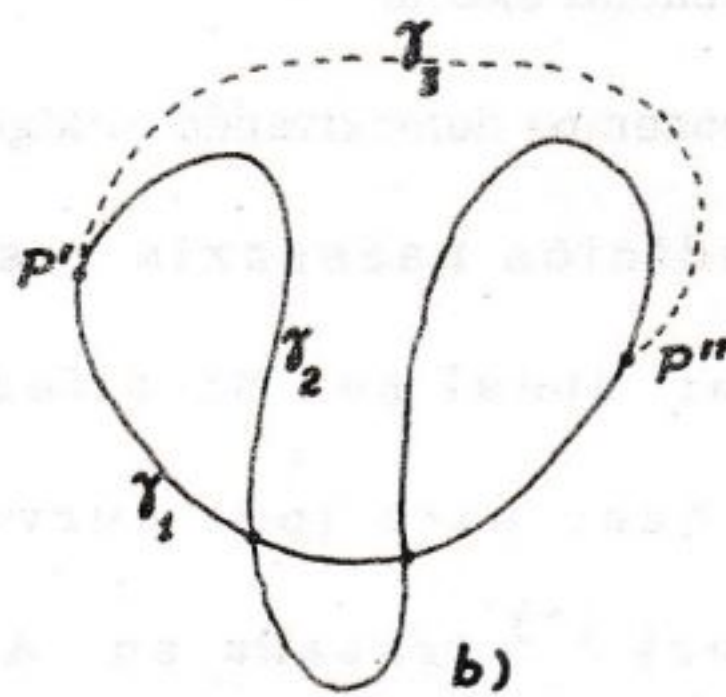
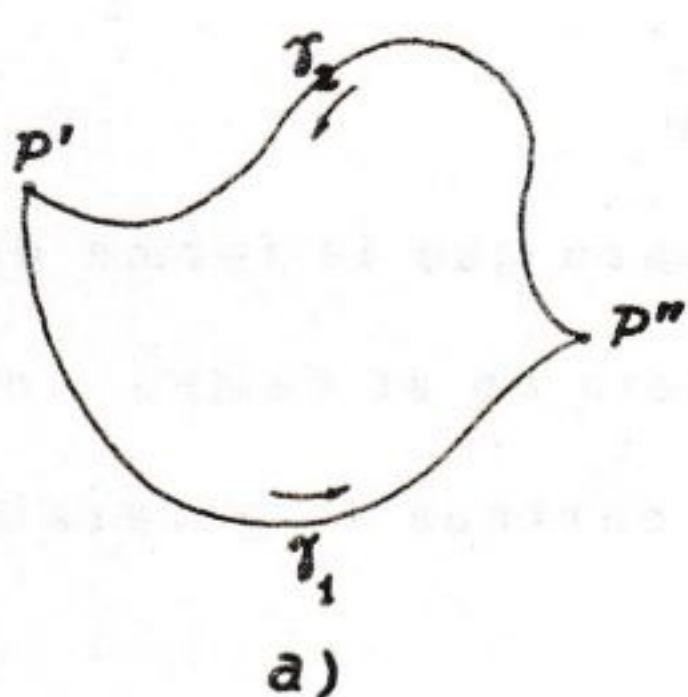


Fig. 33

Si, en cambio,  $\gamma_1$  tiene otros puntos en común con  $\gamma_2$  (fig 33 b), podemos trazar en A una tercer curva  $\gamma_3$  que una  $P'$  con  $P''$  y que tenga solamente estos dos puntos en común con  $\gamma_1$  y con  $\gamma_2$ . Por lo que se acaba de demostrar, se tendrá

$$\int_{\gamma_1(P', P'')} \dots = \int_{\gamma_3(P', P'')} \dots, \quad \int_{\gamma_2(P', P'')} \dots = \int_{\gamma_3(P', P'')} \dots$$

por lo que permanece válida la (2), quedando así totalmente probada nuestra afirmación inicial.



Fijemos ahora en  $A$  un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y designemos con  $P(x, y, z)$  a un punto genérico de  $A$ . En virtud de la propiedad recién demostrada, la integral curvilínea de nuestra forma, extendida a cualquier curva que una  $P_0$  con  $P$ , tendrá un valor que dependerá solamente de  $P_0$  y  $P$ , o mejor aún, solo de  $P$  (siendo  $P_0$  fijo). Tal integral, para la que podemos adoptar la notación (9) del n° precedente, es entonces una función  $F(x, y, z)$  definida en  $A$  a través de

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} X(u, v, w) du + Y(u, v, w) dv + Z(u, v, w) dw. \quad (3)$$

Llegaremos a la tesis haciendo ver que esta función  $F(x, y, z)$  es una integral de la forma  $X dx + Y dy + Z dz$ , o sea demostrando que: 1°)  $F(x, y, z)$  es continua en  $A$ ; 2°) subsisten las

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X(x, y, z), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y(x, y, z), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z(x, y, z). \quad (4)$$

Sea  $C$  una esfera de centro  $P$ , contenida en el campo  $A$ , y sea  $M$  un número positivo que mayor en  $C$  a las tres funciones continuas  $|X|$ ,  $|Y|$ ,  $|Z|$ . En el pasaje de  $P$  a otro punto  $Q \in C$ , la función (3) sufre el incremento

$$\Delta F = \int_{P_0}^Q \dots - \int_{P_0}^P \dots = \int_P^Q \dots, \quad (5)$$

con la última integral extendida sobre una curva cualquiera  $\gamma$  que una  $P$  con  $Q$  y que podemos suponer trazada en  $C$ . Si a tal integral la suponemos expresada según la definición (3) del n° precedente, sigue inmediatamente:

$$|\Delta F| \leq \left| M \int_{t'}^{t''} \{ |x'(t)| + |y'(t)| + |z'(t)| \} dt \right| \leq \sqrt{3} M \left| \int_{t'}^{t''} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \right| = \sqrt{3} M l,$$

donde  $l$  denota la longitud de  $\gamma$  (Cap. X, n° 11). En particular, eligiendo

como  $\gamma$  el segmento  $PQ$  se obtiene  $\Delta F \leq \sqrt{3} M \overline{PQ}$  y entonces

$\lim_{Q \rightarrow P} \Delta F = 0$ , vale decir, la continuidad de la  $F$ .



Demostremos, finalmente, la primera de las (4). En el pasaje de  $P(x, y, z)$  a  $Q(x + \Delta x, y, z)$  la  $F$  sufre el incremento  $\overline{\Delta F}$  [cfr. con (5)]:

$$F = \int_{P(x, y, z)}^{Q(x + \Delta x, y, z)} X(u, v, w) du + Y(u, v, w) dv + Z(u, v, w) dw \quad (6)$$

Si  $|\Delta x|$  es suficientemente pequeño todo el segmento  $PQ$  estará contenido en  $A$  y puede ser elegido como camino de integración. Tal segmento, paralelo al eje  $x$ , puede representarse con las ecuaciones paramétricas  $u=t$ ,  $v=y=\text{constante}$ ,  $w=z=\text{constante}$ ; entonces, aplicando la definición (3) del número precedente, teniendo en cuenta que  $u' = 1$ ,  $v' = w' = 0$  y que el parámetro  $t$  debe obviamente variar entre  $x$  y  $x + \Delta x$ , se obtiene de la (6)

$$\Delta F = \int_x^{x + \Delta x} X(t, y, z) dt$$

Aplicando a esta integral definida el teorema de la media, se obtiene:

$$\Delta F = \Delta x \cdot X(\xi, y, z)$$

donde  $\xi$  denota un conveniente punto del intervalo que tiene por extremos los puntos  $x$ ,  $x + \Delta x$ . Sigue  $\frac{\Delta F}{\Delta x} = X(\xi, y, z)$  y, por lo tanto, observando que para  $\Delta x \rightarrow 0$  resulta  $\xi \rightarrow x$  y teniendo presente la continuidad de la función  $X$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = X(x, y, z),$$

es decir, la primera de las (4), que es lo que queríamos demostrar.

Este teorema responde al problema que nos habíamos planteado al comienzo de este n.º. Sin embargo, aunque posea gran importancia teórica, no proporciona un criterio de aplicación práctica para reconocer si  $X dx + Y dy + Z dz$  es o no un diferencial exacto.

Para obtener tal criterio es necesario contentarse con obtenerlo en base a condiciones suficientes.

Estudiaremos ahora esta cuestión haciendo, sobre las funciones  $X, Y$ ,



$Z$  , otras hipótesis: precisamente que, en el campo conexo  $A$  , dichas funciones admitan derivadas parciales primeras continuas.

Con estas nuevas hipótesis, ya contamos desde el n<sup>o</sup> 1 (teor. II y III) las condiciones necesarias para que una forma sea un diferencial exacto. Recordemoslas:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \text{para la forma en dos variables } X dx + Y dy \quad (7)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} , \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} , \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{para la forma} \quad (8)$$

en tres variables  $X dx + Y dy + Z dz$  ;

es natural ahora preguntarse si las mismas serán o no también suficientes.

Con un ejemplo haremos ver que, en general, no lo son.

Consideremos la forma diferencial lineal en dos variables

$$X dx + Y dy = - \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy . \quad (9)$$

Las funciones  $X$  ,  $Y$  son continuas y admiten derivadas parciales primeras continuas en el campo conexo  $A$  obtenido cuando se prive al plano  $xy$  del origen  $O$  . En tal campo se verifica la condición (7) ya que un fácil cálculo muestra que

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Sin embargo, la forma (9) no es un diferencial exacto. En efecto; si lo fuese debería ser nula su integral curvilínea extendida a cualquier curva simple y cerrada  $\gamma$  contenida en el citado campo  $A$  ; y si tomamos como curva  $\gamma$  una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$  (usando para ella la representación paramétrica  $x = r \cos t$  ,  $y = r \sin t$   $0 \leq t \leq 2\pi$  ), resulta

$$\int_{\gamma} X dx + Y dy = \int_0^{2\pi} \left\{ - \frac{r \sin t}{r^2} (-r \sin t) + \frac{r \cos t}{r^2} r \cos t \right\} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi ,$$



lo que basta para asegurar que no existe en  $A$  una función  $F(x, y)$  que tenga por diferencial total la forma (9). Obsérvese, sin embargo, que a esta afirmación debe dársele un significado bien preciso: ~~no existe ninguna función unifor~~ —  
me y continua en  $A$  que tenga por diferencial total la forma (9). Si se ad  
mitiera funciones multiformes o discontinuas, la anterior afirmación  
no sería ya cierta. En efecto; se verifica inmediatamente que la (9) es el dife-  
rencial total de la función  $\text{arc tg } \frac{y}{x} = \varphi + K\pi$ , donde  $\varphi$  es la anomalía  
del punto  $(x, y)$  y  $K$  un número entero; pero tal función es multiforme (si  
se tiene en cuenta todos sus valores) o discontinua (si se fija una determina-  
ción de la misma).

Este ejemplo muestra que para obtener condiciones suficientes para que una for  
ma diferencial lineal sea un diferencial exacto es necesario todavía agregar a (7)  
o a (8) alguna otra condición. Para alcanzar el objetivo consideraremos por se-  
parado el caso de las formas en dos variables y el de las formas en tres variables.  
Para las primeras llegaremos a enunciar las condiciones suficientes en el n° 5  
tras haber introducido las denominadas fórmulas de Green en el plano;  
para las segundas, en cambio, lo haremos recién en el n° 4 del Cap. sucesivo  
tras haber dado la noción de integral superficial y el teorema de  
Stokes.

#### 4 - FORMULAS DE GREEN EN EL PLANO Y APLICACIONES.

Tales fórmulas sirven para transformar una integral doble en una integral curvi-  
línea y son muy ricas en aplicaciones, como veremos en este número y en los dos  
sucesivos; pero valen subordinadamente a ciertas hipótesis sobre el dominio en el  
cual se considera la integral doble, y debemos, entonces, anteponer algunas defini  
ciones.

Sea  $A$  un dominio del plano  $xy$ . Diremos que es un dominio regular



con respecto al eje  $x$  cuando son verificadas las siguientes dos condiciones (véase fig. 34):

$\alpha$ ) la frontera de  $A$  está constituida por un número finito de curvas regulares que tienen en común, como máximo, sus puntos extremos;

$\beta$ ) trazando un número finito de oportunas paralelas al eje  $y$ , el dominio  $A$  puede descomponerse en un número finito de dominios normales  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , cada uno de ellos normal respecto del eje

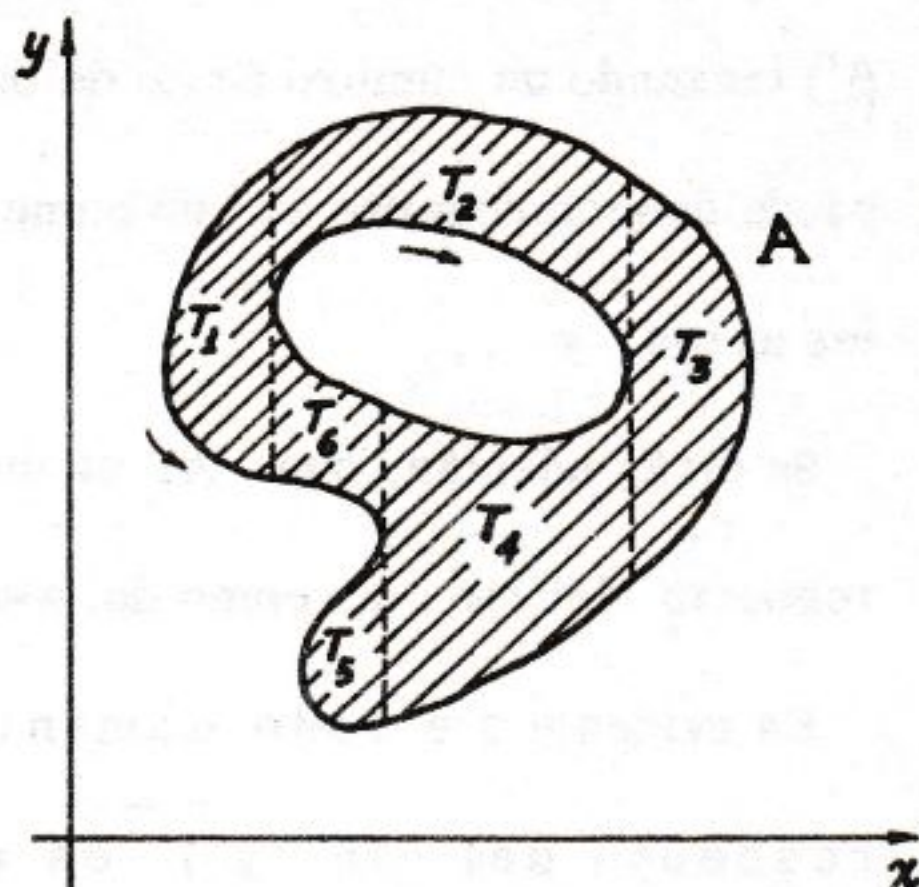


Fig. 34

Cada uno de estos dominios normales será definido por desigualdades del tipo  $a \leq x \leq b$ ,  $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ , con  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  continuas en  $[a, b]$ , y la frontera de los mismos se compondrá, además que de segmentos paralelos al eje  $y$ , de los gráficos en  $[a, b]$  de las dos funciones  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ . Estos gráficos deben formar parte de la frontera de  $A$  y entonces, de la condición  $\alpha$ ) sigue que deben ser curvas generalmente regulares. Obsérvese bien, sin embargo, que este hecho no resultará en general de la representación analítica  $y = \alpha(x)$ ,  $y = \beta(x)$  de tales curvas, sino de alguna oportuna representación paramétrica de las mismas; en particular no está dicho que en todo  $[a, b]$ ,  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  admitan derivada continua. Por ejemplo: el círculo de centro  $O$  y radio 1 es un dominio normal respecto del eje  $x$  definido por  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ ; su frontera es una curva generalmente regular; pero para advertirlo es necesario referirse a la representación paramétrica  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  y no a la representación cartesiana  $y = \pm \sqrt{1-x^2}$  puesto que estas funciones de  $x$  tienen las derivadas infinitas en los puntos  $x = \pm 1$ .



Análogamente se dice que  $A$  es un dominio regular con respecto al eje  $y$  cuando, permaneciendo válida la hipótesis  $\alpha)$ , se tiene en lugar de  $\beta)$  la siguiente:

$\beta')$  trazando un número finito de oportunas paralelas al eje  $x$ , el dominio  $A$  puede descomponerse en un número finito de dominios  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , normales al eje  $y$ .

Se dirá, además, que  $A$  es un dominio regular cuando lo sea tanto respecto del eje  $x$  como del eje  $y$ .

Es evidente que todo dominio regular respecto del eje  $x$  (o respecto del eje  $y$ ) es un dominio acotado y medible.

Sobre cada una de las curvas que componen  $\mathcal{F}A$  consideraremos como sentido positivo aquél según el cual debe moverse un observador para tener siempre a su izquierda el interior de  $A$  (véase fig. 34). Por integral curvilínea de una forma diferencial lineal en 2 variables extendida a la frontera  $\mathcal{F}A$  recorrida en el sentido positivo, entenderemos la suma de las integrales curvilíneas de aquella forma diferencial lineal extendida a las distintas curvas regulares de la que se compone  $\mathcal{F}A$ ; lo indicaremos con  $\int_{+\mathcal{F}A} \dots \dots \dots$  (Es también usado el símbolo  $\oint_{+\mathcal{F}A} \dots \dots \dots$ ).

Hechas estas consideraciones, se tiene el siguiente teorema, que proporciona las anunciadas fórmulas de Green:

I - Si  $A$  es un dominio regular respecto del eje  $y$ , y  $f(x, y)$  una función continua en  $A$  con derivada  $\frac{\partial f}{\partial x}$  continua en él, vale la fórmula:

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = - \int_{+\mathcal{F}A} f dy \quad ; \quad (1)$$

análogamente, si  $A$  es un dominio regular respecto del eje



$x$  y  $g(x,y)$  una función continua en  $A$  con derivada  $\frac{\partial g}{\partial y}$  continua en él, vale la fórmula

$$\iint_A \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = - \int_{+\mathcal{F}A} g dx \quad (*) \quad (2)$$

Dem. Comencemos demostrando la (1) en el caso en que  $A$  sea un dominio normal respecto del eje  $y$ , cuya frontera sea una curva generalmente regular, y que está definido por  $a \leq y \leq b$ ,  $\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$  [véase fig. 35]. Será:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_a^b \left\{ f[\beta(y), y] - f[\alpha(y), y] \right\} dy = \\ &= \int_a^b f[\beta(y), y] dy + \int_b^a f[\alpha(y), y] dy; \end{aligned}$$

por otra parte, la frontera  $\mathcal{F}A$  recorrida en sentido positivo se compone de la curva regular  $x = \beta(y)$ ,  $y = y$  (con  $y$  variable de  $a$  hasta  $b$ ), de un tramo rectilíneo (si existe)  $x = x$ ,  $y = b$  [con  $x$  variando desde  $\beta(b)$  hasta  $\alpha(b)$ ], de la curva regular  $x = \alpha(y)$ ,  $y = y$  (con  $y$  variable de  $b$  hasta  $a$ ) y por último de un tramo rectilíneo (si existe)  $x = x$ ,

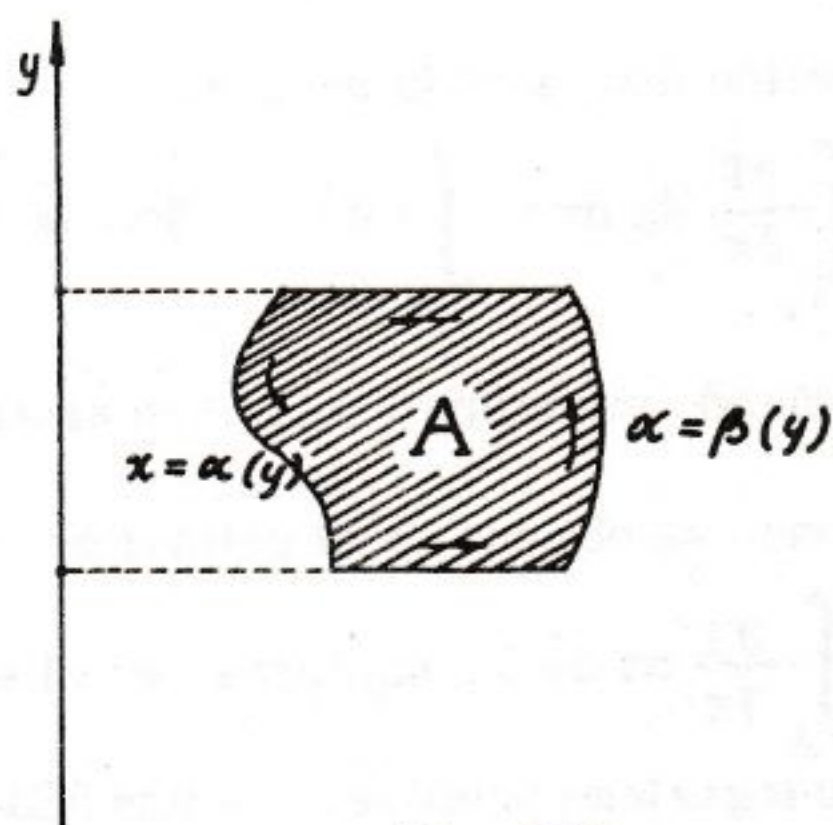


Fig. 35

$y = a$  [con  $x$  variable de  $\alpha(a)$  a  $\beta(a)$ ]. Resultará entonces,

$$\int_{+\mathcal{F}A} f dy = \int_a^b f[\beta(y), y] dy + \int_b^a f[\alpha(y), y] dy$$

y de las fórmulas escritas se obtiene la (1).

Demostremos ahora la (2) en el caso en que  $A$  sea un dominio normal respecto del eje  $x$ , que tenga por frontera una curva generalmente regular; supon-

(\*) Las expresiones  $f dy$  y  $g dx$  son formas diferenciales lineales particulares; en la primera es nulo el coeficiente de  $dx$ , en la segunda el de  $dy$



gámoslo definido por  $a \leq x \leq b$ ,  $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$  / [ver fig. 36]. Se tendrá

$$\int_A \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial g}{\partial y} dy =$$

$$= \int_a^b \left\{ g[x, \beta(x)] - g[x, \alpha(x)] \right\} dx =$$

$$= - \int_b^a g[x, \beta(x)] dx - \int_a^b g[x, \alpha(x)] dx ,$$

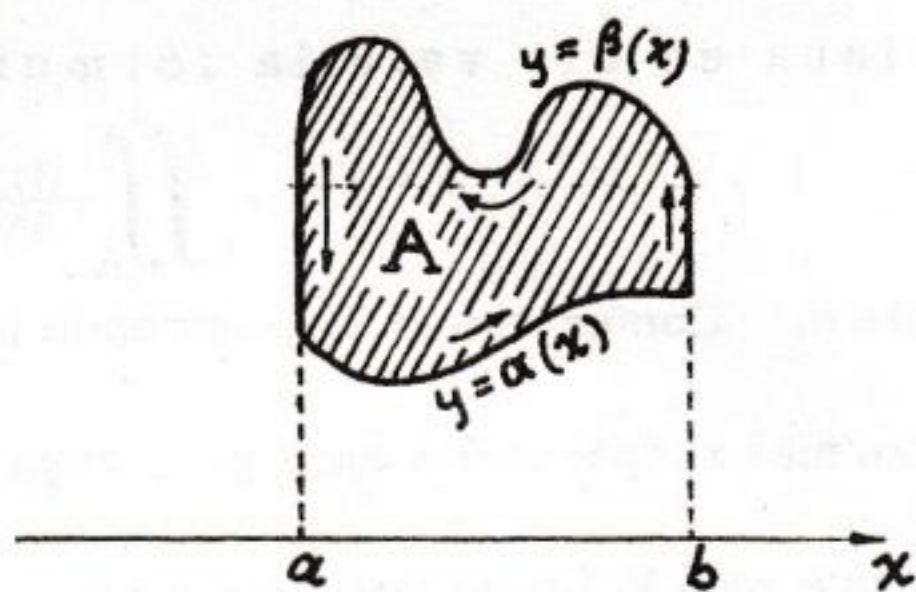


Fig. 36

y se reconoce, como antes, que esta ultima expresión es igual a  $-\int_{\mathcal{F}A} g dx$ .

Mostremos, por último, que la (1) [o la (2)] continúa valiendo si A es cualquier dominio regular respecto del eje y [o del eje x].

Refirámonos, para fijar las ideas, a la (1) y al dominio A de fig. 37. Por

lo recién demostrado se tiene

$$\iint_{T_k} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+\mathcal{F}T_k} f dy, \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

y sumando miembro a miembro estas relaciones se obtiene en el primer miembro

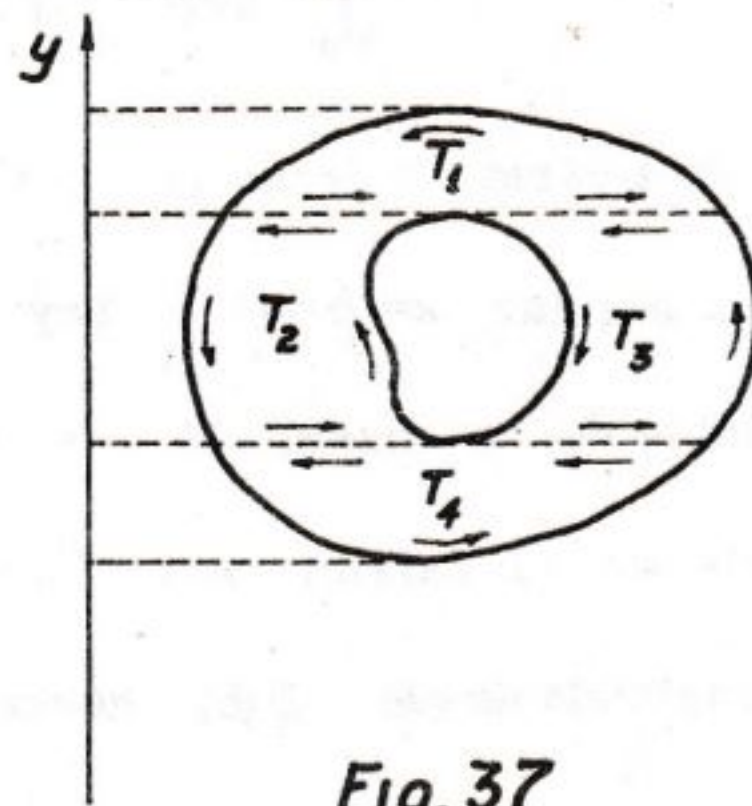


Fig. 37

$\iint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy$ , mientras en el segundo miembro se obtiene  $\int_{+\mathcal{F}A} f dy$  porque las integrales curvilíneas extendidas a aquellos tramos de frontera de  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , que no forman parte de  $\mathcal{F}A$  son todos nulos, ya que, a lo largo de cada uno de esos tramos, se tiene  $y = \text{constante}$  y, en consecuencia,  $dy = 0$ . El teorema queda así totalmente demostrado.

Puede sorprender el distinto signo en los segundos miembros de (1) y (2), ya que se podría pensar que era suficiente para pasar de la primer fórmula a la segunda, cambiar entre sí las variables  $x$  e  $y$ ; pero debe tenerse presente que, haciendo tal cambio, se deberían cambiar también los términos izquierda y derecha, mientras que en ambas fórmulas habíamos convenido en asumir co



mo sentido positivo sobre la frontera de  $A$  aquel sentido que dejase al interior de  $A$  a la izquierda.

Examinemos ahora algunas importantes consecuencias de las fórmulas de Green.

1<sup>o</sup>) Teorema de la divergencia. Si  $A$  es un dominio regular valen si -  
multáneamente (1) y (2), que sumados dan

$$\iint_A \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{+\tilde{F}A} f dy - g dx \quad (3)$$

Esta fórmula expresa el que se denomina teorema de la divergencia so  
bre el que retornaremos en el n<sup>o</sup> 6.

2<sup>o</sup>) Fórmula de integración por partes para las integrales do-  
bles. Si  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  son funciones continuas, como también sus deriva-  
das parciales  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , en el dominio  $A$  regular con respecto al eje  $y$   
se tendrá por la (1):

$$\iint_A \frac{\partial(uv)}{\partial x} dx dy = \int_{+\tilde{F}A} u v dy,$$

de donde

$$\iint_A u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \int_{+\tilde{F}A} u v dy - \iint_A v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \quad (4)$$

Análogamente si, además de  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  son contínuas también sus deri-  
vadas  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  en el dominio  $A$  regular respecto del eje  $x$ , se  
obtiene de la (2)

$$\iint_A u \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = - \int_{+\tilde{F}A} u v dy - \iint_A v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy \quad (5)$$

Las (4) y (5) son de tipo análogo a la fórmula de integración por partes vis-  
ta para las integrales simples. Sobre estas fórmulas volveremos en el n<sup>o</sup> 6.

3<sup>o</sup>) Fórmula de reducción para las integrales dobles. Supongamos  
tener que calcular la integral doble  $\iint_A f(x, y) dx dy$ , siendo  $A$  un dominio re



gular respecto del eje  $y$ , en el que la  $f(x, y)$  es continua. Supóngase, además, que de la  $f(x, y)$ , pensada como función solamente de la  $x$ , se conozca su primitiva  $F(x, y)$ ; se podrá entonces escribir  $\iint_A f \, dx \, dy = \iint_A \frac{\partial F}{\partial x} \, dx \, dy$  y, por la (1) :

$$\iint_A f \, dx \, dy = \int_{\mathcal{F}A} F \, dy, \quad (6)$$

con lo que el cálculo de la integral doble considerada ha sido trasladado al de una integral curvilínea, es decir, al de una integral simple.

Análogamente, si  $A$  es regular respecto del eje  $x$  y si de la  $f(x, y)$ , pensada como función solamente de  $y$ , se conoce la primitiva  $G(x, y)$ , se obtiene de la (2) :

$$\iint_A f \, dx \, dy = - \int_{\mathcal{F}A} G \, dx. \quad (7)$$

Las (6) y (7) se aplican mucho en la práctica. Se desea, por ejemplo, calcular la integral doble  $\iint_A x^2 y^2 \, dx \, dy$  donde  $A$  es el dominio limitado por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (de ecuaciones paramétricas  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ). Realicemos el cálculo aplicando la (6). Se encuentra

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 y^2 \, dx \, dy &= \iint_A \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{3} x^3 y^2 \right) \, dx \, dy = \frac{1}{3} \int_{\mathcal{F}A} x^3 y^2 \, dy = \\ &= \frac{1}{3} a^3 b^3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \, dt = \frac{4}{3} a^3 b^3 \int_0^{\pi/2} (\cos^4 t - \cos^6 t) \, dt = (*) \\ &= \frac{4}{3} a^3 b^3 \left( \frac{3\pi}{16} - \frac{5\pi}{32} \right) = \frac{\pi}{24} a^3 b^3. \end{aligned}$$

4<sup>o</sup>) Área de un dominio plano por medio de una integral curvilínea extendida a la frontera. En particular para  $f=1$  (y, por ende,  $F=x$ ) de la (6) se deriva que el área de un dominio plano regular respecto del ej  $y$  está expresada por la fórmula  $\text{área } A = \int_{\mathcal{F}A} x \, dy$  como también, de la (7), surge que el área de un dominio plano regular respecto del eje  $x$  está da-

-----  
(\*) Véase Cap. IX, n<sup>o</sup> 11.



da por área  $A = - \int_{+\mathcal{F}A} y \, dx$ . Sumando miembro a miembro las dos fórmulas re-

cién indicadas, se tiene que el área de un

dominio regular  $A$  puede expresarse

como sigue

$$\text{área } A = \frac{1}{2} \int_{+\mathcal{F}A} (x \, dy - y \, dx) .$$

Por ejemplo, para el área del dominio

$A$  (ver fig. 38) limitado por la curva de

ecuaciones paramétricas  $x = a \cos^3 t$ ,

$y = a \sin^3 t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  (asteroide),

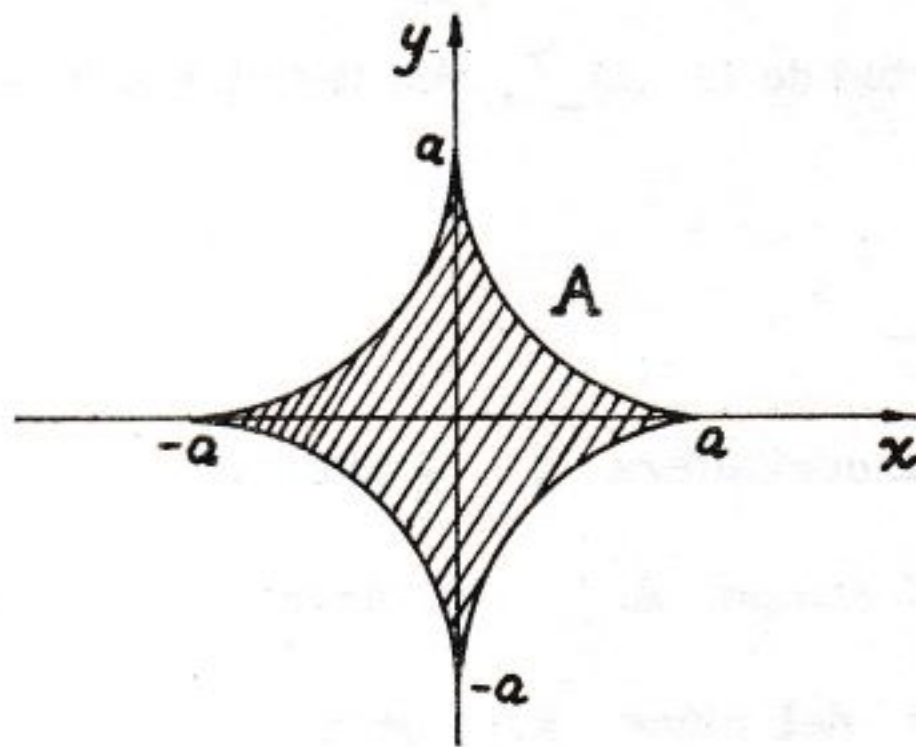


Fig. 38

se tiene

$$\begin{aligned} \text{área } A &= \frac{1}{2} \int_{+\mathcal{F}A} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \sin t) \, dt = \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \, dt = \frac{3}{8} \pi a^2 \end{aligned}$$

## 5 - CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE UNA FORMA LINEAL EN DOS VARIABLES SEA UN DIFERENCIAL EXACTO.

Dada la forma diferencial lineal  $X \, dx + Y \, dy$ , supongamos que las funciones  $X$ ,  $Y$  sean, junto con sus derivadas parciales primeras, continuas en un cierto campo conexo  $A$  del plano  $xy$ ; sea además satisfecha en  $A$  la condición

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (1)$$

que sabemos es necesaria (pero en general no suficiente) para que la forma sea en

$A$  un diferencial exacto. Se tiene el siguiente teorema:

I - Si vale la (1), fijado arbitrariamente un dominio regular  $D$  contenido en  $A$  resulta

$$\int_{+\mathcal{F}D} X \, dx + Y \, dy = 0 \quad (2)$$

Dem. Del teorema de la divergencia [véase la (3) del n° precedente] aplicado



al dominio  $D$  y a las funciones  $f = Y$ ,  $g = -X$  se obtiene

$$\iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma_D} X dx + Y dy ;$$

pero el primer miembro vale cero [en virtud de la (1)], con lo que queda demostrada la (2).

Tras este teorema, consideremos una curva cualquiera  $\gamma$  (generalmente regular) simple y cerrada trazada en el campo  $A$ . Tal curva  $\gamma$  será siempre la frontera de un dominio regular  $D$  del plano  $xy$ ; pero, ¿podrá afirmarse que  $D$  está contenido en el campo  $A$ ? Es evidente (véase fig. 39) que hay casos en que la respuesta es afirmativa y otros en que es negativa.

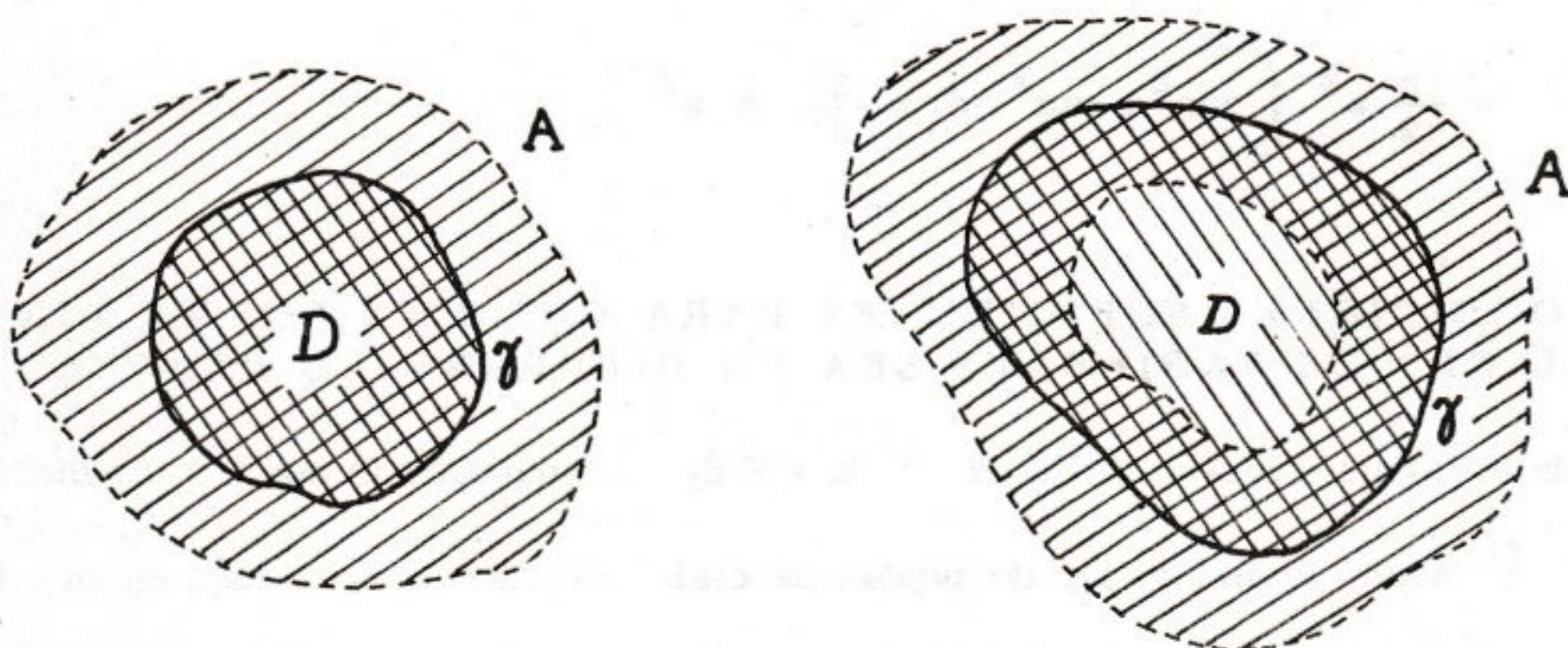


Fig. 39

Diremos que un campo conexo  $A$  del plano  $xy$  es un campo simplemente conexo cuando toda curva simple y cerrada trazada en  $A$  es la frontera de un dominio regular  $D$  contenido en  $A$ .

Por ejemplo, un campo circular, un intervalo abierto, un semiplano abierto, el plano, son campos simplemente conexos; en cambio, una corona circular abierta, el plano privado de un punto, son campos conexos, sin ser simplemente conexos ... Se puede decir, en general, que un campo simplemente conexo no presenta agujeros o lagunas (eventualmente reducidos a puntos o líneas).



Podemos ahora demostrar el siguiente teorema fundamental que señala las condiciones suficientes para que  $X dx + Y dy$  sea un diferencial exacto:

II - Dada la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy$ , con  $X, Y$  continuas junto a sus derivadas parciales primeras en el campo conexo  $A$ , si en todo punto de  $A$  se verifica la  $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$  y si el campo  $A$  es simplemente conexo, entonces la forma dada es en  $A$  un diferencial exacto.

Dem. Puesto que  $A$  es simplemente conexo, elegida arbitrariamente en  $A$  una curva  $\gamma$  simple y cerrada, será la frontera de un dominio regular  $D$  contenido en  $A$ . Siendo además válida la  $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ , el teorema I nos asegura que resulta  $\int_{\pm \gamma} X dx + Y dy = 0$ , vale decir,  $\int_{\pm \gamma} X dx + Y dy = 0$ . Entonces, siendo nula la integral curvilínea de la forma sobre cualquier curva simple y cerrada contenida en  $A$ , basta aplicar el teor. I del n° 3 para concluir que  $X dx + Y dy$  es un diferencial exacto, que es lo que queríamos demostrar.

Con el precedente teorema se tiene un criterio de simple aplicación práctica para reconocer si una forma diferencial lineal en dos variables es un diferencial exacto en un campo dado  $A$ . Si de su utilización resulta que la forma es un diferencial exacto, el cálculo de la integral  $F(x, y)$  de la forma se efectúa aplicando el teor. III del n° 2, según el que se tiene

$$F(x, y) = C + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} X(u, v) du + Y(u, v) dv \quad (3)$$

El camino de integración  $\gamma$  entre los puntos  $P(x_0, y_0)$  y  $P(x, y)$  puede ser elegido arbitrariamente en  $A$ ; eso permite, deseando calcular efectivamente la integral curvilínea, elegirlo de modo de simplificar lo más posible dichos cálculos. Por ejemplo, si  $A$  es un intervalo abierto, o un semiplano, o el plano, puede ser conveniente elegir  $\gamma$  coincidente con una poligonal de dos lados paralelos a los



ejes, o inclusive con el segmento  $P_0P$ .

Demos, a propósito, un simple ejemplo. Dada la forma

$$X dx + Y dy = (y \operatorname{sen} 2x + \cos^2 y) dx + (\operatorname{sen}^2 x - x \operatorname{sen} 2y) dy, \quad (4)$$

que puede ser considerada en todo el plano, se tiene

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2y$$

y, por lo tanto, dado que el campo conside

rado es simplemente conexo, puede afir

marse que la (4) es un diferencial exac

to en todo el plano. Aplicando la (3), a

sumiendo por ejemplo  $x_0 = y_0 = 0$  se en

cuentra que la integral de la (4) está da

da por

$$F(x, y) = C + \int_{(0,0)}^{(x,y)} (v \operatorname{sen} 2u + \cos^2 v) du + (\operatorname{sen}^2 u - u \operatorname{sen} 2v) dv,$$

en la que podemos tomar como camino de integración la línea quebrada de la figura 40.

Encontramos, entonces, (siendo  $dv = 0$  sobre el 1<sup>er</sup> lado,  $du = 0$  sobre el segundo) :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= C + \int_0^x du + \int_0^y (\operatorname{sen}^2 x - x \operatorname{sen} 2v) dv = \\ &= C + x + y \operatorname{sen}^2 x - x \frac{1 - \cos 2y}{2} = C + x + y \operatorname{sen}^2 x - x \operatorname{sen}^2 y = \\ &= C + y \operatorname{sen}^2 x - x \cos^2 y \end{aligned}$$

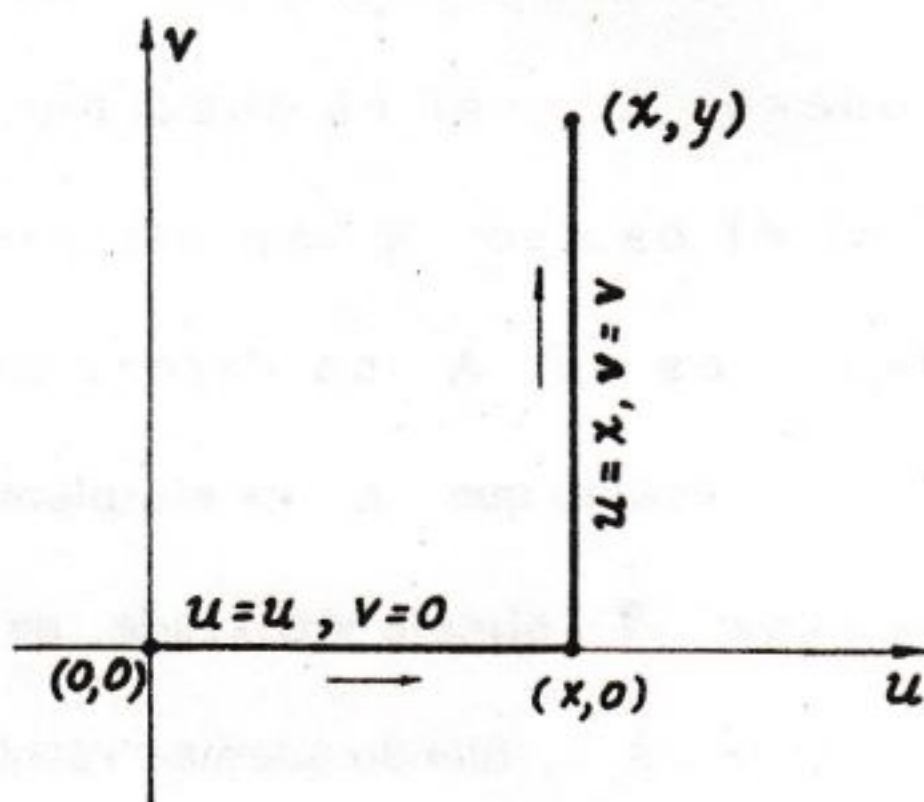


Fig. 40

El teor. II agrega a la hipótesis (1) aquélla de que  $A$  sea un campo simplemente conexo; es posible dar otros teoremas del mismo tipo agregando a la (1) otras hipótesis que no se refieren al campo  $A$ , sino todavía a las funciones  $X$  e  $Y$ . Un ejemplo está dado por el siguiente teorema:

III - Sea la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy$ , con  $X, Y$ , con



tinuas y con derivadas parciales primeras continuas en el campo conexo  $A$ ; si en cada punto de  $A$  se verifica la  $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$  y si las funciones  $X$ ,  $Y$  son homogéneas del mismo grado de homogeneidad  $\alpha \neq -1$ , entonces la forma dada es en  $A$  un diferencial exacto y su integral está expresada por

$$F = C + \frac{1}{\alpha + 1} (x X + y Y) \quad . \quad (5)$$

Dem. La (5) define una función continua en  $A$  y, para probar el teorema, basta verificar las  $\frac{\partial F}{\partial x} = X$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y} = Y$ . Tomemos, por ejemplo, la primera.

De (5) se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\alpha + 1} \left( X + x \frac{\partial X}{\partial x} + y \frac{\partial Y}{\partial x} \right)$$

y, teniendo en cuenta la hipótesis  $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\alpha + 1} \left( X + x \frac{\partial X}{\partial x} + y \frac{\partial X}{\partial y} \right) ;$$

pero, por el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas (Cap. XVI, n° 8),

se tiene  $x \frac{\partial X}{\partial x} + y \frac{\partial X}{\partial y} = \alpha X$ , de lo que resulta

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\alpha + 1} (X + \alpha X) = X ,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Nótese que la (5) proporciona la integral  $F$  de la forma diferencial directamente, es decir, sin requerir cálculo de integrales; pero puede aplicarse solamente en casos muy particulares.

## 6 - INTEGRAL CURVILINEA DE UNA FUNCION Y DISTINTAS APLICACIONES.

Junto a las integrales curvilíneas de formas diferenciales lineales que hemos definido en el n° 2, conviene introducir otro tipo de integral curvilínea que llamaremos integral curvilínea de una función y que es útil en varias cuestiones. Como en el n° 2 nos referiremos a funciones de tres variables, resultando como caso particular de las mismas, el de funciones de dos



variables.

Sea  $A$  un campo conexo del espacio  $xyz$  y  $C$  una curva regular de ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \quad , \quad (a \leq t \leq b) \quad , \quad (1)$$

contenida en  $A$ . Supongamos fijada sobre  $C$  una abscisa curvilínea  $s$  (y, por lo tanto, un sentido positivo) y entonces tengamos presente también las ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(s) \quad , \quad y = \psi(s) \quad , \quad z = \chi(s) \quad , \quad (s_0 \leq s \leq s_1) \quad , \quad (2)$$

introducidas en el Cap. X, n° 11.

Resulta evidente que la curva  $C$  puede ser considerada como un eje de abscisas sobre el que se representan los valores de la variable  $s$ ; aparece, por lo tanto, como posible definir sobre  $C$  integrales de una función análogas a las integrales definidas que hemos introducido para funciones de la variable  $x$ .

Supongamos dada una función continua  $f(x, y, z)$  definida en  $A$  (o también solamente definida en los puntos de  $C$ ). Supongamos, además, fijado sobre  $C$  dos puntos  $P'$ ,  $P''$  correspondientes a  $s=s'$  y  $s=s''$  respectivamente, y designemos con  $\gamma$  al arco por ellos individualizado. Llamaremos integral curvilínea de la función  $f(x, y, z)$ , extendida al arco  $\gamma$  en el sentido de  $P'$  a  $P''$  y la denotaremos con el símbolo

$$\int_{\gamma(P', P'')} f(x, y, z) ds \quad (3)$$

al número definido por la

$$\int_{\gamma(P', P'')} f(x, y, z) ds = \int_{s'}^{s''} f[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)] ds \quad (4)$$

donde el segundo miembro es una integral definida ordinaria.

Como en el n° 2 se puede observar que en la (4) hemos evidenciado el hecho de considerar  $\gamma$  en el sentido de  $P'$  a  $P''$  poniendo en la integral del 2º miembro  $s'$  como límite inferior y  $s''$  como límite superior de integración.



Puede también considerarse la integral extendida a  $\gamma$  en el sentido de  $P''$  a  $P'$ ; en tal caso se deben poner en el segundo miembro de (4) los límites  $s''$  y  $s'$ , por lo que resulta

$$\int_{\gamma(P'', P')} f(x, y, z) ds = - \int_{\gamma(P', P'')} f(x, y, z) ds. \quad (5)$$

Es fácil verificar que el valor de la integral (3) no depende de la elección del origen de los arcos sobre la curva  $C$ ; depende, en cambio, del sentido positivo fijado sobre  $C$  (cambiando tal sentido, la integral cambia de signo<sup>(\*)</sup>); pero esto no tiene importancia porque sabemos que la curva  $C$  ha sido orientada una vez y luego tal orientación no se modifica.

De la (4), poniendo en particular  $f \equiv 1$ , sigue

$$\int_{\gamma(P', P'')} ds = s'' - s', \quad (6)$$

de modo que la integral indicada proporciona la longitud, con signo, del arco  $\gamma$  orientado de  $P'$  a  $P''$ .

Observemos que para el cálculo de la integral curvilínea (3) no es necesario contar con la representación paramétrica (2) de la curva  $C$ ; nos podemos muy bien bastar con la (1). En efecto; el arco  $s$  es una cierta función  $s=s(t)$  del parámetro  $t$  y se tiene  $\varphi[s(t)] = x(t)$ ,  $\psi[s(t)] = y(t)$ ,  $\chi[s(t)] = z(t)$ , valiéndose, además, la fórmula  $s'(t) = \pm \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$  (con signo  $+$  o con signo  $-$  según que el sentido de las  $t$  crecientes coincida o sea opuesto al sentido de las  $s$  crecientes). Sigue que, designando con  $t', t''$  a los valores del parámetro  $t$  correspondientes a los puntos  $P', P''$ , si se realiza en el segundo miembro de (4) la sustitución  $s = s(t)$ , resulta

$$\int_{\gamma(P', P'')} f(x, y, z) ds = \pm \int_{t'}^{t''} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \quad (7)$$

con la advertencia hecha respecto del signo a adoptar.

-----  
 (\*) No se confunda esta afirmación con la expresada por (5). El sentido positivo sobre  $C$  y el sentido de  $P'$  a  $P''$  son independientes.



Como en el n<sup>o</sup> 2, se extiende después la definición (4) al caso en que  $\gamma$  se a una curva generalmente regular (como suma de las integrales curvilíneas extendidas a las distintas curvas regulares de las que se compone  $\gamma$ ) y en particular al caso en que  $\gamma$  sea una curva cerrada (aclarando el sentido en que se la recorre).

Es de notar que una integral curvilínea de una forma diferencial lineal se puede transformar en una integral del tipo (3). En efecto; indicando con  $\tau$  la tangente a  $C$  en el punto  $s$ , orientada en el sentido positivo, vale la fórmula

$$\int_{\gamma(P', P'')} X dx + Y dy + Z dz = \int_{\gamma(P', P'')} (X \cos x^{\wedge} \tau + Y \cos y^{\wedge} \tau + Z \cos z^{\wedge} \tau) ds, \quad (8)$$

cuya demostración es inmediata. Basta expresar el primer miembro según la definición dada en el n<sup>o</sup> 2 [usando la representación paramétrica (2)] y el segundo miembro según la definición (4) [teniendo presente que  $\cos x^{\wedge} \tau = \varphi'(s)$ ,  $\cos y^{\wedge} \tau = \psi'(s)$ ,  $\cos z^{\wedge} \tau = \chi'(s)$ ] para constatar que ambos miembros de (8) son iguales a

$$\int_{s'}^{s''} \{ X[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)] \varphi'(s) + Y[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)] \psi'(s) + Z[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)] \chi'(s) \} ds. \quad (*)$$

Dada una curva generalmente regular  $C$  y considerados sus arcos  $\gamma$ , se puede introducir el concepto de función del arco  $\gamma$  y, adoptando como medida de  $\gamma$  su longitud, extender a una función tal los conceptos establecidos en el Cap. XXI para las funciones de dominio. No nos detendremos a exponer detalladamente tal extensión; nos bastará destacarla con una aplicación. Con razonamiento análogo al realizado en el Cap. XXII, n<sup>o</sup> 3, se encuentra que las coordenadas  $\xi, \eta, \zeta$  del baricentro de un arco  $\gamma$  de línea mate-

-----  
 (\*) El segundo miembro de (8) puede también indicarse con  $\int_{\gamma(P', P'')} \vec{f} \times \vec{\tau} ds$  o con  $\int_{\gamma(P', P'')} f_{\tau} ds$  don de  $\vec{f}$  es el vector de componentes  $X, Y, Z$ ;  $\vec{\tau}$  el versor de la tangente  $\tau$  (de componentes  $\cos x^{\wedge} \tau, \cos y^{\wedge} \tau, \cos z^{\wedge} \tau$ ) y  $f_{\tau}$  es la componente de  $\vec{f}$  según la tangente  $\tau$ .



rial, supuesta homogénea, están dadas por las fórmulas

$$\xi = \frac{\int_{\gamma(A,B)} x \, ds}{\int_{\gamma(A,B)} ds}, \quad \eta = \frac{\int_{\gamma(A,B)} y \, ds}{\int_{\gamma(A,B)} ds}, \quad \zeta = \frac{\int_{\gamma(A,B)} z \, ds}{\int_{\gamma(A,B)} ds}, \quad (9)$$

donde  $A$  y  $B$  son los extremos de  $\gamma$ , y se supone fijado sobre tal arco un sentido positivo para los arcos  $s$ . El denominador es, en virtud de (6), la longitud con signo del arco  $\gamma$  recorrido desde  $A$  hasta  $B$ . Si se desea que en el denominador figure la longitud absoluta de  $\gamma$  es necesario fijar como sentido positivo de los arcos, el que va del punto  $A$  al  $B$ .

Tomemos nuevamente en consideración la fórmula (2) del Cap. XII, n° 13

$$\text{área } S = 2 \pi \int x \, ds \quad (10)$$

que proporciona el área de una superficie de rotación generada por el rotar una vuelta completa de una curva  $C$  del semiplano  $x \geq 0$ ,  $y = 0$ . Teniendo presente lo dicho sobre la (10) y la definición (4) de integral curvilínea de una función, resulta evidente que la integral del segundo miembro de (10) es la integral curvilínea de la función  $x \geq 0$  extendida sobre la curva  $C$ , con la advertencia que (debiendo la integral resultar positiva) es necesario recorrer  $C$  en el sentido de las  $s$  crecientes. Se puede, entonces, escribir

$$\text{área } S' = 2 \pi \int_{C(A,B)} x \, ds \quad (10')$$

donde  $A, B$  son los extremos de  $C$  y el arco  $s$  se supone contado positivamente desde  $A$  hasta  $B$ .

Llamando con  $l$  a la longitud de  $C$ , escribiendo la (10') del siguiente modo

$$\text{área } S = l \cdot 2 \pi \frac{\int_{C(A,B)} x \, ds}{l}$$

y observando que, según la (9), el cociente aquí indicado proporciona la abscisa del baricentro de la curva  $C$  (supuesta material y homogénea), se concluye



que

$$\text{área } S = l \cdot 2\pi \xi$$

vale decir que subsiste el teorema:

I - (Teorema de Guldin sobre el área de una superficie de rotación) - El área de una superficie de rotación se obtiene multiplicando la longitud de la curva meridiana por la longitud de la circunferencia descrita por el baricentro de la misma.

Por ejemplo: el área de la superficie tórica obtenida haciendo rotar un círculo de radio  $r$  alrededor de una recta de su plano situada a distancia  $d \geq r$  de su centro, está dada por  $2\pi r \cdot 2\pi d = 4\pi^2 r d$

Lo que se ha dicho para las integrales curvilíneas de funciones de tres variables vale también, con obvias modificaciones, para las integrales curvilíneas de funciones de dos variables (extendidas a curvas del plano). En este caso conviene, sin embargo, agregar algunas consideraciones.

Si  $A$  es un dominio regular del plano  $xy$ , se puede considerar (cfr. n° 4) la integral curvilínea  $\int_{\mathcal{F}A} f(x,y) ds$  como suma de las integrales curvilíneas de la  $f(x,y)$  extendidas a las distintas curvas regulares que componen  $\mathcal{F}A$ , sobre las cuales el sentido positivo ha sido establecido en el n° 4 (es decir, aquél que deja a la izquierda el interior de  $A$ ) y coincide con el sentido según el que se suponen, en la integración, recorridas tales curvas.

Tal sentido positivo sobre  $\mathcal{F}A$  induce una orientación de sus tangentes  $\tau$ ; es oportuno establecer también una orientación de las rectas normales  $n$  a  $\mathcal{F}A$ . Convengamos en orientar  $n$  de modo que en cada punto (regular) de  $\mathcal{F}A$ , las rectas orientadas  $\tau, n$  estén dispuestas como los ejes  $x, y$ : es decir, de modo que sea  $\tau \wedge n = + \frac{\pi}{2}$ . Se ve inmediatamente (cfr. fig. 41) que la



$n$  resulta orientada hacia el interior de  $A$ ; la llamaremos, por lo tanto, normal interna.

Se tendrá, entonces

$$\hat{x}n = \hat{x}y + y\hat{z} + \hat{z}n = \frac{\pi}{2} + y\hat{z} + \frac{\pi}{2} = y\hat{z} + \pi,$$

$$\hat{y}n = \hat{y}x + x\hat{z} + \hat{z}n = -\frac{\pi}{2} + x\hat{z} + \frac{\pi}{2} = x\hat{z}$$

y, por lo tanto,

$$\cos \hat{x}n = -\cos y\hat{z} \quad ; \quad \cos \hat{y}n = \cos x\hat{z}. \quad (11)$$

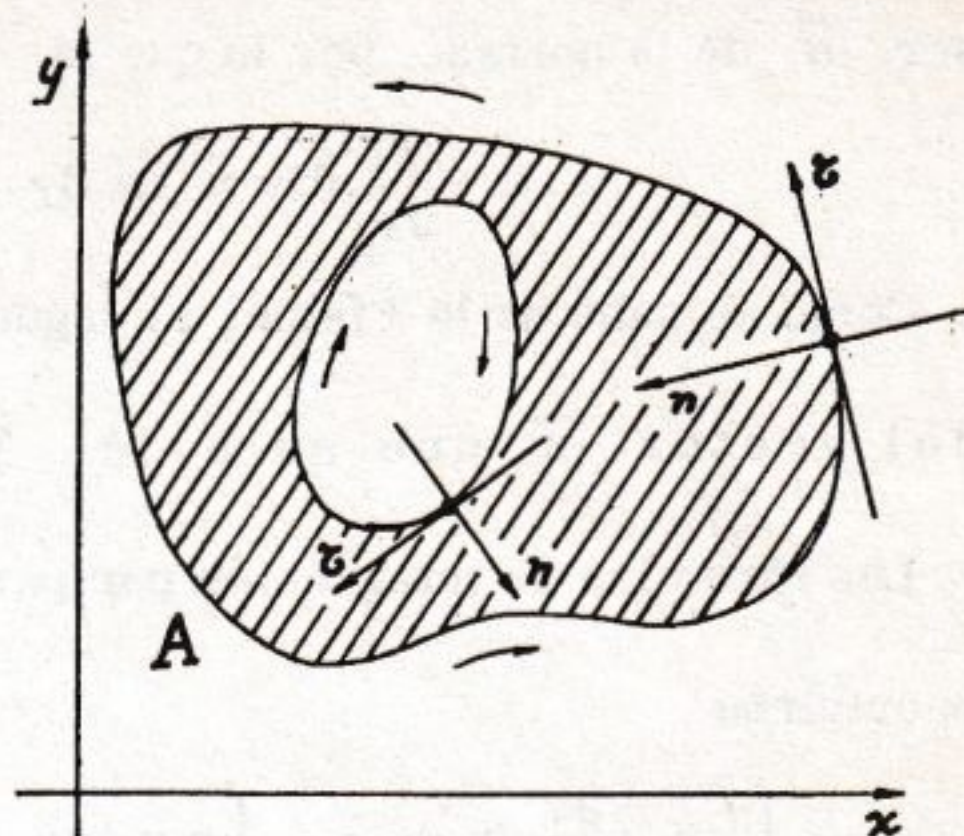


Fig. 41

Tras lo que, dada una forma diferencial lineal  $X dx + Y dy$ , se tendrá, por la (8),

$$\int_{+\mathcal{F}A} X dx + Y dy = \int_{+\mathcal{F}A} (X \cos \hat{x}z + Y \cos \hat{y}z) ds$$

y también por la (11)

$$\int_{+\mathcal{F}A} X dx + Y dy = \int_{+\mathcal{F}A} (X \cos \hat{y}n - Y \cos \hat{x}n) ds \quad (12)$$

Habiendo introducido estas relaciones deseamos hacer ver que se pueden escribir de modo más conveniente algunas fórmulas del n° 4.

Las fórmulas de Green  $\iint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+\mathcal{F}A} f dy$ ,  $\iint_A \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = - \int_{+\mathcal{F}A} g dx$  toman la forma

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = - \int_{+\mathcal{F}A} f \cos \hat{x}n ds, \quad \iint_A \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = - \int_{+\mathcal{F}A} g \cos \hat{y}n ds; \quad (13)$$

desaparece así la diferencia de signo que se había observado en el n° 4.

El teorema de la divergencia  $\iint_A \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_{+\mathcal{F}A} f dy - g dx$  se transforma en

$$\iint_A \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = - \int_{+\mathcal{F}A} (f \cos \hat{x}n + g \cos \hat{y}n) ds. \quad (14)$$

Si imaginamos al vector  $\vec{u}(x,y)$  [de componentes  $f(x,y)$ ,  $g(x,y)$ ] aplicado en el punto  $(x,y)$  de  $A$ , la función  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$  se llama la divergencia del vector  $\vec{u}$  y se indica con el símbolo  $\text{div } \vec{u}$ . Por otra parte la ex-



presión  $f \cos \hat{x}n + g \cos \hat{y}n$  no es sino el producto escalar de  $\vec{u}$  por el vector  $\vec{n}$  de la normal, por lo que la (14) puede también escribirse

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{u} \, dx \, dy = - \int_{+\tilde{F}A} \vec{u} \times \vec{n} \, ds \quad -. \quad (14')$$

Como se sabe de la Física, el segundo miembro de (14') se llama el flujo del vector  $\vec{u}$  que sale de  $\tilde{F}A$ .

Las fórmulas de integración por partes (4) y (5) del n° 4 pueden también escribirse

$$\begin{aligned} \iint_A u \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \, dy &= - \int_{+\tilde{F}A} u v \cos \hat{x}n \, ds - \iint_A v \frac{\partial u}{\partial x} \, dx \, dy, \\ \iint_A u \frac{\partial v}{\partial y} \, dx \, dy &= - \int_{+\tilde{F}A} u v \cos \hat{y}n \, ds - \iint_A v \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (15)$$

Notemos, por último, que en las (13), (14), (15), en lugar de  $\cos \hat{x}n$ ,  $\cos \hat{y}n$  puede también escribirse  $\frac{\partial x}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial n}$ , como surge de la definición de derivada según una dirección dada en el Cap. XVI, n° 5.



## CAPITULO XXIV

### Integrales Superficiales

#### 1 - INTEGRAL SUPERFICIAL DE UNA FUNCION.

Sea  $S$  una superficie regular cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (1)$$

con cierto dominio base  $D$  internamente conexo del plano  $uv$ ; como en el Cap. XXII, n° 11 hacemos además la hipótesis que  $D$  sea acotado y medible.

Por otra parte, sea  $f(x, y, z)$  una función continua definida en un campo conexo  $A$  que contenga la superficie  $S$ ; se puede también suponer que la  $f$  esté definida solamente en los puntos de  $S$ .

Por analogía con el concepto de integral curvilínea de una función  $\int_{\gamma(P', P'')} f(x, y, z) ds$ , (véase Cap. XXIII, n° 6) donde figura el elemento de arco  $ds$  de la curva orientada  $\gamma$ , es oportuno introducir una integral superficial de la función  $f(x, y, z)$  extendida a la superficie  $S$  que se denotará con el símbolo

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma \quad (2)$$

en el que interviene el elemento de área  $d\sigma$  de dicha superficie.

Por simplicidad nos limitaremos a dar la definición de (2) sin pensar en orientar la superficie  $S$ , de modo que no habrá para (2) nada de similar a lo que en las integrales curvilíneas eran el sentido positivo de los arcos  $s$  y el sentido de recorrido del punto  $P'$  al punto  $P''$ .

Entonces, teniendo en cuenta que en los puntos de  $S$  la  $f(x, y, z)$  se transforma en una función  $f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$  de las dos variables  $u, v$  (de-



finida en el citado dominio base  $D$ ) y del hecho de que el elemento de área  $d\sigma$  tiene la expresión  $\sqrt{EG - F^2} du dv$  (véase Cap. XXII, n° 11) es natural dar para la integral (2) la siguiente definición

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (3)$$

donde el segundo miembro tiene sentido pues es una integral doble de una función continua sobre un dominio acotado y medible.

No es difícil demostrar, basándose en los teoremas del Cap. XXII, n° 9, que la integral superficial recién definida tiene un valor independiente de la representación paramétrica particular (1) adoptada para  $S$ .

Se verifica después inmediatamente que la integral (2) goza de la propiedad aditiva y esto sugiere extender la definición dada al caso de una superficie  $S$  que pueda expresarse como la unión de un número finito de superficies regulares, carentes dos a dos de puntos interiores en común; por integral de la  $f$  extendida a una tal superficie  $S$  se entenderá la suma de las integrales extendidas a cada una de las superficies regulares.

## 2 - INTEGRAL SUPERFICIAL DE UNA FORMA DIFERENCIAL

Por analogía con las integrales curvilíneas de formas diferenciales lineales  $X dx + Y dy + Z dz$  (cfr. Cap. XXIII, n° 2) es útil dar también el concepto de integral superficial extendida a una superficie regular  $S$ , de una forma diferencial bilineal  $X dy dz + Y dz dx + Z dx dy$ , donde  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  son tres funciones continuas en un campo conexo que contenga a  $S$ . (\*)

Permaneciendo válidas para la superficie  $S$  las hipótesis del n° precedente, se

(\*) En una forma diferencial lineal se combinan linealmente los diferenciales  $dx, dy, dz$ , es decir, los elementos de longitud de los tres ejes coordenados; en una forma diferencial bilineal se hace una combinación análoga de los elementos de área de los tres planos coordenados  $yz, zx, xy$ .



rá sin embargo indispensable, para las aplicaciones que realizaremos, distinguir las dos páginas de la superficie  $S$ , del mismo modo como, con referencia a las integrales curvilíneas, hemos distinguido los dos sentidos en que se puede recorrer la curva.

Indicaremos con  $S'$  y  $S''$  las dos páginas de  $S$ . En correspondencia a cada página, orientaremos las normales  $n$  a la superficie  $S$  de modo que la página considerada quede vuelta hacia las normales positivas; tendremos así las normales  $n'$  relativas a la página  $S'$  (es decir, orientada de  $S''$  hacia  $S'$ ) y las normales  $n''$  relativas a la página  $S''$  (es decir, orientadas de  $S'$  hacia  $S''$ ).

Recordemos (Cap. XVI, n.º 10) que los cosenos directores de la normal  $n$  a la superficie  $S$  en un punto genérico de la misma son proporcionales a los tres números :

$$L = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \quad N = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

y que resulta

$$L^2 + M^2 + N^2 = EG - F^2$$

Por lo tanto, indicando con  $\epsilon$  a la unidad positiva o negativa, tendremos para las normales  $n'$  :

$$\cos \hat{x}n' = \epsilon \frac{L}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \cos \hat{y}n' = \epsilon \frac{M}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \cos \hat{z}n' = \epsilon \frac{N}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (1)$$

con un bien determinado valor de  $\epsilon$ , mientras que para las normales  $n''$  surgirán fórmulas análogas con  $-\epsilon$  en lugar de  $\epsilon$ .

Tras lo cual, definiremos la integral superficial

$$\int_{S'} X dy dz + Y dz dx + Z dx dy \quad (2)$$

de la forma diferencial bilineal  $X dy dz + Y dz dx + Z dx dy$ , extendida a la página  $S'$  de la superficie  $S$  mediante la fór -



mula .

$$\int_{S'} X dy dz + Y dz dx + Z dx dy = \int_S (X \cos \hat{x}n' + Y \cos \hat{y}n' + Z \cos \hat{z}n') d\sigma \quad (3)$$

donde la integral del segundo miembro es la integral superficial de la función indicada, extendida a la superficie  $S$  (cfr. n<sup>o</sup> 1) . Análoga definición para la integral superficial extendida a la otra página  $S''$  de  $S$  ; basta escribir, en el segundo miembro de (3) ,  $n''$  en lugar de  $n'$ , por lo que resultará

$$\int_{S''} \dots\dots\dots = - \int_{S'} \dots\dots\dots \quad (4)$$

Para expresar el segundo miembro de (3) es necesario aplicar la (3) del n<sup>o</sup> precedente; teniendo esto en cuenta, y que por la (1) se tiene

$$\cos \hat{x}n' d\sigma = \epsilon \frac{L}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \sqrt{EG - F^2} du dv = \epsilon L du dv = \epsilon \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} du dv, \dots,$$

se ve que la (3) puede sustituirse con la

$$\begin{aligned} \int_{S'} X dy dz + Y dz dx + Z dx dy = \\ = \epsilon \iint_D \left\{ X[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + Y[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + Z[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right\} du dv, \end{aligned} \quad (5)$$

donde el segundo miembro es una integral doble de una función continua, extendida al dominio acotado y medible  $D$  . Téngase presente que  $\epsilon$  señala el signo que es necesario adoptar en la (1) para tener los cosenos directores de la normal  $n'$  relativa a la página considerada  $S'$  . (\*)

Veamos ahora una justificación, mediante consideraciones intuitivas, de los motivos de la definición (3) . El elemento de área  $d\sigma$  que rodea a un punto  $P$

-----

(\*) La (5) es la análoga de la (3) del Cap. XXIII, n<sup>o</sup> 2 . No existía entonces el signo  $\epsilon$  por que estaba englobado en el símbolo de integral definida  $\int_{t'}^{t''} \dots\dots$



de la superficie  $S$ , se proyecta ortogonalmente sobre el plano  $xy$  en elemento de área  $dx dy$  de tal plano. Por lo tanto, considerando  $d\sigma$  como un área plana contenida en el plano tangente a la  $S$  en el punto  $P$ , se tiene que  $dx dy$  es igual al producto de  $d\sigma$  por el coseno del ángulo agudo formado por el plano  $xy$  y el citado plano tangente. Tal coseno es igual a  $|\cos \hat{z}n'|$  y entonces se tiene:

$$dx dy = |\cos \hat{z}n'| d\sigma \quad (6)$$

Hagamos ahora una convención respecto de los signos de los citados elementos de área. El elemento  $d\sigma$  será considerado positivo si se lo imagina sobre la página considerada  $S'$ , negativo si se lo imagina sobre la  $S''$ . El elemento  $dx dy$  será considerado positivo si se lo imagina ubicado sobre la página  $\pi'$  del plano  $xy$  que mira hacia las  $z$  positivas y negativo si se lo considera sobre la otra página  $\pi''$ .

Observemos que el elemento  $d\sigma$ , considerado sobre  $S'$  (y por ende positivo) se proyecta sobre un elemento  $dx dy$  de la página  $\pi'$  (y por ende positivo) cuando el ángulo entre la normal  $n'$  y el eje  $z$  es agudo (es decir, cuando  $\cos \hat{z}n' > 0$ ), mientras se proyecta en un elemento de la página  $\pi''$  (y por lo tanto negativo) cuando el ángulo  $\hat{z}n'$  es obtuso (o sea cuando  $\cos \hat{z}n' < 0$ ).

Sigue, entonces, que la (6) puede sustituirse por la

$$dx dy = \cos \hat{z}n' d\sigma \quad (7)$$

válida en valor absoluto y signo.

Análogamente se llega a las  $dy dz = \cos \hat{y}n' d\sigma$ ,  $dz dx = \cos \hat{z}n' d\sigma$ , que dando así explicado el pasaje formal del primer al segundo miembro de (3).

Valen para las integrales (2) observaciones análogas a las hechas sobre el final del n° precedente.

### 3 - TEOREMA DE STOKES.

Demos ahora una fórmula notable, que permite la transformación de integrales, me



diante la demostración del teorema de Stokes, que posibilita transformar una integral superficial en una integral curvilínea.

En este teorema consideraremos una superficie regular  $S$ , con las ecuaciones paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (1)$$

suponiendo que el dominio base  $D$  sea internamente conexo y regular (según la definición dada en el Cap. XXIII, n° 4) y, además, que cada una de las tres funciones  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  admita en  $D$  derivada segunda mixta continua.

La frontera  $\mathcal{F}D$  del dominio base  $D$  está constituida por un cierto número de curvas regulares del plano  $(u, v)$ ; a sus puntos le corresponderán entonces, sobre la  $S$ , puntos distribuidos sobre un número igual de curvas regulares del espacio  $xyz$ . Diremos que estas últimas constituyen, en conjunto, el borde de  $S$ , que indicaremos con  $BS$ .

Una vez fijado sobre el borde  $BS$  el sentido positivo, asociaremos al mismo una bien determinada página de  $S$  (que llamaremos página positiva) o, si se quiere, una bien determinada orientación de las normales a  $S$ , con la siguiente convención: un observador que recorra  $BS$  en el sentido positivo, caminando sobre la página positiva de  $S$ , debe tener siempre a su izquierda a los puntos de  $S$ . También puede decirse: si en un punto  $P$  de  $BS$  se considera la tangente  $\zeta$  a  $BS$  (orientada según el sentido establecido sobre  $BS$ ) y otra tangente  $\nu$  a la  $S$  (orientada de  $P$  hacia los puntos de  $S$ ), la normal  $n$  en  $P$  a la superficie  $S$  debe orientarse de manera que la terna  $\zeta \nu n$  resulte con la misma disposición que los ejes coordenados  $x, y, z$ , (fig. 42). Cambiando el sentido positivo sobre  $BS$ , cambia naturalmente el sentido positivo sobre las normales  $n$ . Recordemos, por otra parte, que en base a la convención



hecha en Cap. XXIII, n° 4, queda fijado en el plano  $uv$  un sentido positivo sobre

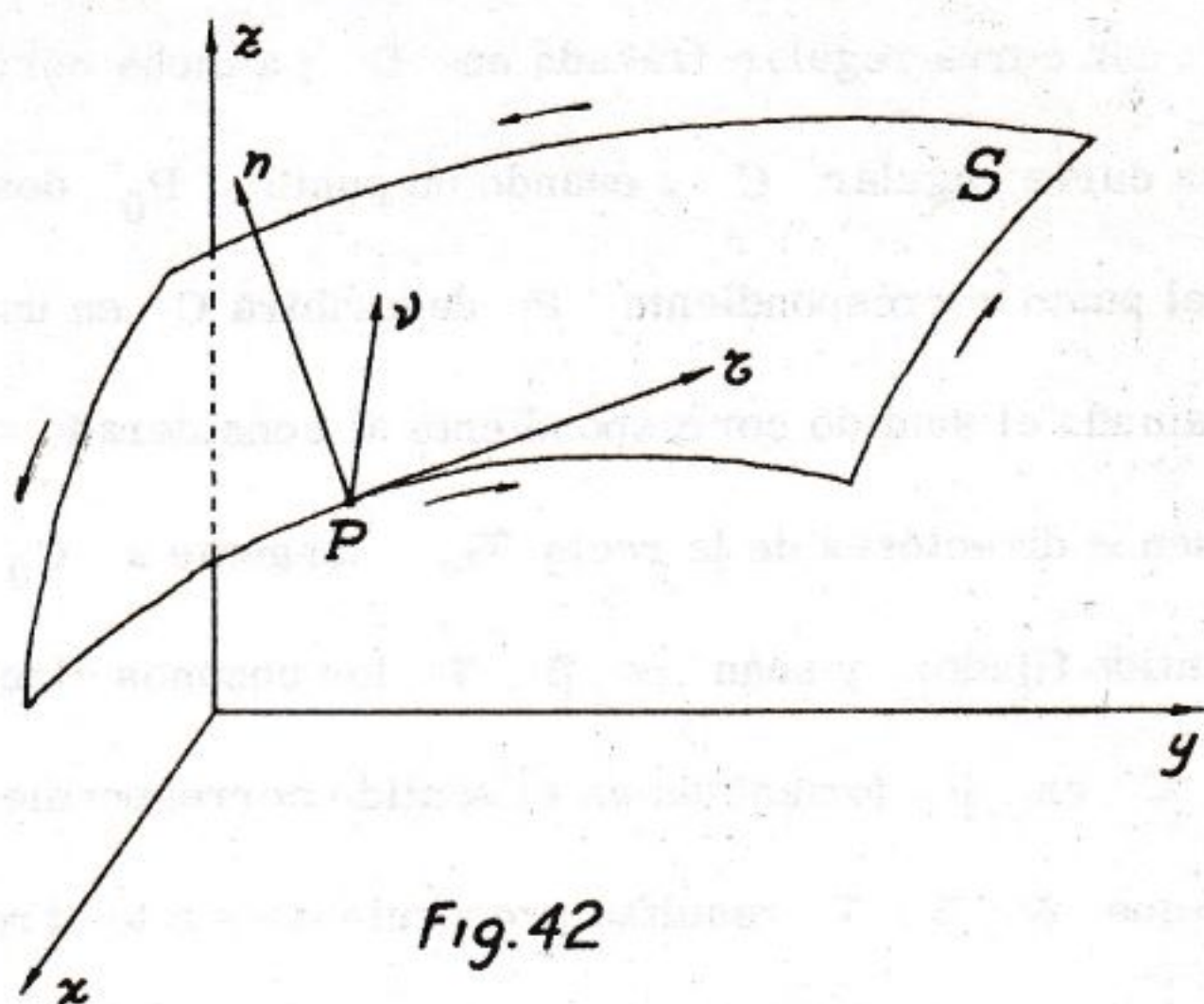


Fig. 42

la frontera  $\mathcal{F}D$  del dominio base  $D$  (es el sentido que deja  $D$  a la izquierda, ver fig. 43).

Cuando un punto  $P_0$  recorre  $\mathcal{F}D$  en dicho sentido positivo puede muy bien suceder que el correspondiente  $P$  recorra  $BS$  en el sentido que se ha indicado como positivo en este borde (lo llamaremos 1<sup>er</sup> caso), o que lo recorra en el sentido opuesto (2<sup>o</sup> caso.).

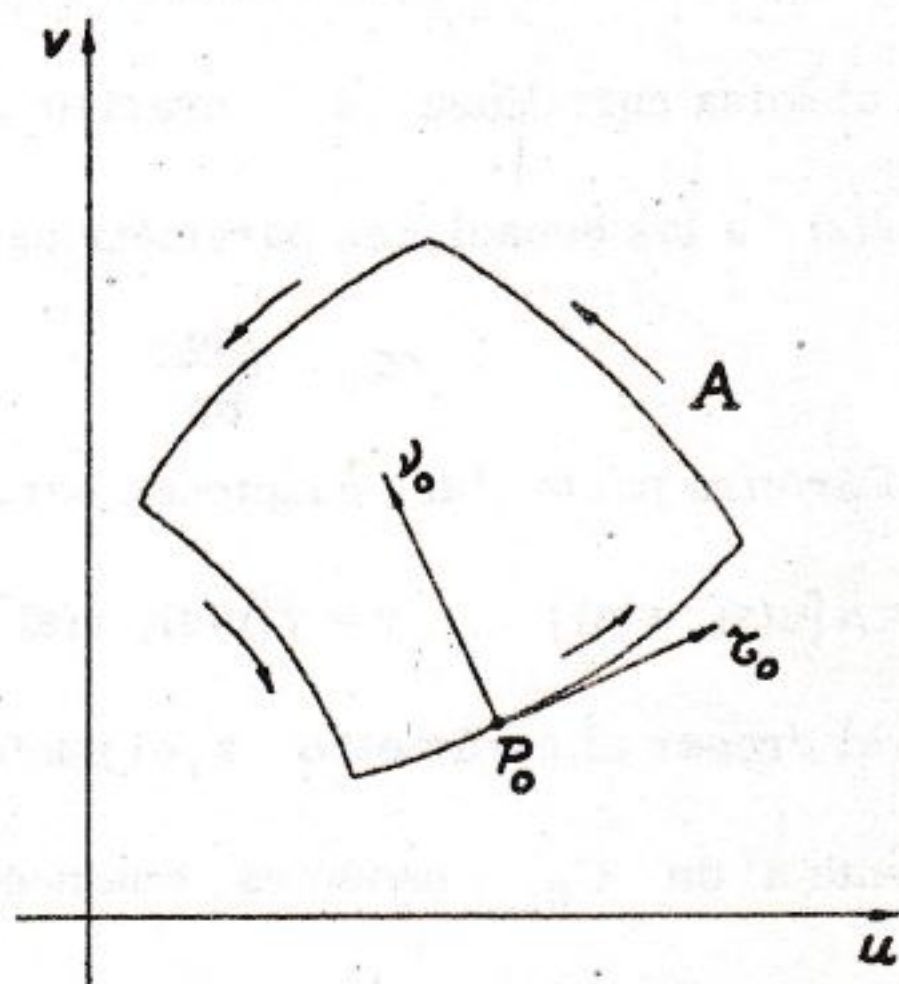


Fig. 43

Demostremos, antes de continuar, la siguiente proposición:

I - Fijado el sentido positivo sobre el borde  $BS$  de la superficie  $S$  y orientadas en consecuencia las normales  $n$  a dicha superficie del modo dicho, resulta

$$\cos \hat{x}n = \frac{L}{\pm \sqrt{EG-F^2}}, \quad \cos \hat{y}n = \frac{M}{\pm \sqrt{EG-F^2}}, \quad \cos \hat{z}n = \frac{N}{\pm \sqrt{EG-F^2}}, \quad (2)$$

con el signo  $+$  o con el signo  $-$  según que se verifique el primero o el segundo de los casos antedichos.

Dem. Basta evidentemente considerar el primer caso y demostrar que valen las



(2) con el signo  $+$ . La demostración se logrará tras la siguiente observación.

Sea  $C_0$  una curva regular trazada en  $D$ ; a dicha curva le corresponderá sobre  $S$  una curva regular  $C$  y cuando un punto  $P_0$  describe  $C_0$  en un sen tido dado, el punto correspondiente  $P$  describirá  $C$  en un sentido determinado que será llamado el sentido correspondiente al considerado sobre  $C_0$ . Sean  $\alpha_0, \beta_0$  los cosenos directores de la recta  $\zeta_0$  tangente a  $C_0$  en  $P_0$  (orientada según el sentido fijado) y sean  $\alpha, \beta, \gamma$  los cosenos directores de la recta  $\zeta$  tangente a  $C$  en  $P$  (orientada en el sentido correspondiente al precedente). De mostremos que  $\alpha, \beta, \gamma$  resultan proporcionales a los tres números

$$x_u \alpha_0 + x_v \beta_0, \quad y_u \alpha_0 + y_v \beta_0, \quad z_u \alpha_0 + z_v \beta_0, \quad (3)$$

con un factor de proporcionalidad positivo. En efecto; introducida en  $C_0$  una abscisa curvilínea  $s$ , creciente en el sentido fijado, y llamando con  $u=u(s)$ ,  $v=v(s)$  a las ecuaciones paramétricas de  $C_0$ , se tendrá según se sabe,

$$\alpha_0 = \frac{du}{ds}, \quad \beta_0 = \frac{dv}{ds}.$$

Por otra parte, las ecuaciones paramétricas de  $C$  resultan ser las

$$x = x[u(s), v(s)], \quad y = y[u(s), v(s)], \quad z = z[u(s), v(s)], \quad (4)$$

y, al crecer el parámetro  $s$ , el punto  $P$  describe  $C$  en el sentido correspondiente al de  $C_0$ ; sabemos, entonces, (Cap. X, n° 10) que  $\alpha, \beta, \gamma$  resultan proporcionales, con un factor de proporcionalidad positivo, a las derivadas de las funciones (4) respecto de  $s$ , es decir, a los tres números

$$x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds}, \quad y_u \frac{du}{ds} + y_v \frac{dv}{ds}, \quad z_u \frac{du}{ds} + z_v \frac{dv}{ds},$$

que coinciden con los tres números (3).

Podemos entonces decir que a cada recta orientada  $\zeta_0$  (de cosenos directores  $\alpha_0, \beta_0$ ) pasante por un punto  $P_0$  de  $D$ , corresponde una bien determi nada recta orientada  $\zeta$  tangente a la  $s$  en el punto  $P$  correspondiente a  $P_0$  que tendrá los cosenos directores proporcionales a los números (3), según un



factor positivo de proporcionalidad.

Advertidos de esto, consideremos en un punto genérico  $P_0$  de  $\mathcal{F}D$ , la tangente positiva  $\zeta_0$  y la normal interna  $\nu_0$  (fig. 43). Sean  $\zeta, \nu$  las correspondientes rectas orientadas tangentes a  $S$  en el punto  $P$  de  $BS$  que corresponde a  $P_0$  (fig. 42).

La  $\zeta$  resulta tangente a  $BS$  en  $P$  y orientada según el sentido positivo de  $BS$ , puesto que hemos dicho que estamos en el primer caso de los dos contemplados en el enunciado del teorema. La  $\nu$  resulta orientada desde  $P$  hacia los puntos interiores de  $S$ .

Recordemos, además, que la normal  $n$  a la superficie  $S$  debe orientarse de modo de lograr que la terna  $\zeta, \nu, n$  resulte dispuesta como la terna  $xyz$ . Es conocido, a través de la geometría analítica, que esto se realiza imponiendo que se a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \hat{x}\zeta & \cos \hat{y}\zeta & \cos \hat{z}\zeta \\ \cos \hat{x}\nu & \cos \hat{y}\nu & \cos \hat{z}\nu \\ \cos \hat{x}n & \cos \hat{y}n & \cos \hat{z}n \end{vmatrix} > 0 \quad (5)$$

Ahora, llamando  $\alpha_0, \beta_0$ , a los cosenos directores de  $\zeta_0$ , y por ende,  $-\beta_0, \alpha_0$  a los de  $\nu_0$ , por la observación precedente, se tendrá

$$\begin{aligned} \cos \hat{x}\zeta &= p (x_u \alpha_0 + x_v \beta_0), & \cos \hat{y}\zeta &= p (y_u \alpha_0 + y_v \beta_0), \\ \cos \hat{z}\zeta &= p (z_u \alpha_0 + z_v \beta_0) \quad (\text{con un cierto } p > 0), \\ \cos \hat{x}\nu &= q (-x_u \beta_0 + x_v \alpha_0), & \cos \hat{y}\nu &= q (-y_u \beta_0 + y_v \alpha_0), \\ \cos \hat{z}\nu &= q (-z_u \beta_0 + z_v \alpha_0), \quad (\text{con un cierto } q > 0); \end{aligned}$$

por otra parte puede escribirse

$$\cos \hat{x}n = r L, \quad \cos \hat{y}n = r M, \quad \cos \hat{z}n = r N, \quad (\text{con un cierto } r)$$

y nuestro teorema quedará probado si hacemos ver que de la (5) sigue  $r > 0$ .

Y en efecto, teniendo en cuenta que  $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1$ , llegamos con fácil cálculo



lo a  $\Delta = p q r (L^2 + M^2 + N^2)$  y, por lo tanto, la (5) valdrá sólo si  $r > 0$  que es lo que queríamos demostrar.

Tras este resultado, he aquí el enunciado del teorema de Stokes:

II - Si  $S$  es una superficie regular que verifica las hipótesis arriba enunciadas y si  $X(x,y,z)$ ,  $Y(x,y,z)$ ,  $Z(x,y,z)$  son tres funciones continuas junto a sus derivadas parciales primeras en un campo conexo  $A$  que contiene a  $S$ , vale la fórmula

$$\int_{+S} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_{+BS} X dx + Y dy + Z dz, \quad (6)$$

donde  $+S$  denota la página positiva de la superficie  $S$ , es decir, aquella página que, según la convención establecida, corresponde al sentido positivo fijado sobre el borde  $BS$ .

Dem. Bastará demostrar separadamente las tres relaciones

$$\int_{+S} \frac{\partial X}{\partial z} dz dx - \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_{+BS} X dx, \quad \int_{+S} \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Y}{\partial z} dy dz = \int_{+BS} Y dy,$$

$$\int_{+S} \frac{\partial Z}{\partial y} dy dz - \frac{\partial Z}{\partial x} dz dx = \int_{+BS} Z dz,$$

de las que la (6) sigue por suma. Demostremos, por ejemplo, la primera. Se tendrá

$$\int_{+BS} X dx = \int_{\pm \mathcal{F}D} X [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)$$

con el signo  $+$  o con el signo  $-$  según que el sentido positivo sobre el  $BS$  corresponda o no al sentido positivo sobre  $\mathcal{F}D$ . Transformando la integral del segundo miembro en una integral doble mediante las fórmulas de Green en el plano (véase Cap. XXIII, n° 4) resulta

$$\int_{+BS} X dx = \pm \iint_D \left\{ -\frac{\partial}{\partial u} (X[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]) \frac{\partial x}{\partial v} - \right.$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial}{\partial v} (X[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{\partial x}{\partial u}) \} du dv = \\
& = \pm \iint_D \left\{ \left( \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \right. \\
& \quad \left. - \left( \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right\} du dv = \\
& = \pm \iint_D \left( \frac{\partial X}{\partial z} M - \frac{\partial X}{\partial y} N \right) du dv
\end{aligned}$$

Pero, por el teor. I, se tiene  $\cos \hat{y}n = \pm \frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}$ ,  $\cos \hat{z}n = \pm \frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}$  y, por lo tanto, puede escribirse

$$\begin{aligned}
\int_{+BS} X dx &= \iint_D \left( \frac{\partial X}{\partial z} \cos \hat{y}n - \frac{\partial X}{\partial y} \cos \hat{z}n \right) \sqrt{EG-F^2} du dv = \\
&= \iint_D \left( \frac{\partial X}{\partial z} \cos \hat{y}n - \frac{\partial X}{\partial y} \cos \hat{z}n \right) d\sigma ;
\end{aligned}$$

pero / por la (3) del n° precedente / esta última integral no es sino la integral superficial  $\int_{+S} \frac{\partial X}{\partial z} dz dx - \frac{\partial X}{\partial y} dx dy$ , que es lo que queríamos demostrar.

Veamos ahora la forma vectorial del teorema de Stokes. Llamando  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$  a las componentes de un vector  $\vec{u}$  aplicado en el punto  $P(x, y, z)$ , se denomina **rotor** (o **rotación**) de  $\vec{u}$  al vector que tiene por componentes a  $\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ , y que se indica con la notación  $\text{rot } \vec{u}$ .

Si escribimos el primer miembro de la (6) en la forma

$$\int_S \left[ \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \hat{x}n + \dots \right] d\sigma,$$

la función a integrar se presenta como el producto escalar de  $\text{rot } \vec{u}$  por el vector  $\vec{n}$  de la normal  $n$  a  $S$ ; de tal modo dicho primer miembro podrá escribirse más concisamente  $\int_S (\text{rot } \vec{u} \times \vec{n}) d\sigma$ . Fijada sobre  $BS$  una abscisa curvilínea  $s$ , el segundo miembro de la (6) puede escribirse

$$\int_{+BS} \left( X \frac{dx}{ds} + \dots \right) ds,$$

y puesto que  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$  son los cosenos directores de la tangente, constituyen las componentes del versor  $\vec{\tau}$  de la tangente orientada en el sentido de las  $s$  crecientes y tal segundo miembro asume la forma  $\int_{+BS} \vec{u} \times \vec{\tau} ds$ . Con



cluyendo, la (6) equivale a la siguiente fórmula

$$\int_S \text{rot } \vec{u} \times \vec{n} \, d\sigma = \int_{+BS} \vec{u} \times \vec{\tau} \, ds \quad (7)$$

Observemos, por último, que el teorema de Stokes continúa valiendo si  $S$  es una superficie generalmente regular y abierta, vale decir, que admita su descomposición en un número finito de superficies regulares  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , carentes dos a dos de puntos internos comunes (para cada una de las cuales se verifiquen las hipótesis introducidas al comienzo) y, además, dotada de un borde  $BS$ .

Bastará escribir la (6) para las distintas superficies  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , después sumar miembro a miembro las fórmulas obtenidas y observar que la suma de las integrales curvilíneas extendidas a  $BS_1, BS_2, \dots, BS_m$  se reduce a la integral curvilínea extendida a  $BS$ . En efecto; consideradas las integrales curvilíneas extendidas a aquellos arcos  $\gamma$  de los bordes  $BS_1, BS_2, \dots, BS_m$  que no pertenezcan a  $BS$ , se eliminarán dos a dos, puesto que, junto a cada una de ellas que se extiendan sobre  $\gamma$  en un cierto sentido, aparecerá otra extendida sobre la misma  $\gamma$ , pero en el sentido opuesto.

#### 4 - CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE UNA FORMA DIFERENCIAL LINEAL EN TRES VARIABLES SEA UN DIFERENCIAL EXACTO.

Dada la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy + Z dz$ , supongamos que las funciones  $X, Y, Z$ , sean continuas junto a sus derivadas parciales primeras en un cierto campo conexo  $A$  del espacio  $x, y, z$ ; sean además satisfechas en  $A$  las tres condiciones

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad (1)$$

que ya sabemos (Cap. XXIII, n° 3) son necesarias (pero en general no suficientes) para que la forma sea en  $A$  un diferencial exacto. Tenemos el siguiente



te teorema:

I - Valiendo las (1), si se fija arbitrariamente una superficie  $S$  regular y abierta, contenida en  $A$ , resulta

$$\int_{\pm BS} X dx + Y dy + Z dz = 0 \quad (2)$$

Dem. Del teorema de Stokes sabemos [ver la (6) del n° precedente]

$$\begin{aligned} & \int_{+S} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \\ & = \int_{+BS} X dx + Y dy + Z dz ; \end{aligned}$$

pero el primer miembro, en virtud de las (1), vale cero, siguiendo la (2), que es lo que queríamos demostrar.

Consideremos ahora cualquier curva  $\gamma$  (generalmente regular) simple y cerrada trazada en el campo  $A$ . Dicha curva  $\gamma$  puede imaginarse como el borde de una superficie regular  $S$ , generalmente regular y abierta, superficie que puede evidentemente elegirse de infinitos modos distintos. Entre todas estas superficies  $S$ , existirá al menos una que esté contenida en  $A$ ? Hay casos en que surge inmediatamente la respuesta afirmativa (por ejemplo, si  $A$  es un intervalo abierto, o una esfera abierta, o el campo comprendido entre dos esferas concéntricas), mientras en otras es negativa (por ejemplo, si  $A$  es un toro abierto y la curva  $\gamma$  gira alrededor del eje del toro).

Diremos que un campo conexo  $A$  del espacio  $xyz$  es un campo con conexión lineal simple cuando toda curva simple y cerrada trazada en  $A$  sea el borde de una superficie abierta contenida en  $A$ . (\*)

Por ejemplo; el espacio, un semiespacio abierto, un intervalo abierto, una esfera abierta, el campo comprendido entre dos esferas concéntricas, el espacio priva-

(\*) Para los campos del espacio hay dos tipos de campos simplemente conexos: los linealmente simplemente conexos recién definidos y los superficialmente simplemente conexos que no nos interesan en este caso.



do de un punto, son campos con conexión lineal simple; no lo son, en cambio, un toro abierto, el espacio privado de los puntos de una recta.

Podemos ahora demostrar un teorema fundamental que establece condiciones suficientes para que  $X dx + Y dy + Z dz$  sea un diferencial exacto:

II - Sea la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy + Z dz$ , con  $X, Y, Z$  continuas junto a sus derivadas parciales primeras en el campo conexo  $A$ ; si en todo punto de  $A$  se verifican las  $\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ , y si el campo es linealmente simplemente conexo, la forma dada es un diferencial exacto en  $A$ .

Dem. Puesto que  $A$  es linealmente simplemente conexo, elegida arbitrariamente en  $A$  una curva  $\gamma$  simple y cerrada, será el borde  $BS$  de una superficie abierta  $S$  contenida en  $A$ . Por otra parte, dado que se verifican las (1), el teorema I nos asegura que resulta  $\int_{\pm BS} X dx + Y dy + Z dz = 0$ , o sea,

$$\int_{\pm \gamma} X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Entonces, siendo nula la integral curvilínea de la forma sobre cualquier curva simple y cerrada contenida en  $A$ , bastará aplicar el teor. I del Cap. XXIII, n° 3, para concluir que  $X dx + Y dy + Z dz$  es un diferencial exacto, que es lo que quéríamos demostrar.

---

Con el teorema precedente se tiene un criterio de aplicación práctica para reconocer si, dada una forma diferencial lineal en tres variables, la misma sea un diferencial exacto en un determinado campo  $A$ . En caso afirmativo, el cálculo de la integral  $F(x, y, z)$  de la forma se efectúa aplicando el teor. III del Cap. XXIII, n° 2, o sea la fórmula

$$F(x, y, z) = C + \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} X(u, v, w) du + Y(u, v, w) dv + Z(u, v, w) dw. \quad (3)$$



La curva  $\gamma$  sobre la que se integra entre los puntos  $P_0 (x_0, y_0, z_0)$ ,  $P(x, y, z)$  puede ser elegida arbitrariamente; pero, deseando realizar el cálculo efectivo de la integral curvilínea, se tendrá el cuidado de elegir  $\gamma$  de modo de simplificar tales cálculos. Por ejemplo, si  $A$  es un intervalo abierto, o un semiespacio, o el espacio, puede ser útil elegir  $\gamma$  coincidente con una poligonal de tres lados paralelos a los ejes, o también con el segmento  $P_0P$ .

Dejamos al lector la tarea de estudiar el ejemplo

$$X dx + Y dy + Z dz = (y^2 + 2xz) dx + (z^2 + 2xy) dy + (x^2 + 2yz) dz$$

en el que se llegará a

$$F(x, y, z) = C + y z^2 + z x^2 + x y^2$$

También para las formas diferenciales en tres variables vale un teorema análogo al teor. III del Cap. XXIII, n° 5 :

III - Dada la forma diferencial lineal  $X dx + Y dy + Z dz$ , con  $X, Y, Z$  continuas junto con sus derivadas parciales primeras en el campo conexo  $A$ , si en cada punto de  $A$  se verifican las  $\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ , y si las funciones  $X, Y, Z$ , son homogéneas con un mismo grado de homogeneidad  $\alpha \neq -1$ , la forma dada es en  $A$  un diferencial exacto y su integral está expresada por

$$F = C + \frac{1}{\alpha + 1} (x X + y Y + z Z) \quad (4)$$

La demostración es idéntica a la del teorema antes citado.

## 5 - FORMULAS DE GREEN EN EL ESPACIO Y APLICACIONES.

Las fórmulas de Green en el espacio son análogas a las vistas en Cap. XXIII, n° 4 en el caso del plano, y sirven para transformar una integral triple en una integral superficial.



Sea  $A$  un dominio del espacio  $xyz$ . Diremos que es un dominio regular respecto del plano  $xy$  cuando se verifican las siguientes dos condiciones:

$\alpha$ ) la frontera de  $A$  está constituida por un número finito de superficies regulares que tienen a lo sumo en común, dos a dos, puntos de sus bordes;

$\beta$ ) trazando un número finito de oportunas superficies cilíndricas con las generatrices paralelas al eje  $z$ , el dominio  $A$  puede descomponerse en un número finito de dominios  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , cada uno de los cuales resulte normal respecto del plano (véase Cap. XXII, nº 2).

Con relación a esta definición valen observaciones similares a las hechas en el Cap. XXIII, nº 4.

Análogamente se definen los dominios regulares respecto del plano  $xz$  o respecto del plano  $yz$ .

Diremos además que  $A$  es un dominio regular cuando sea regular respecto de cada uno de los planos considerados.

Un dominio regular respecto de un plano coordenado es obviamente acotado y medible. Sabemos que  $\mathcal{F}A$  está constituida por un número finito de superficies regulares; cada una de éstas será llamada una cara de  $\mathcal{F}A$ .

Sobre cada cara  $S$  de  $\mathcal{F}A$  consideraremos como página positiva la que mira hacia el interior de  $A$  y, por lo tanto, en todo punto de  $S$  la recta normal  $n$  está orientada hacia el interior de  $A$  (la llamaremos, entonces, normal interna).

Tiene sentido ahora hablar de integral superficial de una forma diferencial bilineal, extendida a la frontera  $\mathcal{F}A$  de  $A$ , sobre la página positiva (o interior); designando con  $S_1, S_2, \dots, S_m$  a las caras de  $\mathcal{F}A$ , será, por la definición introducida en el nº 2:



$$\int_{+\mathcal{F}A} X dy dz + Y dz dx + Z dx dy = \sum_{k=1}^m \int_{+S_k} X dy dz + Y dz dx + Z dx dy =$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_{S_k} [X \cos \hat{x}n + Y \cos \hat{y}n + Z \cos \hat{z}n] d\sigma$$

Tras esta relación, podemos dar las fórmulas de Green a través del siguiente teorema:

I - Si  $A$  es un dominio del espacio, regular respecto del plano  $yz$  y  $f(xyz)$  es una función continua en  $A$  junto a su derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , vale la fórmula

$$\iiint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = - \int_{+\mathcal{F}A} f dy dz \quad (1)$$

Análogamente, si  $A$  es regular respecto del plano  $zx$  y  $g(x,y,z)$  es, junto con  $\frac{\partial g}{\partial y}$  continua en  $A$ , vale la

$$\iiint_A \frac{\partial g}{\partial y} dx dy dz = - \int_{+\mathcal{F}A} g dx dz; \quad (2)$$

y por último, si  $A$  es regular respecto del plano  $xy$  y  $h(x,y,z)$  es continua junto con  $\frac{\partial h}{\partial z}$  en  $A$ , se tiene

$$\iiint_A \frac{\partial h}{\partial z} dx dy dz = - \int_{+\mathcal{F}A} h dx dy \quad (3)$$

Dem. Nos referiremos, por ejemplo, a la (3) comenzando con demostrarla en el caso en que  $A$  sea un dominio normal respecto del plano  $xy$ , definido por las  $(x,y) \in B$ ,  $\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)$  y verificante la condición  $\alpha$ ) mencionada al comienzo.

Desde ya, por los resultados del Cap. XXII, n° 6, se tendrá

$$\iiint_A \frac{\partial h}{\partial z} dx dy dz = \iint_B dx dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \frac{\partial h}{\partial z} dz =$$

$$= \iint_B \{ h[x,y, \beta(x,y)] - h[x,y, \alpha(x,y)] \} dx dy \quad (4)$$

La frontera de  $A$  se compone de las dos superficies  $S' [z = \alpha(x,y), (x,y) \in B]$ ,  $S'' [z = \beta(x,y), (x,y) \in B]$  y, eventualmente de otras porciones  $S_1, S_2, \dots, S_m$ , situadas sobre la superficie cilíndrica que proyecta a la frontera de  $B$  paralelamente al eje  $z$ , y por lo tanto se tendrá



$$\begin{aligned} \int_{+\tilde{F}A} h \, dx \, dy &= \int_{+S'} h \, dx \, dy + \int_{+S''} h \, dx \, dy + \sum_{k=1}^m \int_{+S_k} h \, dx \, dy = \\ &= \int_{S'} h \cos \hat{z}n \, d\sigma + \int_{S''} h \cos \hat{z}n \, d\sigma + \sum_{k=1}^n \int_{S_k} h \cos \hat{z}n \, d\sigma \end{aligned}$$

Sobre cada una de las  $S_k$  la normal  $n$  es siempre paralela al plano  $xy$ , y entonces resulta  $\cos \hat{z}n = 0$ ; en consecuencia se tendrá

$$\int_{+\tilde{F}A} h \, dx \, dy = \int_{S'} h \cos \hat{z}n \, d\sigma + \int_{S''} h \cos \hat{z}n \, d\sigma \quad (5)$$

La  $S'$  tiene las ecuaciones paramétricas  $x = x$ ,  $y = y$ ,  $z = \alpha(x, y)$  con el dominio base  $B$  y sobre la misma resulta  $\cos \hat{z}n > 0$ ; la  $S''$  tiene las ecuaciones paramétricas  $x = x$ ,  $y = y$ ,  $z = \beta(x, y)$  con el dominio base  $B$  y sobre ella resulta  $\cos \hat{z}n < 0$ ; entonces, en virtud de la (5) del n° 2, la (5) se transforma en

$$\int_{+\tilde{F}A} h \, dx \, dy = \iint_B h[x, y, \alpha(x, y)] \, dx \, dy - \iint_B h[x, y, \beta(x, y)] \, dx \, dy \quad (6)$$

De la observación de los segundos miembros de (4) y (6), sigue la (3).

Queda por hacer ver que la (3) permanece válida si  $A$  es regular respecto del plano  $xy$ . En dicho caso  $A$  se descompone [del modo dicho en (3)] en cierto número de dominios  $T_1, T_2, \dots, T_n$  normales respecto del plano  $xy$ , para cada uno de los cuales se tendrá, por la demostración precedente

$$\iiint_{T_k} \frac{\partial h}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = - \int_{\tilde{F}T_k} h \, dx \, dy, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades se obtiene en el primer miembro

$\iiint_A \frac{\partial h}{\partial z} \, dx \, dy \, dz$  y, en el segundo miembro,  $-\int_{\tilde{F}A} h \, dx \, dy$  puesto que las integrales superficiales extendidas a aquellas caras de  $T_k$  que no forman parte de  $\tilde{F}A$  son todas nulas, dado que tales caras son superficies cilíndricas con las generatrices paralelas al eje  $z$ , resultando sobre ellas  $\cos \hat{z}n = 0$ . Con esta aclaración el teorema queda demostrado.

Es de observar que las (1), (2), (3) pueden también tomar la forma [por la (3) del n° 2] :



$$\begin{aligned} \iiint_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz &= - \int_{\tilde{F}A} f \cos \hat{z}n d\sigma ; \quad \iiint_A \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz = - \int_{\tilde{F}A} g \cos \hat{y}n d\sigma ; \\ \iiint_A \frac{h}{z} dx dy dz &= - \int_{\tilde{F}A} h \cos \hat{z}n d\sigma \quad ; \end{aligned} \quad (7)$$

fórmulas que pueden confrontarse con las (13) del Cap. XXIII, n° 6 .

Examinemos algunas consecuencias de la fórmula de Green, análogas a las vistas en Cap, XXIII, n° 4 y n° 6 .

1°) Teorema de la divergencia. Si  $A$  es un dominio regular valen si — simultaneamente las tres fórmulas (7) que, sumadas miembro a miembro, dan

$$\iiint_A \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz = - \int_{\tilde{F}A} (f \cos \hat{x}n + g \cos \hat{y}n + h \cos \hat{z}n) d\sigma . \quad (8)$$

Si suponemos que  $f, g, h$  son las componentes de un vector  $\vec{u}$  e indicamos con  $\vec{n}$  el versor de la normal interna a  $\tilde{F}A$ , la (8) puede escribirse:

$$\iiint_A \operatorname{div} \vec{u} dx dy dz = - \int_{\tilde{F}A} \vec{u} \times \vec{n} d\sigma . \quad (8')$$

2°) Fórmula de integración por partes para las integrales tri

ples. Si  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  son funciones continuas junto con sus derivadas  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  en el dominio  $A$ , regular respecto del plano  $yz$ , se obtie-

ne a partir de la primera de las (7)

$$\iiint_A u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy dz = - \int_{\tilde{F}A} u v \cos \hat{x}n d\sigma - \iiint_A v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz .$$

Se tienen otras dos fórmulas análogas con las derivadas respecto de  $y$  y respecto de  $z$  .

3°) Fórmulas de reducción para las integrales triples. Suponga

mos tener que calcular la integral triple  $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$ , donde  $A$  es un dominio regular respecto del plano  $yz$  y  $f(x, y, z)$  es continua en  $A$ . Supóngase, además, que se conozca de la  $f(x, y, z)$ , considerada como función solamente de  $x$ , su primitiva  $F(x, y, z)$ . Se tendrá, entonces,

$$\iiint_A f dx dy dz = \iiint_A \frac{\partial F}{\partial x} dx dy dz \quad \text{y, por la primera de las (7), será:}$$



$$\iiint_A f \, dx \, dy \, dz = - \int_{+\tilde{F}A} F \, dy \, dz = - \int_{\tilde{F}A} F \cos \hat{x}n \, d\sigma \quad (9)$$

con lo que el cálculo de la integral triple se ha trasladado al de una integral superficial es decir, en esencia, al de una integral doble. Fórmulas análogas valen considerando de la  $f$  la primitiva respecto de  $y$  o de  $z$ .

En particular, poniendo  $f = 1$  y, entonces,  $F = x$ , la (9) proporciona

$$\text{volumen } A = - \int_{+\tilde{F}A} x \, dy \, dz = - \int_{\tilde{F}A} x \cos \hat{x}n \, d\sigma$$



## CAPITULO XXV

### Extensión del concepto de integral

#### 1 - MEDIDA DE LOS CONJUNTOS NO ACOTADOS.

En el Cap. XX hemos establecido los conceptos de medida y de conjuntos medibles; refiriéndonos únicamente a conjuntos acotados; queremos ahora extender dichos conceptos al caso de conjuntos no acotados.

Sea  $E$  un conjunto no acotado del espacio  $S_r$ . Diremos que  $E$  es medible si, para todo intervalo  $R$  de tal espacio, resulta medible el conjunto acotado  $E \cap R$ . Admitido que eso suceda, el número  $\text{med}(E \cap R)$  describe, cuando  $R$  varía de todos los modos posibles, un conjunto numérico cuyo extremo superior (finito o  $+\infty$ ) será, por definición, asumido como medida de  $E$ . Entonces, un conjunto no acotado medible, tiene siempre una medida que puede ser finita o infinita.

Un conjunto no acotado  $E$  puede tener medida nula; esto sucederá cuando, para todo intervalo  $R$ , resulte siempre  $\text{med}(E \cap R) = 0$ . Se extienden inmediatamente al caso de  $E$  no acotado los teor. III y IV del Cap. XX, n° 3, teniéndose:

I - Si un conjunto no acotado  $E$  pertenece a un espacio  $S_{r-k}$ , de dimensión inferior a  $r$ , será sin duda medible sobre el espacio  $S_r$  y tendrá medida nula.

Dem. En efecto, si  $E$  pertenece a un  $S_{r-k}$ , fijado arbitrariamente en  $S_r$  un intervalo  $R$ , también el conjunto acotado  $E \cap R$  pertenecerá a tal  $S_{r-k}$  y entonces, por el citado teor. III de Cap. XX, n° 3, se tendrá  $\text{med}(E \cap R) = 0$ ,



de lo que seguirá  $\text{med } E = 0$ .

II - Si el conjunto no acotado  $E$  es medible, su medida es positiva o nula, según que esté dotado o que carezca de puntos interiores.

Dem. En efecto, si  $E$  es medible y tiene puntos interiores, existirán intervalos  $R$  tales de proporcionar conjuntos acotados y medibles  $E \cap R$  que posean puntos interiores.

En virtud del citado teor. III del Cap. XX, n° 3, para tales  $R$  resultará  $\text{med}(E \cap R) > 0$ , de lo que resultará  $\text{med } E > 0$ . Si  $E$  es medible, y no tiene puntos interiores, tampoco los tendrá el conjunto acotado y medible  $E \cap R$ , cualquiera sea  $R$ , resultando siempre  $\text{med}(E \cap R) = 0$  y, en consecuencia,  $\text{med } E = 0$ . También es fácil extender el teor. I del Cap. XX, n° 3:

III - Condición necesaria y suficiente para que el conjunto no acotado  $E$  sea medible es que su frontera (\*)  $\mathcal{F}E$  tenga medida nula.

Dem. Observemos, primeramente, que designando con  $R$  a un intervalo arbitrario del espacio  $S_r$ , valen las dos relaciones:

$$\mathcal{F}E \cap R \subseteq \mathcal{F}(E \cap R) \cup \mathcal{F}R \quad (1)$$

$$\mathcal{F}(E \cap R) \subseteq (\mathcal{F}E \cap R) \cup \mathcal{F}R \quad (**) \quad (2)$$

Ahora, si  $E$  es medible, se tiene  $\mathcal{F}(E \cap R) = 0$  y también  $\text{med } \mathcal{F}R = 0$  ;

-----

(\*) La frontera  $\mathcal{F}E$  de un conjunto no acotado  $E$  puede ser acotada (por ejemplo, en el plano, si  $E$  es el exterior de un círculo) o no acotada (por ejemplo, en el plano, si  $E$  es un ángulo).

(\*\*) La (1) se demuestra del siguiente modo. Sea  $P$  un punto de  $\mathcal{F}E \cap R$ , que no pertenezca a  $\mathcal{F}R$ ; mostraremos que necesariamente pertenecerá a  $\mathcal{F}(E \cap R)$ . En efecto;  $P$  es interior a  $R$  y pertenece a  $\mathcal{F}E$ ; por lo tanto, llamando  $C$  a cualquier dominio circular con centro  $P$  y totalmente contenido en  $R$ , caerán en  $C$  puntos de  $E$  (que son también puntos de  $E \cap R$ ) y puntos del complementario de  $E$  (que son también puntos del complementario de  $E \cap R$ ). Esto muestra que  $P$  es punto de frontera de  $E \cap R$ . Análogamente se demuestra la (2).



por lo tanto, de la (1) sigue, por los teor. I y II del Cap. XX, n<sup>o</sup> 4,  $\text{med}_e (\mathcal{F}E \cap R) \leq \text{med } \mathcal{F}(E \cap R) + \text{med } \mathcal{F}R = 0$ , lo que precisamente expresa que  $\text{med } \mathcal{F}E = 0$ .

Viceversa, si  $\mathcal{F}E$  tiene medida nula, de la (2) sigue  $\text{med}_e \mathcal{F}(E \cap R) \leq \leq \text{med } (\mathcal{F}E \cap R) + \text{med } \mathcal{F}R = 0$ , lo que expresa que  $E \cap R$  es medible, que es lo que queríamos demostrar.

De este teorema sigue, con el mismo razonamiento hecho en Cap. XX, n<sup>o</sup> 4 :

IV - Si los conjuntos  $E_1, E_2, \dots, E_n$  (acotados o no) son medibles, también serán medibles la unión, la intersección o la diferencia de dos de ellos.

Extendamos, por último, los teoremas I, V, VI del Cap. XX, n<sup>o</sup> 4 :<sup>(\*)</sup>

V - Si  $E_1, E_2$  son conjuntos medibles (acotados o no), y  $E_1$  está contenido en  $E_2$ , resulta  $\text{med } E_1 \leq \text{med } E_2$ .

Dem. De  $E_1 \subseteq E_2$  sigue  $E_1 \cap R \subseteq E_2 \cap R$ ,  $\text{med } (E_1 \cap R) \leq \text{med } (E_2 \cap R) \leq \leq \text{med } E_2$ , de donde el extremo superior de  $\text{med } (E_1 \cap R)$ , es decir,  $\text{med } E_1$ , no es superior a  $\text{med } E_2$ , que es lo que queríamos demostrar.

VI - Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son conjuntos medibles (acotados o no), se tiene

$$\text{med } (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \leq \text{med } E_1 + \text{med } E_2 + \dots + \text{med } E_n$$

Dem. Basta considerar el caso de dos conjuntos  $E_1, E_2$ . De

$$(E_1 \cup E_2) \cap R = (E_1 \cap R) \cup (E_2 \cap R) \quad \text{sigue}$$

$$\text{med } (E_1 \cup E_2) \cap R \leq \text{med } (E_1 \cap R) + \text{med } (E_2 \cap R) \leq \text{med } E_1 + \text{med } E_2 ;$$

entonces, el extremo superior de  $\text{med } (E_1 \cup E_2) \cap R$ , es decir  $\text{med}(E_1 \cup E_2)$

-----

(\*) Téngase presente que en los tres teoremas siguientes las medidas indicadas pueden, todas o algunas, ser infinitas. En el transcurso de las demostraciones se tendrá además en cuenta el hecho de que, también para los conjuntos  $E$  medibles y acotados, vale la propiedad  $\text{med } E = = \text{extr. sup. med } (E \cap R)$ , como es fácil demostrar.



no puede superar  $\text{med } E_1 + \text{med } E_2$ , que es lo que queríamos demostrar.

VII - Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  son conjuntos medibles (acotados o no), carentes dos a dos de puntos interiores en común, se tiene

$$\text{med } (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \text{med } E_1 + \text{med } E_2 + \dots + \text{med } E_n. (3)$$

Dem. Basta considerar el caso de dos conjuntos  $E_1, E_2$ . Si éstos no tienen puntos interiores en común, tampoco los tendrán los dos conjuntos  $E_1 \cap R$ ,  $E_2 \cap R$ ; si tenemos además en cuenta que  $(E_1 \cup E_2) \cap R = (E_1 \cap R) \cup (E_2 \cap R)$ , se deduce

$$\text{med } (E_1 \cap R) + \text{med } (E_2 \cap R) = \text{med } (E_1 \cup E_2) \cap R \leq \text{med } (E_1 \cup E_2).$$

Ahora bien, al variar  $R$  el primer miembro describe un conjunto numérico cuyo extremo superior es  $\text{med } E_1 + \text{med } E_2$ , resultando, por tanto,  $\text{med } E_1 + \text{med } E_2 \leq \text{med } (E_1 \cup E_2)$ .

Por otra parte, será también (por el teor. precedente)  $\text{med } (E_1 \cup E_2) \leq \text{med } E_1 + \text{med } E_2$ , que junto con la anterior, proporciona la tesis.

## 2 - PROCEDIMIENTO PARA EL CALCULO DE LA MEDIDA DE UN CONJUNTO.

La definición de medida dada en el n<sup>o</sup> anterior no se presta para las aplicaciones prácticas; para tales aplicaciones es oportuno recurrir a una operación de pasaje al límite, de la manera que ahora explicaremos.

Ante todo demostremos el siguiente lema:

I - Sea  $E$  un conjunto medible, acotado o no acotado. Su medida coincidirá con el extremo superior de las medidas de todos los conjuntos cerrados, acotados y medibles contenidos en  $E$ .

Dem. Comencemos suponiendo que  $E$  esté acotado. Si  $E$  tiene medida nula, el teorema es evidente. Supongamos que  $E$  tenga medida positiva. Entonces, to



mado cualquier conjunto cerrado y medible  $C \subseteq E$ , se tendrá

$$\text{med } C \leq \text{med } E. \quad (1)$$

Por otra parte, el conjunto  $E$  contiene puntos interiores y entonces, dado  $\epsilon > 0$ , es posible, mediante una oportuna descomposición coordinada  $\mathcal{O}$  de un intervalo  $R$  que contenga a  $E$  (véase Cap. XX, n<sup>os</sup> 2, 3), construir un número finito de intervalos  $R'_1, R'_2, \dots, R'_m$  formados todos por puntos interiores de  $E$ , carentes dos a dos de puntos interiores en común, de modo de lograr que se cumpla  $\sum_{j=1}^m \text{med } R'_j > \text{med } E - \epsilon$ , o sea,  $\text{med} \left( \bigcup_{j=1}^m R'_j \right) > \text{med } E - \epsilon$ .

El conjunto  $C^* = \bigcup_{j=1}^m R'_j$  es un conjunto cerrado y medible contenido en  $E$ , que verifica

$$\text{med } C^* > \text{med } E - \epsilon \quad (2)$$

Las (1) y (2) prueban que el número  $\text{med } E$  goza de las dos propiedades que son características del extremo superior del conjunto numérico descrito por  $\text{med } C$ .

Pasemos al caso en que  $E$  no está acotado. Para todo conjunto cerrado, acotado y medible  $C \subseteq E$ , vale como antes la (1). Fijado después arbitrariamente un número  $l < \text{med } E$  y llamando  $l_1$  a cualquier número que verifique  $l < l_1 < \text{med } E$ , existe sin duda un intervalo  $R$  tal que resulte cierta la  $\text{med}(E \cap R) > l_1$ . Considerando después el conjunto medible y acotado  $E \cap R$  podemos, según la demostración precedente, asegurar que existe un conjunto cerrado y medible  $C^* \subseteq E \cap R$  tal que resulte  $\text{med } C^* > \text{med}(E \cap R) - (l_1 - l)$ . Tal  $C^*$  es un conjunto cerrado, acotado y medible, para el que resulta

$$\text{med } C^* > l_1 - (l_1 - l) = l \quad (3)$$

Las (1) y (3) prueban, como antes, que  $\text{med } E$  es el extremo superior de  $\text{med } C$ , que es lo que queríamos demostrar.

Tras este resultado, dado el conjunto  $E$  medible, acotado o no, indicaremos



con  $\{C_n\}$  una sucesión de conjuntos cerrados, acotados y medibles contenidos en  $E$  que goce de las siguientes propiedades:

$\alpha$ ) la sucesión  $\{C_n\}$  es no decreciente, en el sentido que todo conjunto  $C_n$  de la misma está contenido en el sucesivo  $C_{n+1}$ ;

$\beta$ ) fijado arbitrariamente un conjunto cerrado y acotado  $C$  contenido en  $E$ , existe un oportuno conjunto  $C_j$  de la sucesión que contiene a  $C$ .

Expresaremos brevemente estos dos hechos diciendo que la sucesión no decreciente  $\{C_n\}$  tiende al conjunto  $E$  y escribiremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = E$$

Vale el siguiente teorema:

II - Dados el conjunto medible  $E$ , acotado o no, y una sucesión  $\{C_n\}$  no decreciente de conjuntos cerrados, acotados y medibles contenidos en  $E$ , si se verifica la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = E$  se tendrá también

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{med } C_n = \text{med } E. \quad (4)$$

Dem. Puesto que  $C_n \subseteq C_{n+1}$ , será  $\text{med } C_n \leq \text{med } C_{n+1}$  resultando no decreciente la sucesión numérica descrita por  $\text{med } C_n$  y, por ende, admitirá un límite  $L$  (finito o  $+\infty$ ) que cumplirá, para todo  $n$ ,  $\text{med } C_n \leq L$ . Debemos probar que  $L = \text{med } E$ , o sea (teor. I) que  $L$  es el extremo superior del conjunto numérico  $I$  descrito por  $\text{med } C$ , cuando  $C$  varía en la totalidad de los conjuntos cerrados, acotados y medibles, contenidos en  $E$ . Ahora, fijado arbitrariamente  $C$ , existe por hipótesis un conjunto  $C_j$  que lo contiene, resultando entonces  $\text{med } C \leq \text{med } C_j \leq L$  o sea

$$\text{med } C \leq L. \quad (5)$$

Por otra parte, fijado arbitrariamente  $l < L$ , de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{med } C_n = L$  sigue la existencia de un  $C_j$  tal que resulta



$$\text{med } C_j > 1 \quad (6)$$

Las (5) y (6) muestran que  $L$  es efectivamente el extremo superior de  $\text{med } C$ , que es lo que queríamos demostrar.

Demos dos simples ejemplos de aplicación del teor. II. Considérese, en el plano  $xy$  el conjunto no acotado  $E$  definido por  $x \geq 1$ ,  $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}$  (véase fig. 44).

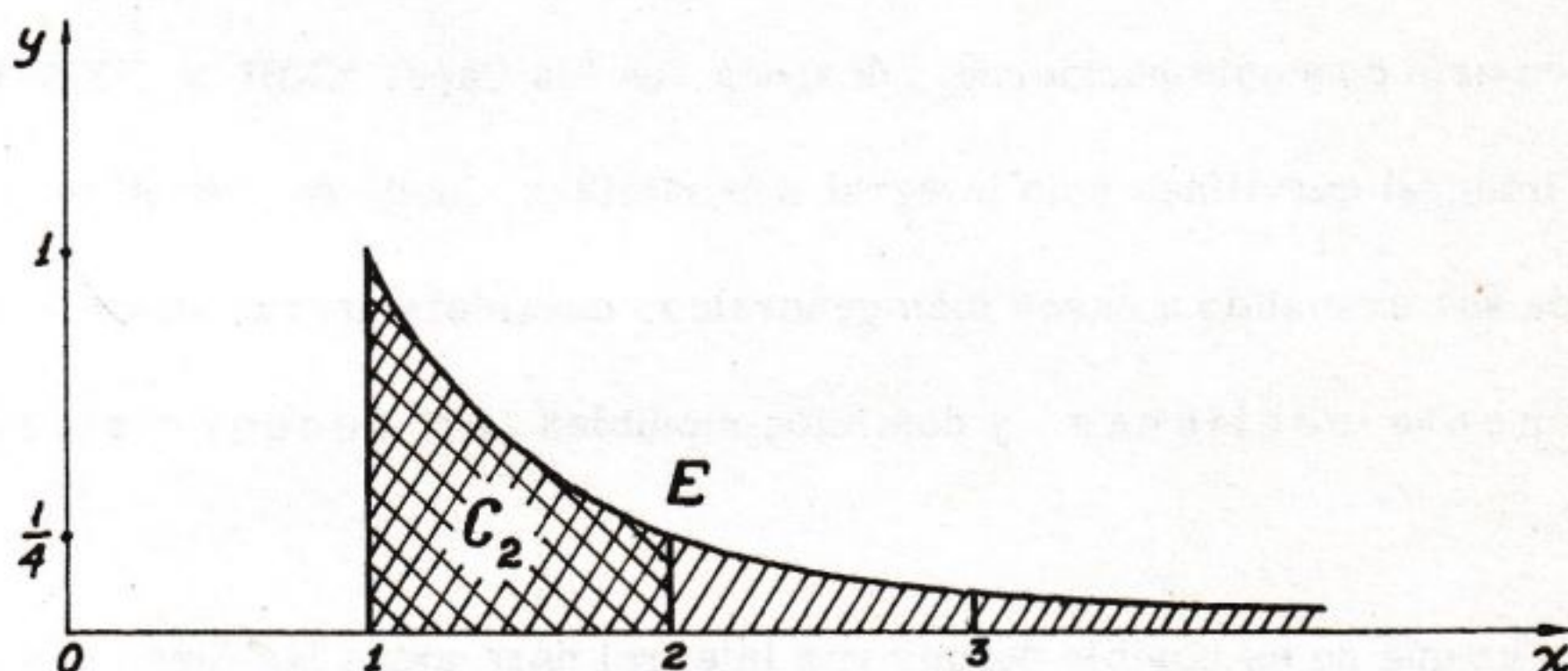


Fig. 44

Tal conjunto es ciertamente medible porque toda intersección  $\mathcal{F}E \cap R$  se compone, como máximo, de dos segmentos y de un arco finito de la curva continua  $y = \frac{1}{x^2}$ , de modo que  $\text{área} (\mathcal{F}E \cap R) = 0$  y, en consecuencia,  $\text{área } \mathcal{F}E = 0$ .

Calculemos el área de  $E$  aplicando el teor. II.

Como sucesión  $\{C_n\}$  de conjuntos cerrados, acotados y medibles, contenidos en  $E$ , no decreciente y que tienda al conjunto  $E$ , podremos tomar la de los rectanguloides  $C_n \left[ 1 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \right]$ . Se tendrá, entonces.

$$\text{área } E = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{área } C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 1$$

Si se hubiese considerado, en cambio, el conjunto no acotado  $E$  definido por  $x \geq 1$ ,  $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$  asumiendo como  $C_n$  al rectánguloide  $\left[ 1 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right]$ , se habría obtenido



$$\text{área } E = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{área } C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log n = +\infty$$

Estos dos ejemplos constituyen casos particulares de un teorema general que veremos en el número sucesivo.

### 3 - INTEGRALES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE GENERALMENTE CONTINUAS Y NO NEGATIVAS.

En los Caps. IX y XXII hemos establecido el concepto de integral de una función continua (de una o más variables) extendida sobre un dominio medible y acotado; apoyadas en este concepto surgieron después, en los Caps. XXIII y XXIV las nociones de integral curvilínea y de integral superficial. Queda por ver si tal concepto puede ser extendido a casos más generales, considerando funciones no necesariamente continuas y dominios medibles no necesariamente acotados.

Digamos ya que no es posible definir una integral para todas las funciones discontinuas; es necesario limitarse a considerar alguna clase oportuna de tales funciones.

Comenzamos estudiando el problema para funciones de una variable, donde nos limitaremos a considerar la clase de las funciones generalmente continuas (véase Cap. VII, n° 3); más aún, en un primer momento supondremos que se trate de funciones no negativas reservándonos para el sucesivo n° 4 la tarea de examinar el caso de las funciones de signo variable.

Sea  $A$  cualquier intervalo cerrado, acotado o no acotado del eje  $x$ , y sea  $f(x)$  una función no negativa y generalmente continua en  $A$ ; esto significa, como ya se sabe, que en todo intervalo acotado contenido en  $A$  existen a lo sumo un número finito (eventualmente nulo) de puntos singulares. Nótese que el caso en que la  $f(x)$  sea continua en  $A$  puede considerarse un caso particular del ahora estudiado; tal caso particular coincide con el analizado en el



Cap. IX si  $A$  es acotado, y es un caso nuevo si  $A$  no está acotado.

En las hipótesis dadas, se ve inmediatamente que es posible construir un grupo de intervalos cerrados y acotados  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], [n(\text{finito}) \geq 1]$ , carentes dos a dos de puntos comunes, todos contenidos en  $A$  y tales de no contener ningún punto singular de  $f(x)$ . En efecto, si  $A$  es acotado y es  $A \equiv [\alpha, \beta]$ , y si para fijar las ideas suponemos que sean singulares para  $f(x)$  el extremo  $\alpha$  y dos puntos interiores  $\xi_1, \xi_2$  (véase fig. 45), puede a-

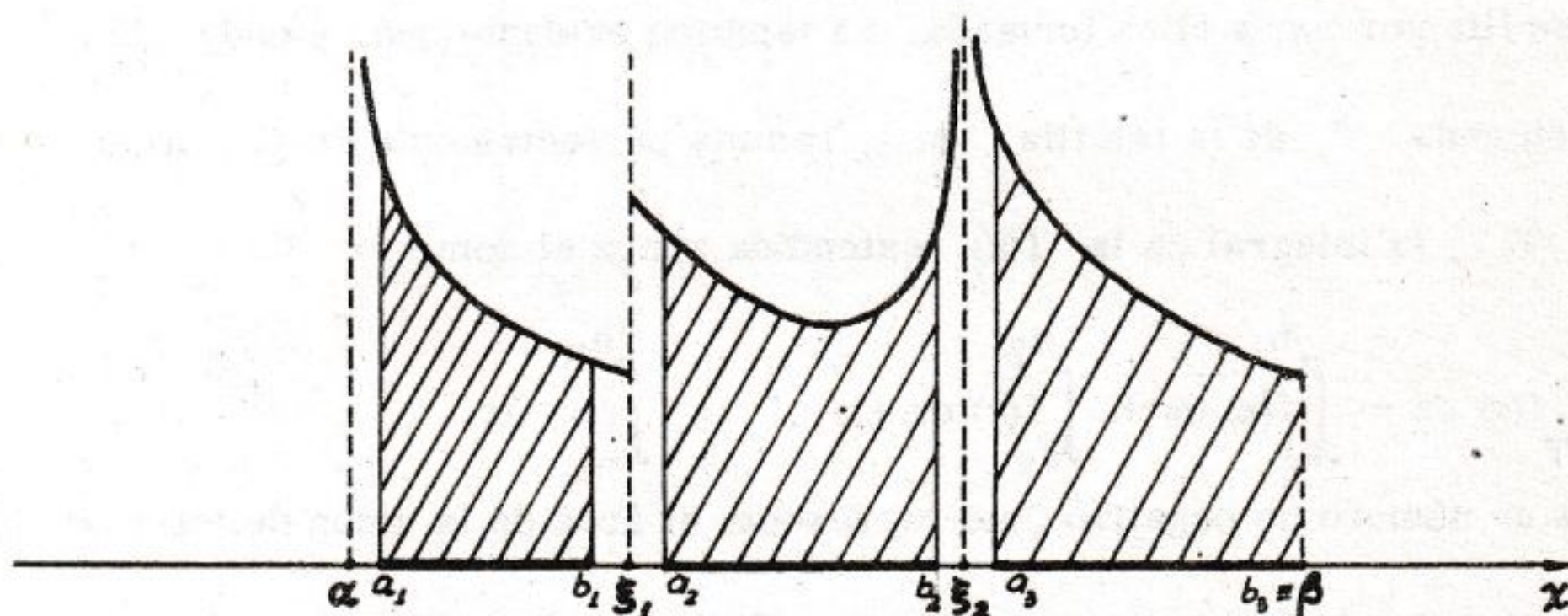


Fig. 45

sumirse por ejemplo  $[a_1, b_1]$  de modo que sea  $\alpha < a_1 < b_1 < \xi_1$ ,  $[a_2, b_2]$ , de modo que sea  $\xi_1 < a_2 < b_2 < \xi_2$  y  $[a_3, b_3]$  tal de tenerse  $\xi_2 < a_3 < b_3 = \beta$ . Si  $A$  no está acotado, por ejemplo si  $A = [x, +\infty]$  (véase fig. 46), bas-

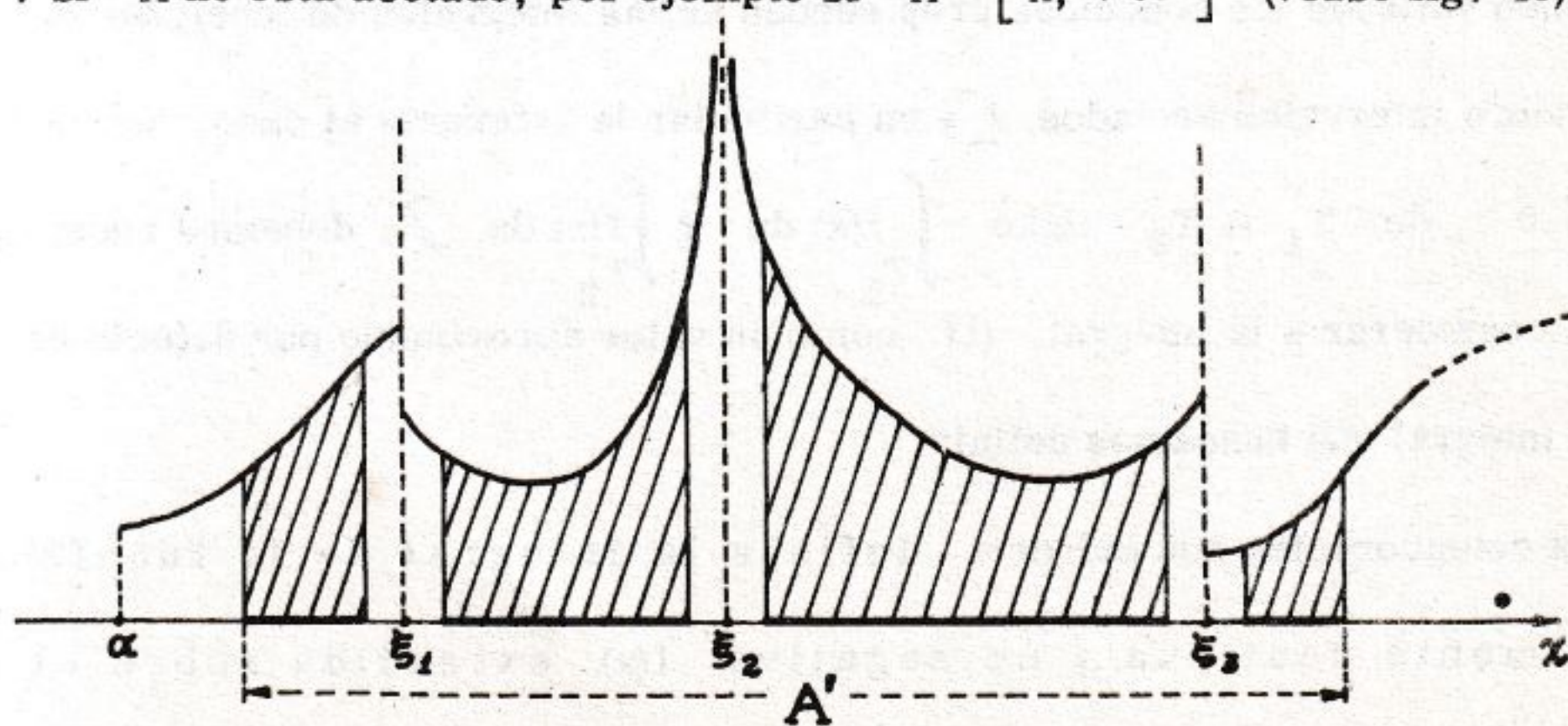


Fig. 46



ta fijar cualquier intervalo  $A'$  acotado contenido en  $A$  y efectuar después, sobre  $A'$ , una construcción del tipo precedente.

La unión de los citados intervalos  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ , ...,  $[a_n, b_n]$  es en todos los casos un dominio acotado y medible  $T$  del eje  $x$ , que está contenido en  $A$  y que no contiene puntos singulares de la  $f(x)$ . Por lo tanto la  $f(x)$  es continua en  $T$  y podemos designar a  $T$  como un dominio acotado y medible de continuidad para  $f(x)$ , contenido en  $A$ . Es evidente que dominios como los del tipo  $T$  se pueden construir infinitos; indicaremos con  $\phi$  a la familia por todos ellos formada. Es también evidente que, siendo  $f(x)$  continua en cada  $T$  de la familia  $\phi$ , resulta perfectamente determinada, para cada  $T$ , la integral de la  $f(x)$  extendida sobre el dominio  $T$ :

$$\int_T f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} f(x) dx + \int_{a_2}^{b_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx, \quad (1)$$

que es un número no negativo (que representa el área de la unión de los rectángulos sombreada de las figuras 45 y 46). Al variar  $T$  en la familia  $\phi$ , la integral (1) describe un conjunto de números no negativos.

Dicho esto, resulta claro que deseando atribuir algún significado a la integral extendida sobre  $A$  de la  $f(x)$  generalmente continua y no negativa, de modo que continúen valiendo las conocidas propiedades de las integrales de funciones continuas sobre intervalos acotados  $[a, b]$  y en particular la referente al caso de que si  $f(x) \geq 0$ , de  $T_1 \subseteq T_2$  sigue  $\int_{T_1} f(x) dx \leq \int_{T_2} f(x) dx$ , debemos necesariamente considerar a la integral (1) como un valor aproximado por defecto de la nueva integral que buscamos definir.

Esta consideración nos induce a definir la integral de la función generalmente continua y no negativa  $f(x)$  extendida sobre el intervalo cerrado  $A$  (acotado o no), como el extremo superior (no negativo, finito o  $+\infty$ ) del conjunto numérico  $I$



descrito por  $\int_T f(x) dx$  donde  $T$  designa cualquier dominio acotado y medible de continuidad para  $f(x)$ , contenido en  $A$ , (en el sentido antes indicado). Tal integral será indicada con el símbolo  $\int_A f(x) dx$  o  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ,  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  según el tipo del intervalo  $A$ .

Podemos entonces afirmar que toda función  $f(x)$  generalmente continua y no negativa en un intervalo  $A$  cerrado, acotado o no, admite siempre una integral  $\int_A f(x) dx$ , pudiendo el valor de ésta (\*) ser un número finito o  $+\infty$ .

Para el cálculo práctico de  $\int_A f(x) dx$  no conviene aplicar la definición precedente, sino valerse más bien de una operación de pasaje al límite, del modo que explicaremos a continuación.

Observemos en primer lugar que, tomando cualquier dominio  $T$  de la familia  $\phi$ , existe siempre en  $\phi$  otro dominio  $T'$  que lo contiene; por ejemplo, refiriéndonos a la fig. 45 basta trasladar el punto  $a_1$  hacia la izquierda (manteniéndolo a la derecha de  $x$ ) para pasar del  $T$  allí considerado a un nuevo  $T'$  que contenga a  $T$ . Podemos, por lo tanto, construir, de infinitas maneras distintas, una sucesión no decreciente  $\{T_n\}$  de dominios de la familia  $\phi$ , en el sentido que  $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_n \subseteq \dots$ .

Observemos, además, que indicando con  $N$  al conjunto constituido por todos los puntos singulares de la  $f(x)$  que caen en  $A$  (\*\*), todo dominio  $T$  de la familia  $\phi$  está contenido en  $A - N$ . Diremos que la sucesión no decre-

(\*) Observemos que la definición ahora dada no está en contradicción con la del Cap. IX relativa a la integral  $\int_a^b f(x) dx$  con  $f(x)$  continua. En efecto; el lector demostrará sin dificultad que, si  $f(x)$  es continua y no negativa en  $[a, b]$ , la integral  $\int_a^b f(x) dx$  es igual al extremo superior del conjunto numérico descrito por  $\int_T f(x) dx$ , donde  $T$  es cualquier grupo de intervalos (finito en número, carentes dos a dos de puntos comunes) contenidos en  $[a, b]$ .

(\*\*) Tal conjunto  $N$  carece de puntos de acumulación, o sea, está constituido totalmente por puntos aislados.



ciente  $\{T_n\}$  de dominios de la familia  $\phi$  tiene por límite a  $A - N$  cuando, fijado arbitrariamente un conjunto cerrado y acotado  $C$  contenido en  $A - N$  (en particular, un dominio  $T$  de la familia  $\phi$ ), existe un dominio  $T_j$  de la sucesión que contiene a  $C$ ; para expresar este concepto usaremos la notación  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = A - N$ . Es fácil convencerse, examinando las fig. 45 y 46, de la posibilidad de construir tales sucesiones  $\{T_n\}$ .

Tras esto, podemos demostrar el siguiente teorema:

I - Sea  $f(x)$  una función generalmente continua y no negativa en un intervalo cerrado dado  $A$ , acotado o no acotado, y sea  $N$  el conjunto de sus puntos singulares. Haremos ver que, para toda sucesión no decreciente  $\{T_n\}$  de dominios acotados y medibles de continuidad para  $f(x)$  contenidos en  $A$ , tal que sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = A - N$ , resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f(x) dx = \int_A f(x) dx \quad (2)$$

Dem. Del hecho que  $T_n \subseteq T_{n+1}$  sigue  $\int_{T_n} f(x) dx \leq \int_{T_{n+1}} f(x) dx$ , o sea que la sucesión de números no negativos  $\left\{ \int_{T_n} f(x) dx \right\}$  no es decreciente, por lo que admitirá límite  $L \geq 0$ , finito o  $+\infty$ , siendo para todo  $n$ ,  $\int_{T_n} f(x) dx \leq L$ .

Se trata de probar que  $L = \int_A f(x) dx$ , es decir, que  $L$  es el extremo superior del conjunto numérico  $I$  descrito por  $\int_T f(x) dx$  cuando  $T$  varía en la familia  $\phi$ . Y, en efecto, fijado arbitrariamente  $T$ , existirá por hipótesis un  $T_j$  que lo contiene, de lo que resultará  $\int_T f(x) dx \leq \int_{T_j} f(x) dx \leq L$ , o sea

$$\int_T f(x) dx \leq L, \quad (\text{para todo } T). \quad (3)$$

En segundo lugar, fijado  $l < L$ , de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f(x) dx = L$  sigue la existencia de un  $T_j$  (es decir, un  $T$  particular de la familia  $\phi$ ) para el que se tendrá

$$\int_{T_j} f(x) dx > l \quad (4)$$

Las (3) y (4) señalan precisamente que  $L$  goza de las dos propiedades ca



racterísticas del extremo superior del conjunto numérico  $I$ , que es lo que queríamos demostrar.

Nos conviene también dar una extensión de este teor. I, que nos será útil en lo que sigue.

Los dominios de la sucesión  $\{T_n\}$  considerada en el teor. I no debían tener puntos comunes con  $N$ ; ahora bien, lo afirmado por el teorema mantiene su validez si a  $N$  se lo sustituye por cualquier conjunto  $N'$ , carente de puntos de acumulación, contenido en  $A$  y que contenga a  $N$ . En otras palabras: al aplicar el teor. I no nos debemos preocupar si en  $N$  se hayan incluido puntos que no sean singulares para la función; basta que  $N$  carezca de puntos de acumulación y que contenga todos los puntos singulares. Precisamente, se tiene el teorema:

I' - Sea  $f(x)$  una función generalmente continua y no negativa en un determinado intervalo cerrado  $A$ , acotado o no, y sea  $N'$  cualquier conjunto carente de puntos de acumulación, contenido en  $A$  y que contenga todos los puntos singulares de  $f(x)$  (es decir,  $N' \supseteq N$ ). Entonces, tomada arbitrariamente una sucesión no decreciente  $\{T'_n\}$  de dominios acotados y medibles, contenidos en  $A - N'$  y por ende, de continuidad para  $f(x)$  de modo que sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} T'_n = A - N'$ , resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} f(x) dx = \int_A f(x) dx \quad (5)$$

Dem. El límite indicado en (5) existe ciertamente (finito o  $+\infty$ ) puesto que

la sucesión  $\left\{ \int_{T'_n} f(x) dx \right\}$  es no decreciente; y será indicado con  $L'$ .

Cualquier  $T'_n$  pertenece a la familia  $\phi$ ; de ahí que  $\int_{T'_n} f(x) dx \leq \int_A f(x) dx$ ,



y, pasando al límite para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$L' \leq \int_A f(x) dx \quad (6)$$

Por otra parte, fijados arbitrariamente dos números  $l$ ,  $l_1$  de modo que sea

$$l < l_1 < \int_A f(x) dx,$$

existirá en  $\phi$  un  $T$  tal que sea

$$\int_T f(x) dx > l_1 \quad (7)$$

Tal  $T$  puede contener a lo sumo un número finito de puntos del conjunto  $N'$  pudiéndose, por lo tanto, construir en  $T$  un dominio  $U$  que no tenga puntos comunes con  $N'$  cuya medida verifique (siendo  $M > 0$  el máximo de  $f(x)$  en  $T$ ) (\*)

$$\text{med } U > \text{med } T - \frac{l_1 - l}{M}.$$

El dominio  $T$  queda descompuesto en el dominio  $U$  y en otro dominio  $U'$  y se tiene

$$\begin{aligned} \int_U f(x) dx &= \int_T f(x) dx - \int_{U'} f(x) dx \geq \int_T f(x) dx - M \text{med } U' = \\ &= \int_T f(x) dx - M (\text{med } T - \text{med } U) > \int_T f(x) dx - M \frac{l_1 - l}{M}, \end{aligned}$$

o sea,

$$\int_U f(x) dx > \int_T f(x) dx - (l_1 - l) \quad (8)$$

Puesto que  $U \subseteq A - N'$ , existe un  $T'_v$  que contiene a  $U$ ; teniéndose

$$\begin{aligned} \int_U f(x) dx &\leq \int_{T'_v} f(x) dx \text{ y, en consecuencia} \\ \int_U f(x) dx &\leq L' \quad (9) \end{aligned}$$

De (7), (8) y (9) sigue

-----

(\*) Podemos suponer  $M > 0$ , excluyendo el caso en que  $f(x)$  sea idénticamente nula o en el que la (5) es evidente.



entonces, todo número  $l$  menor que  $\int_A f(x) dx$  resulta menor que  $L'$ , lo que sólo puede suceder si

$$\int_A f(x) dx \leq L'.$$

Esta relación, junto a la (6), proporciona la (5), que es lo que queríamos demostrar.

Demos ahora el significado geométrico de la integral  $\int_A f(x) dx$ , que recién hemos definido. En el plano  $xy$  consideremos el conjunto  $U$  lugar de todos los puntos  $(x, y)$  que verifican

$$x \in A - N, \quad 0 \leq y \leq f(x). \quad (10)$$

Tal conjunto  $U$  será llamado un rectánguloide generalizado, que podrá ser acotado o no acotado, (este último caso se presentará tanto si  $A$  es a cotado y  $f(x)$  no está acotado, como si  $A$  no es acotado, véase fig. 47). Exten-

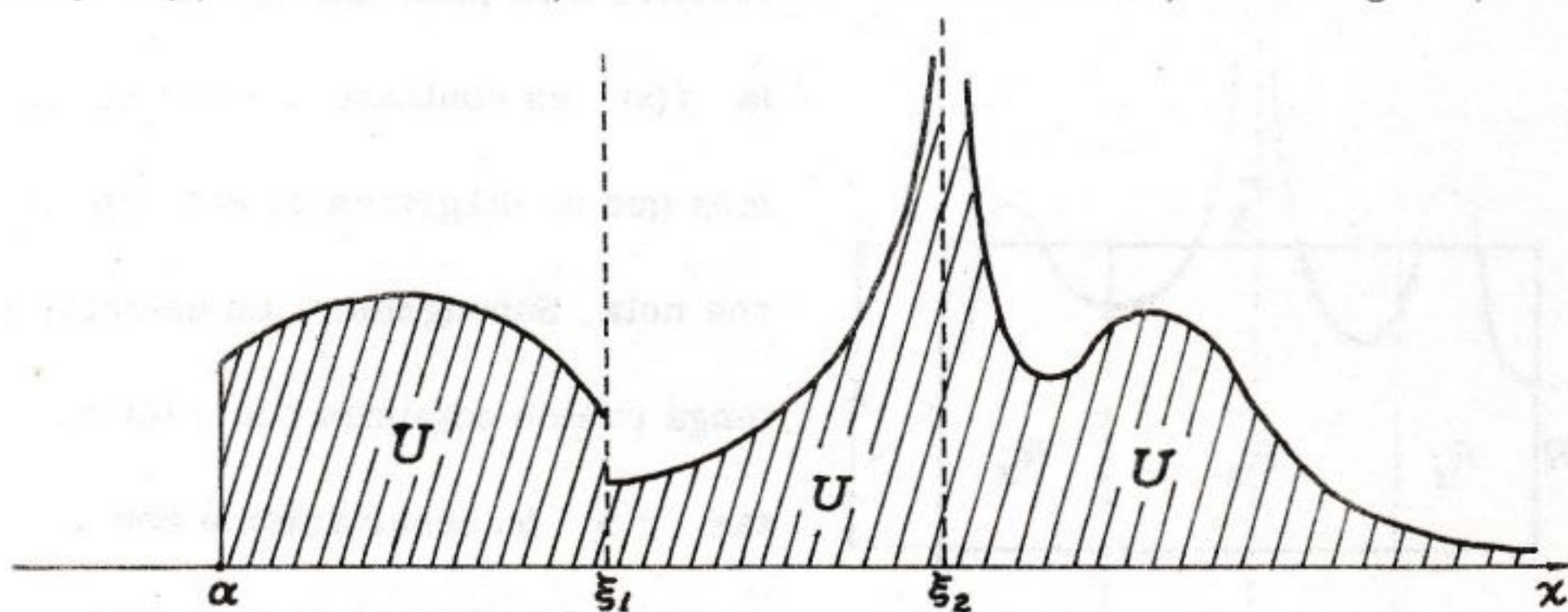


Fig. 47

diendo el teor. I del Cap. XX, n° 5, tenemos el siguiente teorema:

II - En las hipótesis dadas para  $f(x)$ , el rectánguloide generalizado  $U$  que le corresponde, es un conjunto medible del plano y se tiene

$$\text{área } U = \int_A f(x) dx. \quad (11)$$



Dem. Comencemos a probar que  $U$  es medible. La  $\mathcal{F}U$  está constituida por los puntos del intervalo  $A$  del eje  $x$ , de eventuales segmentos paralelos al eje  $y$  con origen en los extremos de  $A$  (si existen y no son singulares), de los puntos de la curva  $y = f(x)$  con  $x \in A - N$  y, por último, de los puntos si tuados sobre las rectas  $r_\xi$  paralelas al eje  $y$  que nacen en los puntos  $\xi$  del conjunto  $N$  (si existen puntos singulares). Por lo tanto, tomado en el plano un intervalo arbitrario  $R$ , la intersección  $\mathcal{F}U \cap R$  se compone, a lo sumo, de un número finito de segmentos (de área nula), de un número finito de conjuntos de puntos situados sobre las citadas rectas  $r_\xi$  (de área nula) y de un conjunto (acotado)  $E$  de puntos situados sobre la curva  $y = f(x)$  con  $x \in A - N$ .

Probemos que también este último conjunto  $E$  tiene área nula. El hecho es evidente si  $R$  no tiene puntos en común con ninguna recta  $r_\xi$ , puesto que en este caso el conjunto  $E$  pertenece al diagrama de la  $f(x)$

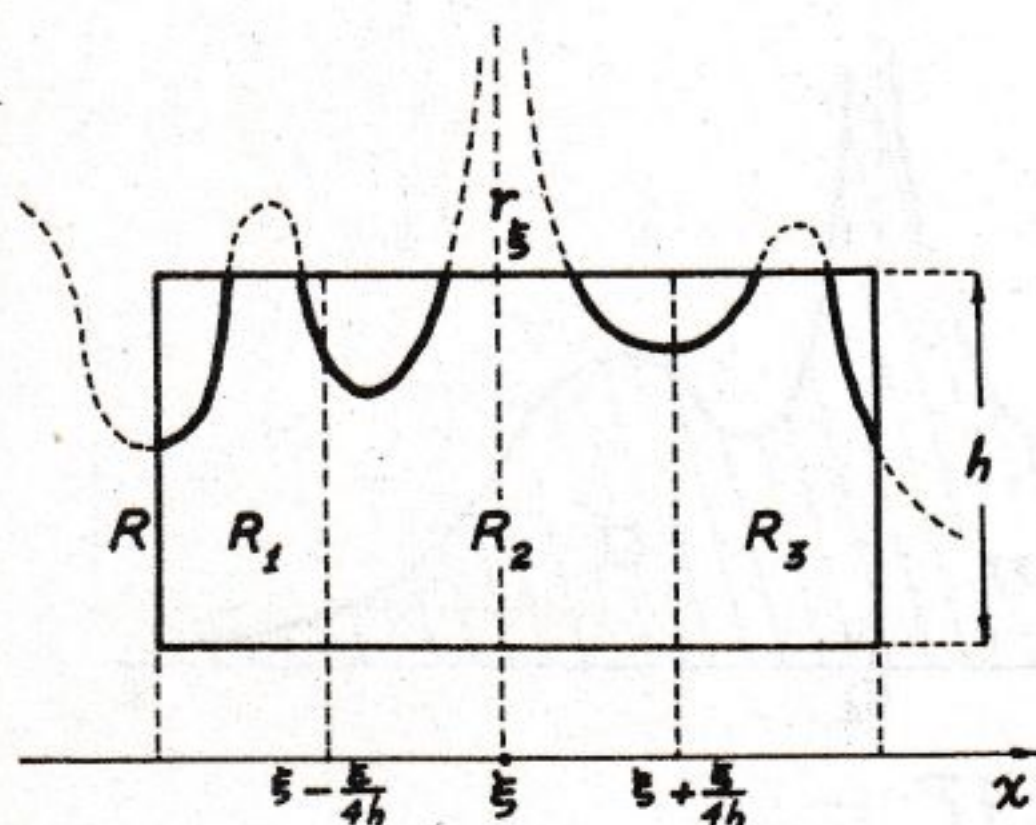


Fig. 48

relativo a un intervalo cerrado, en el qe la  $f(x)$  es continua y nosotros ya sabemos que un diagrama de este tipo tiene área nula. Supongamos, en cambio, que  $R$  tenga puntos comunes con ciertas rectas  $r_\xi$  (necesariamente con un número finito de ellas) y, para fijar las ideas, supongamos que esté atravesado por una

sola recta  $r_\xi$  (fig. 48). Llamando con  $h$  a la altura de  $R$  y fijando arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , tracemos las rectas  $x = \xi - \frac{\epsilon}{4h}$ ,  $x = \xi + \frac{\epsilon}{4h}$  que, suponiendo  $\epsilon$  suficientemente pequeño, descompone a  $R$  en tres rectángulos  $R_1, R_2, R_3$ .

Los conjuntos  $E \cap R_1$ ,  $E \cap R_3$  se encuentran en las condiciones del ca-



so antes considerado y tienen, entonces, área nula; se podrá, por lo tanto, (efectuando oportunas descomposiciones coordinadas de  $R_1$  y  $R_3$ ) recubrir tanto  $\underline{u}$  no como otro con un número finito de rectángulos de área total menor que  $\frac{\epsilon}{4}$ . Efectuando además una descomposición coordinada de  $R_2$ , los rectángulos de la misma que tienen puntos en común con  $E \cap R_2$  tienen ciertamente un área total no superior a  $2 \frac{\epsilon}{4h} h = \frac{\epsilon}{2}$ . Entonces, todo el conjunto  $E$  queda recubierto por un número finito de rectángulos cuya área total es menor que  $\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ ; eso prueba que  $\text{med } E = 0$ .

Queda así establecido que, para todo  $R$ , el conjunto  $\mathcal{F}U \cap R$  tiene área nula, de donde  $\text{área } \mathcal{F}U = 0$ , o sea que  $U$  es medible.

Yendo ahora a calcular el área de  $U$  nos valdremos del teor. II del n<sup>o</sup> precedente. Con tal motivo comencemos fijando sobre el eje  $x$  una sucesión  $\{T_n\}$  como en el enunciado del teorema I y a cada  $T_n$  hagámonle corresponder el conjunto  $U_n$  del plano  $xy$  que está definido por

$$x \in T_n, \quad 0 \leq y \leq f(x). \quad (12)$$

Resulta claro que  $U_n$  es la unión de un número finito de rectanguloides relativos a la función  $f(x)$  que tienen por base los distintos intervalos cerrados y acotados que componen  $T_n$  y en los que la  $f(x)$  es continua. Por lo tanto, cada  $U_n$  es un conjunto cerrado y acotado, contenido en  $U$ ; además es medible, con

$$\text{área } U_n = \int_{T_n} f(x) dx. \quad (13)$$

De  $T_n \subseteq T_{n+1}$  sigue  $U_n \subseteq U_{n+1}$ , y entonces, la sucesión  $U_n$  es no decreciente. Hagamos ver que también se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$ , o sea a que, tomado arbitrariamente un conjunto cerrado y acotado  $C$  contenido en  $U$ , existe un  $U_v$  que lo contiene.

En efecto; recordando la definición (10) de  $U$ , resulta claro que para los puntos  $(x, y)$  de  $C$  se tiene  $x \in A - N$ ; por lo tanto  $C$  no puede tener



puntos en común con las rectas  $r_{\xi}$  y, entonces, su proyección  $C_x$  sobre el eje  $x$  es un conjunto cerrado y acotado<sup>(\*)</sup> que no contiene ningún punto singular de la  $f(x)$ . Sigue así que todo punto singular  $\xi$  tiene distancia positiva de  $C_x$  de donde  $C_x$  está contenido en un oportuno dominio  $T$ , acotado y medible, de continuidad para  $f(x)$ . Por hipótesis existe un  $T_v$  que contiene a  $T$  y, por ende, a  $C_x$  y entonces se ve inmediatamente que  $C$  está contenido en el conjunto  $U_v$  que corresponde a  $T_v$ ; en efecto, todo punto  $(x, y) \in C$  verifica la  $x \in T_v$  (puesto que  $C_x \subseteq T_v$ ) y la  $0 \leq y \leq f(x)$  (puesto que  $C \subseteq U$ ) y entonces, por la (12), pertenece a  $U_v$ . Queda así demostrado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$ .

La sucesión  $\{U_n\}$  verifica, en relación al conjunto  $U$ , todas las hipótesis del teor. II del n° precedente, y, en consecuencia, se tiene  $\text{área } U = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{área } U_n$  o sea, por la (13):

$$\text{área } U = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f(x) dx ;$$

de aquí, teniendo en cuenta el teor. I, sigue  $\text{área } U = \int_A f(x) dx$ , que es lo que queríamos demostrar.

Demos ahora algunos ejemplos de cálculos de integrales de funciones  $f(x)$  generalmente continuas y no negativas por medio del teor. I, señalando el significado geométrico de las mismas.

Ejemplo 1º) La función  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  es generalmente continua y positiva en  $[-1, 1]$ , con los dos puntos singulares  $-1, 1$ ; entonces el conjunto  $A-N$  es el intervalo abierto  $(-1, 1)$ .

Como sucesión  $\{T_n\}$  no decreciente y tendiente a  $A-N$  podemos tomar la

(\*) Dejamos al lector la tarea de probar que la proyección de un conjunto cerrado y acotado, es también un conjunto cerrado y acotado.



sucesión de los intervalos  $\left[ -1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$ , (véase fig. 49). Se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \arcsen \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \arcsen \left( -1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \\ &= \arcsen 1 - \arcsen (-1) = \pi \end{aligned}$$

El rectánguloide generalizado sombreado en la fig. 49 es un conjunto no acota-

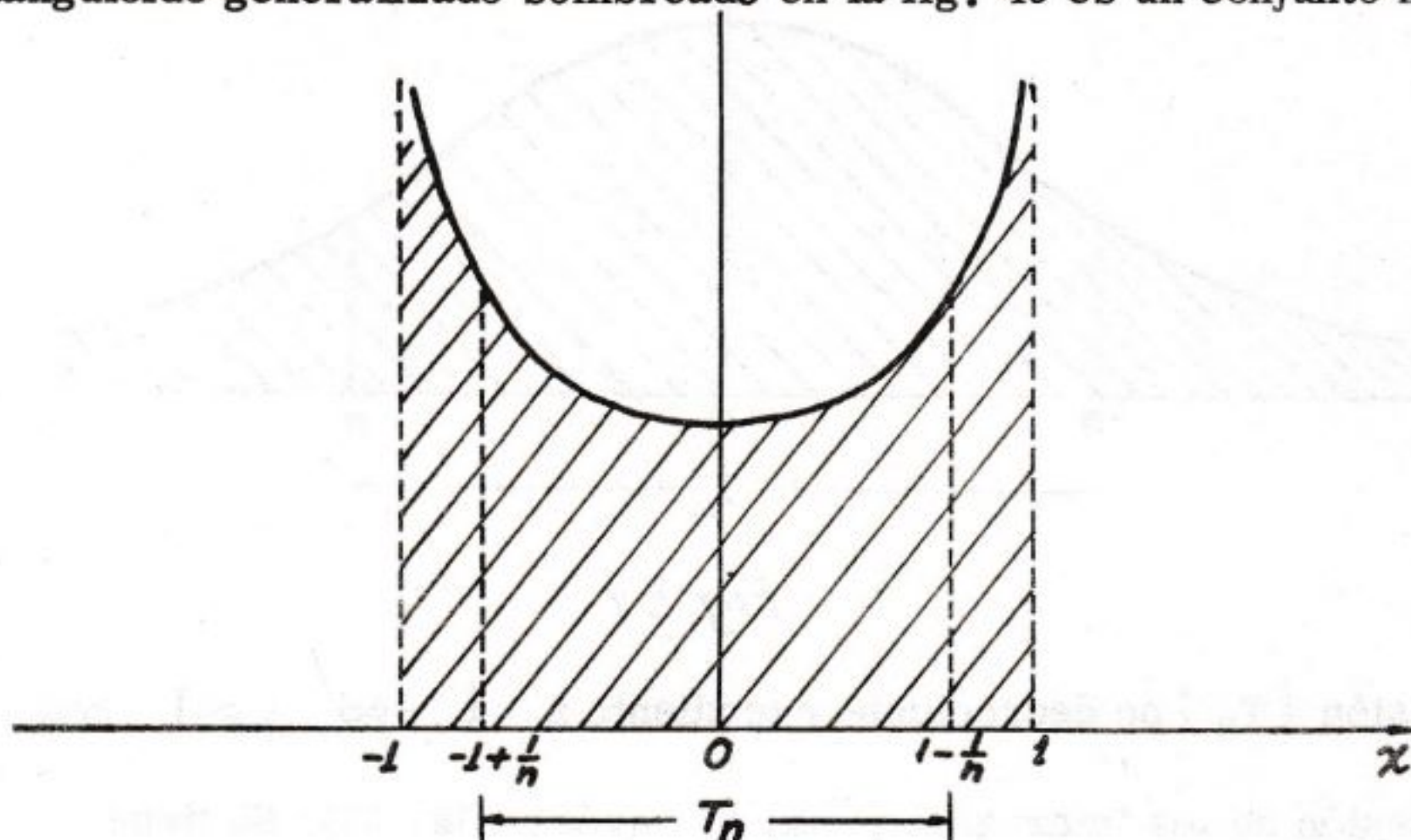


Fig. 49

do que tiene área finita igual a  $\pi$ .

Ejemplo 2º) La función  $y = \frac{1}{e^x - 1}$  es generalmente continua y positiva en  $[0, 1]$ , con el origen 0 como único punto singular; el conjunto A-N es el intervalo semiabierto  $(0, 1]$ . Como sucesión  $\{T_n\}$  no decreciente y tendien-

te a A - N podemos tomar la sucesión de los intervalos  $\left[ \frac{1}{n}, 1 \right]$ , (véase fig.

50). Se tiene, entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{e^x - 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \log(1 - e^{-x}) \right]_{\frac{1}{n}}^1 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} = +\infty. \end{aligned}$$

El rectánguloide generalizado sombre

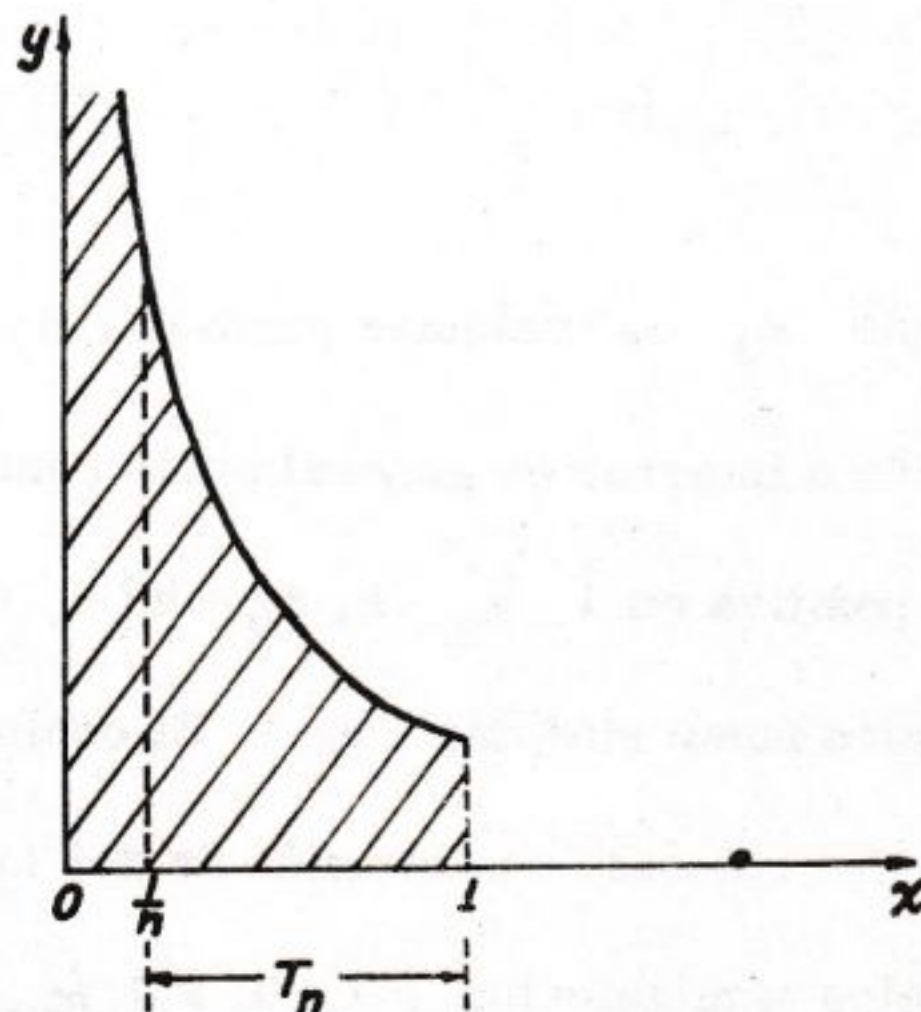


Fig. 50

ado en fig. 50 es, entonces, un conjunto no acotado que tiene área infinita.



Ejemplo 3º) La función  $y = \frac{1}{1+x^2}$  es continua y positiva en  $[-\infty, +\infty]$ ; como no existen puntos singulares, el conjunto  $A-N$  coincide con  $[-\infty, +\infty]$ .

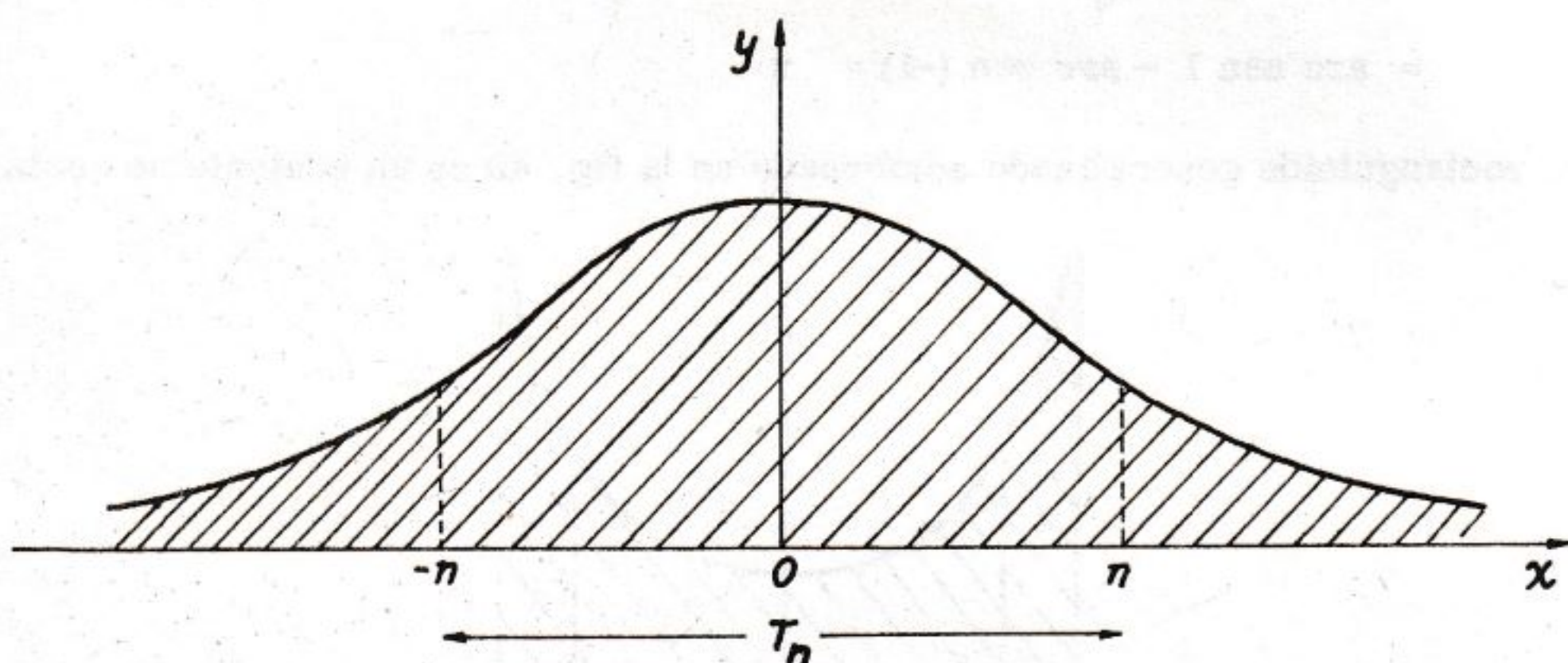


Fig. 51

Como sucesión  $\{T_n\}$  no decreciente y tendiente a  $[-\infty, +\infty]$  podemos tomar la sucesión de los intervalos  $[-n, n]$  (véase fig. 51). Se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\arctg n - \arctg (-n)] = \pi.$$

El rectánguloide generalizado sombreado en fig. 51 es un conjunto no acotado que tiene área finita igual a  $\pi$ .

Ejemplo 4º) Propongámonos el cálculo de la siguiente integral

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{dx}{|x-x_0|^\alpha}$$

donde  $x_0$  es cualquier punto del eje  $x$  y  $h, \alpha$  dos números positivos. La función

a integrar es generalmente continua

y positiva en  $[x_0-h, x_0+h]$ , con el

único punto singular  $x_0$ . El conjunto

$A-N$  coincide con la unión de dos inter-

valos semiabiertos  $[x_0-h, x_0), (x_0, x_0+h]$

y, como sucesión  $\{T_n\}$  no decreciente y tendiente a  $A-N$  podemos tomar la

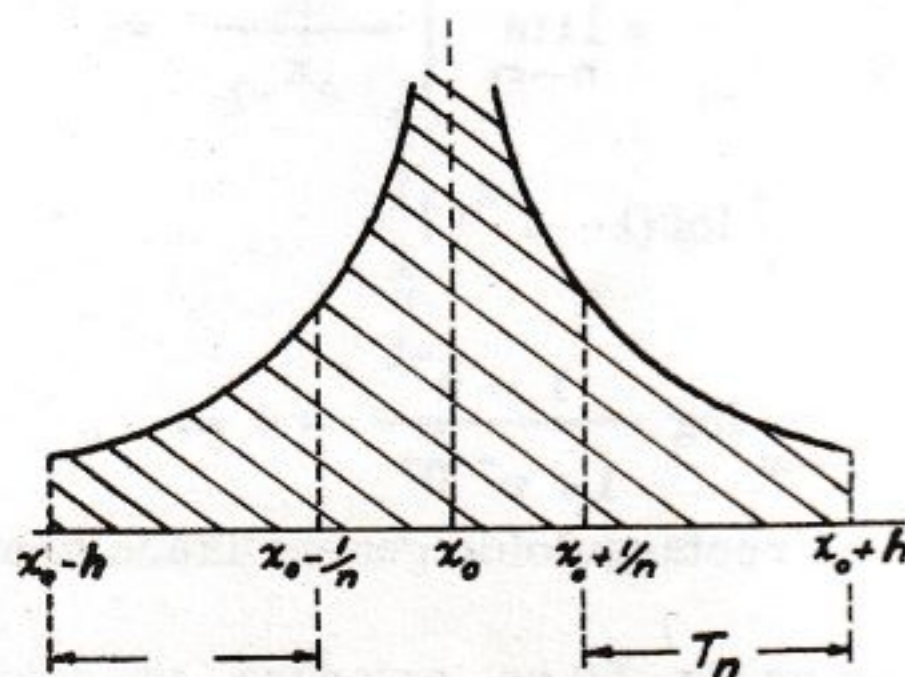


Fig. 52



de los pares de intervalos  $[x_0 - h, x_0 - \frac{1}{n}]$ ,  $[x_0 + \frac{1}{n}, x_0 + h]$  (véase fig. 52). Se tiene

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{dx}{|x-x_0|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{x_0-h}^{x_0-\frac{1}{n}} \frac{dx}{(x_0-x)^\alpha} + \int_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0+h} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_{\frac{1}{n}}^h \frac{dt}{t^\alpha} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha} \left( h^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}} \right) & [\text{si } \alpha \neq 1] \\ 2 \log(hn) & [\text{si } \alpha = 1] \end{cases} = \begin{cases} \frac{2h^{1-\alpha}}{1-\alpha} & [\text{si } \alpha < 1] \\ +\infty & [\text{si } \alpha \geq 1] \end{cases}$$

El rectánguloide generalizado de la fig. 52 es un conjunto no acotado que tiene área finita si  $\alpha < 1$ ; tiene, en cambio, área infinita si  $\alpha \geq 1$ .

Ejemplo 5º) Calculemos ahora la integral

$$\int_{x_0+h}^{+\infty} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha}$$

donde  $x_0$  es un punto cualquiera del eje  $x$  y  $h, \alpha$  dos números positivos.

La función a integrar es continua y positiva en  $[x_0+h, +\infty]$  y asumiendo

$n > h$ ,  $T_n \equiv [x_0+h, x_0+n]$  (véase fig.

53), se encuentra

$$\int_{x_0+h}^{+\infty} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0+h}^{x_0+n} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_h^n \frac{dt}{t^\alpha} =$$

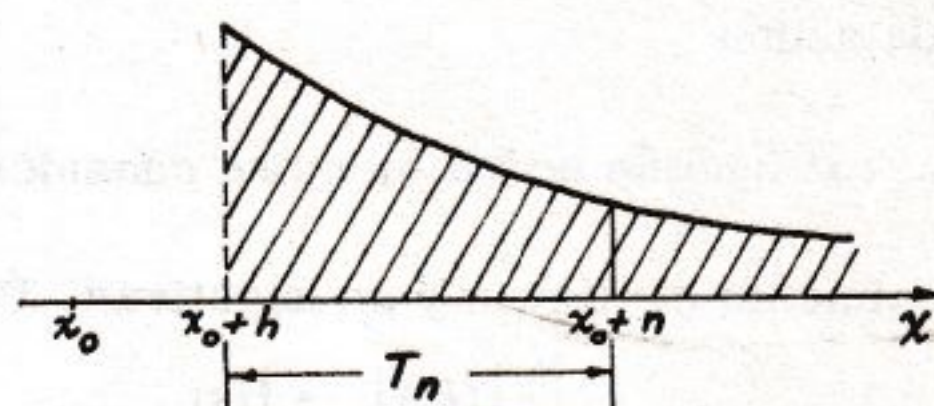


Fig. 53

$$= \begin{cases} \frac{n^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{1-\alpha} & (\text{si } \alpha \neq 1) \\ \log \frac{n}{h} & (\text{si } \alpha = 1) \end{cases} = \begin{cases} +\infty & (\text{si } \alpha \leq 1) \\ \frac{h^{\alpha-1}}{\alpha-1} & (\text{si } \alpha > 1) \end{cases}$$

El rectánguloide generalizado de fig. 53 es, entonces, un conjunto no acotado que tiene área infinita si  $\alpha \leq 1$ , y área finita si  $\alpha > 1$ . Nótese que son casos particulares de este resultado los dos ejemplos dados al final del nº prece-



dente.

El lector puede estudiar análogamente la integral  $\int_{-\infty}^{x_0-h} \frac{dx}{(x_0-x)^\alpha}$  y llegará a la misma conclusión.

Ejemplo 6º) Considerada la función  $e^{-x}$  en  $[0, +\infty]$ , se tiene

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n}) = 1$$

Observación: En todos estos ejemplos hemos elegido siempre la sucesión  $\{T_n\}$  del modo más simple posible. Es importante observar que, para cualquier otra elección de los  $T_n$  se habría siempre obtenido el mismo resultado, tal como lo asegura el teor. I. Así, en el ejemplo 1º) podría haberse asumido

$T_n \equiv [-1 + \frac{1}{n^5}, 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}]$ ; en el ejemplo 3º) se podría poner

$T_n \equiv [-(\log n)^2, n^5]$ , etc., etc.

#### 4 - INTEGRALES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE, GENERALMENTE CONTINUAS Y DE SIGNO CUALQUIERA.

Sea  $f(x)$  una función real y generalmente continua en un intervalo cerrado  $A$  acotado o no, y no hagamos ninguna hipótesis sobre el signo de los valores que ella asume.

Tal función podrá siempre considerarse como diferencia de dos funciones generalmente continuas y no negativas. Por ejemplo, poniendo:

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

se tiene, evidentemente

$$f_1(x) \geq 0, \quad f_2(x) \geq 0, \quad f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Las  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  son todavía generalmente continuas, ya que cada punto de continuidad para la  $f(x)$  lo es también para  $|f(x)|$  y, por ende, para  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ .

Sin embargo, un punto singular de  $f(x)$  no es necesariamente un punto singu-



lar para  $f_1(x)$  o para  $f_2(x)$  ; por ejemplo la  $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{para } x < 0 \\ x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$  tiene

el punto singular  $x = 0$  ; pero la  $f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$  no lo tiene más.

Por lo tanto, si  $N_1$  y  $N_2$  son los conjuntos de los puntos singulares de  $f_1(x)$ , y  $f_2(x)$ , solo puede afirmarse que

$$N_1 \subseteq N, \quad N_2 \subseteq N. \quad (1)$$

Notemos que en los puntos donde se tiene  $f(x) \geq 0$  resulta  $f_1(x) = f(x)$  ;  $f_2(x) = 0$  y que, en los puntos donde es  $f(x) \leq 0$ , resulta  $f_1(x) = 0$ ,  $f_2(x) = -f(x)$ . Sigue, entonces, que el gráfico de la  $f_1(x)$  se obtiene del de la  $f(x)$  dejando in

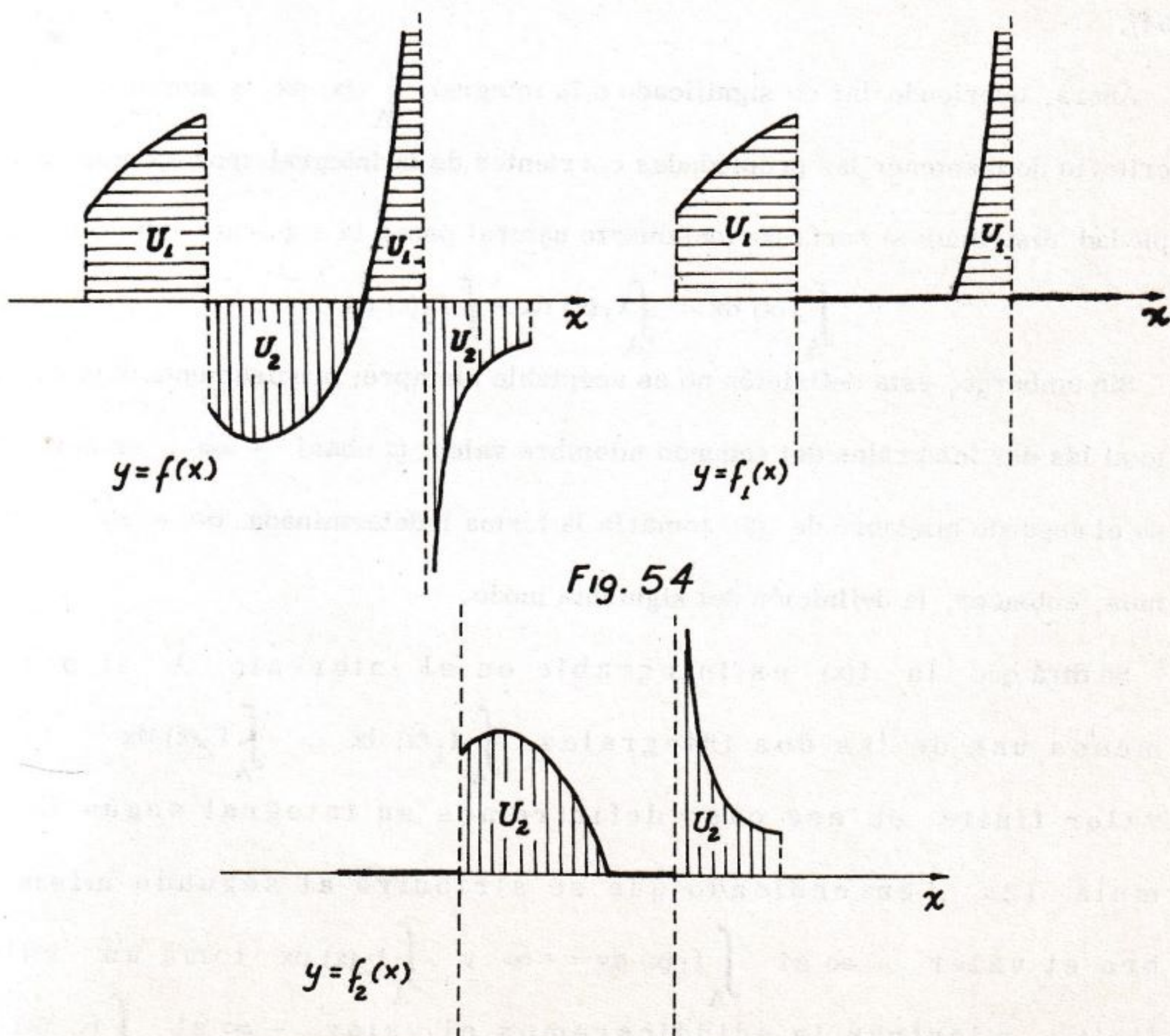


Fig. 54



alteradas las partes que están sobre el eje  $x$  y concentrando en dicho eje las partes que están debajo del mismo; mientras que el gráfico de la  $f_2(x)$  se obtiene del de la  $f(x)$  transformando con una simetría respecto del eje  $x$  las partes que están por debajo del eje  $x$  y aplastando sobre tal eje las partes que están sobre él (véase fig. 54).

Cada una de las funciones no negativas  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  aceptan integral (finita o  $+\infty$ ) extendida sobre  $A$  (según la definición del nº precedente) y es evidente que  $\int_A f_1(x) dx$  representa el área del rectánguloide generalizado  $U_1$  que está por encima del eje  $x$  (definido por  $x \in A-N$ ,  $0 \leq y \leq f_1(x)$ ) y que la integral  $\int_A f_2(x) dx$  representa el área del rectánguloide generalizado  $U_2$  que está por debajo del eje  $x$  [definido por  $x \in A-N$ ,  $-f_2(x) \leq y \leq 0$ ] (véase fig. 54).

Ahora, queriendo dar un significado a la integral  $\int_A f(x) dx$  y siempre con el criterio de mantener las propiedades corrientes de la integral (por ejemplo la propiedad distributiva) sería perfectamente natural poner la siguiente definición:

$$\int_A f(x) dx = \int_A f_1(x) dx - \int_A f_2(x) dx \quad . \quad (2)$$

Sin embargo, esta definición no es aceptable siempre; precisamente deja de serlo si las dos integrales del segundo miembro valen (ambas)  $+\infty$ , en cuyo caso el segundo miembro de (2) tomaría la forma indeterminada  $\infty - \infty$ . Daremos, entonces, la definición del siguiente modo.

Se dirá que la  $f(x)$  es integrable en el intervalo  $A$  si por lo menos una de las dos integrales  $\int_A f_1(x) dx$ ,  $\int_A f_2(x) dx$  tiene valor finito; en ese caso definiremos su integral según la fórmula (2), entendiendo que se atribuirá al segundo miembro el valor  $+\infty$  si  $\int_A f_1(x) dx = +\infty$  y  $\int_A f_2(x) dx$  toma un valor finito, mientras le adjudicaremos el valor  $-\infty$  si  $\int_A f_2(x) dx = -\infty$  y  $\int_A f_1(x) dx$  toma un valor finito.



es un valor finito y  $\int_A f_2(x) dx = +\infty$ .

En otras palabras, la  $f(x)$  será considerada integrable en  $A$  cuando al menos uno de los dos rectánguloides generalizados  $U_1$ ,  $U_2$  tiene área finita; en ese caso su integral representa la diferencia entre el área de  $U_1$  y el área de  $U_2$  (diferencia que puede ser finita,  $+\infty$  o  $-\infty$ ).

En cambio, en el caso en que tanto  $U_1$  como  $U_2$  tienen área infinita, la integral  $\int_A f(x) dx$  carece de sentido<sup>(\*)</sup>.

La nueva definición no contradice la dada en el número precedente puesto que si  $f(x) \geq 0$  se tendrá  $f_1(x) = f(x)$ ,  $f_2(x) = 0$  y la (2) proporciona para la integral  $\int_A f(x) dx$  (en el nuevo significado) el valor  $\int_A f(x) dx - 0 = \int_A f(x) dx$  (en el viejo significado). Obsérvese también que si  $f(x) \leq 0$ , resultando  $f_1(x) = 0$ ,  $f_2(x) = -f(x)$ , la (2) proporciona  $\int_A f(x) dx = -\int_A [-f(x)] dx$ .

Se extiende inmediatamente el teor. I del n° precedente:

I - Sea  $f(x)$  una función real y generalmente continua en un intervalo cerrado  $A$  dado, acotado o no acotado, y sea  $N$  el conjunto de sus puntos singulares. Si la  $f(x)$  es integrable en  $A$  entonces, fijada arbitrariamente una sucesión no decreciente  $\{T_n\}$  de dominios acotados y medibles de continuidad para  $f(x)$ , contenidos en  $A$ , de modo que sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = A - N$ , resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f(x) dx = \int_A f(x) dx \quad (3)$$

Dem. En virtud de la (1) y el teor. I' del n° precedente, es lícito adoptar pa-

(\*) Naturalmente, nada impide en este caso idear alguna otra definición y sobre esto volveremos en el n° 10. Veremos que, siempre en este caso, pueden formularse infinitas definiciones distintas que, sin embargo, confieren distintos valores a la integral; además, condichas definiciones suele desnaturalizarse el concepto de integral, puesto que al aplicarlas dejan de valer algunas propiedades clásicas. Por eso es que se habla de integrales impropias, las que también son usadas a menudo en las aplicaciones.



ra  $f_1(x)$  ,  $f_2(x)$  el conjunto  $N$  en lugar de  $N_1$  ,  $N_2$  y escribir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f_1(x) dx = \int_A f_1(x) dx \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f_2(x) dx = \int_A f_2(x) dx \quad .$$

Como, por hipótesis, uno al menos de estos dos límites es finito, podemos aplicar

el teorema sobre el límite de una diferencia que da:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{T_n} f_1(x) dx - \int_{T_n} f_2(x) dx \right] =$   
 $= \int_A f_1(x) dx - \int_A f_2(x) dx$  ; por otra parte, gracias a la propiedad distributiva de

las integrales de las funciones continuas sobre dominios acotados se tiene

$$\int_{T_n} f_1(x) dx - \int_{T_n} f_2(x) dx = \int_{T_n} [f_1(x) - f_2(x)] dx = \int_{T_n} f(x) dx \quad .$$

Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f(x) dx = \int_A f_1(x) dx - \int_A f_2(x) dx$  que, por la (2), equivale  
a la (3) , que es lo que queríamos demostrar.

Al aplicar este teorema es necesario tener bien presente que se requiere saber previamente si la  $f(x)$  es integrable en  $A$  . Solamente en el caso de funciones no negativas (o no positivas) tal integrabilidad está determinada a priori y entonces para tales funciones se puede usar sin más la (3) con una elección arbitraria de la sucesión  $T_n$  .

En el caso de las funciones de signo variable, la (3) puede aplicarse solamente tras haber reconocido de algún modo que la  $f(x)$  es integrable; en otras palabras, si para una  $f(x)$  de signo variable se aplicare inmediatamente la (3) , utilizando una cierta sucesión  $\{T_n\}$  y se encontrase que el límite indicado existe, no se podría de ninguna manera aceptar que el límite hallado es el valor de la integral puesto que, si la  $f(x)$  no fuese integrable, usando otras sucesiones  $\{T_n\}$  se pueden encontrar límites distintos del precedente.

Es también evidente que también vale el teorema análogo al teor. I' del nº precedente, es decir:

I' - Sea  $f(x)$  una función real y generalmente continua en un intervalo cerrado  $A$  dado, acotado o no acotado, y sea  $N'$  cualquier conjunto carente de puntos de acumulación, conteni



do en  $A$  y que contenga todos los puntos singulares de  $f(x)$  [es decir  $N' \supseteq N$ ]. Si la  $f(x)$  es integrable en  $A$ , fijada arbitrariamente una sucesión no decreciente  $\{T'_n\}$  de dominios acotados y medibles, contenidos en  $A - N'$  por ende de continuidad para  $f(x)$  de modo que sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} T'_n = A - N'$ , resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} f(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

Demos ahora algunos ejemplos relativos a lo que ha sido dicho en este n<sup>o</sup>.

Ejemplo 1<sup>o</sup>) La función  $y = \log x$  es generalmente continua en  $[0, 1]$  con el único punto singular  $0$ , y en dicho intervalo es  $\leq 0$ , por lo que sin duda será integrable. Elijamos  $\{T_n\} \equiv [\frac{1}{n}, 1]$  y tendremos

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \log x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \log x - x]_{\frac{1}{n}}^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} [-1 + \frac{1 + \log n}{n}] = -1.$$

Ejemplo 2<sup>o</sup>) La función  $y = e^{-x} \sin x$  es continua  $[0, +\infty]$  y cambia infinitas veces de signo (véase fig. 55). Probaremos que es integrable, haciendo ver

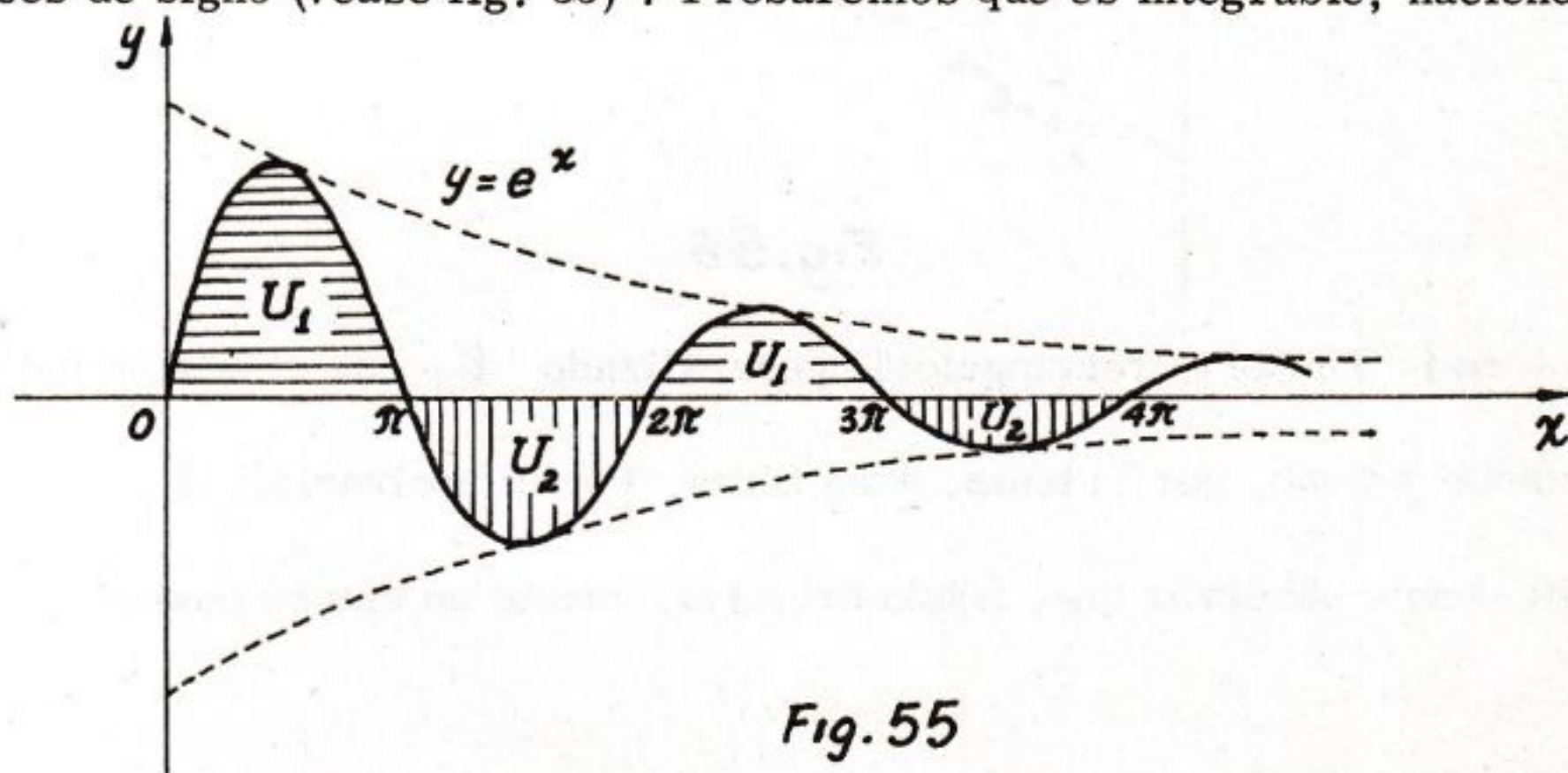


Fig. 55

que tanto  $U_1$  como  $U_2$  tienen área finita. Si consideramos el conjunto simétrico de  $U_2$  respecto del eje  $x$ , se ve inmediatamente que  $\text{área } U_1 + \text{área } U_2$  es ciertamente menor que el área del rectánguloide generalizado  $[x \geq 0, 0 \leq y \leq e^{-x}]$ , es decir, menor que 1 (ver n<sup>o</sup> precedente, ej. 6<sup>o</sup>). Es establecida así la integrabilidad de  $e^{-x} \sin x$  en  $[0, +\infty]$ , podemos aplicar



la (3) asumiendo, por ejemplo,  $T_n \equiv [0, n]$ ; se encuentra de ese modo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x} \sin x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x) \right]_0^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-n} (\cos n + \sin n) + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

número que representa la diferencia área  $U_1$  - área  $U_2$ .

Ejemplo 3º) Considérese en  $[0, +\infty]$  la función definida por (ver fig. 56)

$$f(x) = \begin{cases} e^x \sin x & \text{en } [0, \pi], [2\pi, 3\pi], [4\pi, 5\pi], \dots \\ e^{-x} \sin x & \text{en } [\pi, 2\pi], [3\pi, 4\pi], [5\pi, 6\pi], \dots \end{cases}$$

tal función es continua y cambia infinitas veces de signo. La  $f(x)$  es integrable

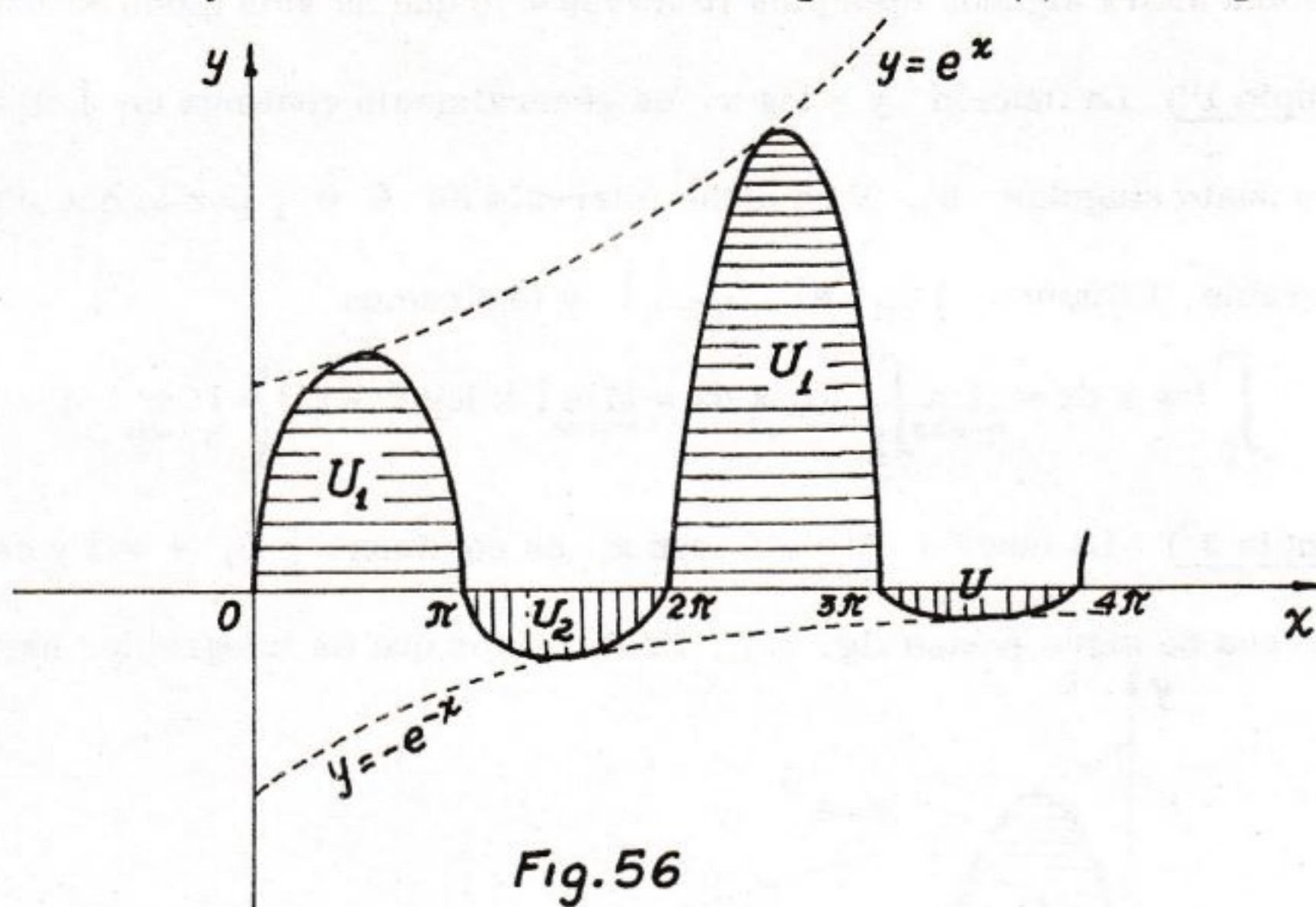


Fig. 56

en  $[0, +\infty]$  porque el rectánguloide generalizado  $U_2$  es el mismo del ejemplo precedente y tiene, por lo tanto, área finita. Por el contrario,  $U_1$  tiene área infinita; basta observar que, fijado arbitrariamente un entero positivo  $n$ , resulta

$$\text{área } U_1 > \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^x \sin x \, dx = \left[ \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} = \frac{1}{2} [e^{(2n+1)\pi} + e^{2n\pi}]$$

y que este número puede hacerse tan grande como se quiera, con tomar  $n$  suficientemente grande. Tendremos, entonces

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx = +\infty.$$



Ejemplo 4º) La función  $y = \frac{\text{sen } x}{x}$  es continua en  $[0, +\infty]$  (ver fig. 57); pero no es integrable en dicho intervalo. En efecto; para todo entero positivo  $n$ , el

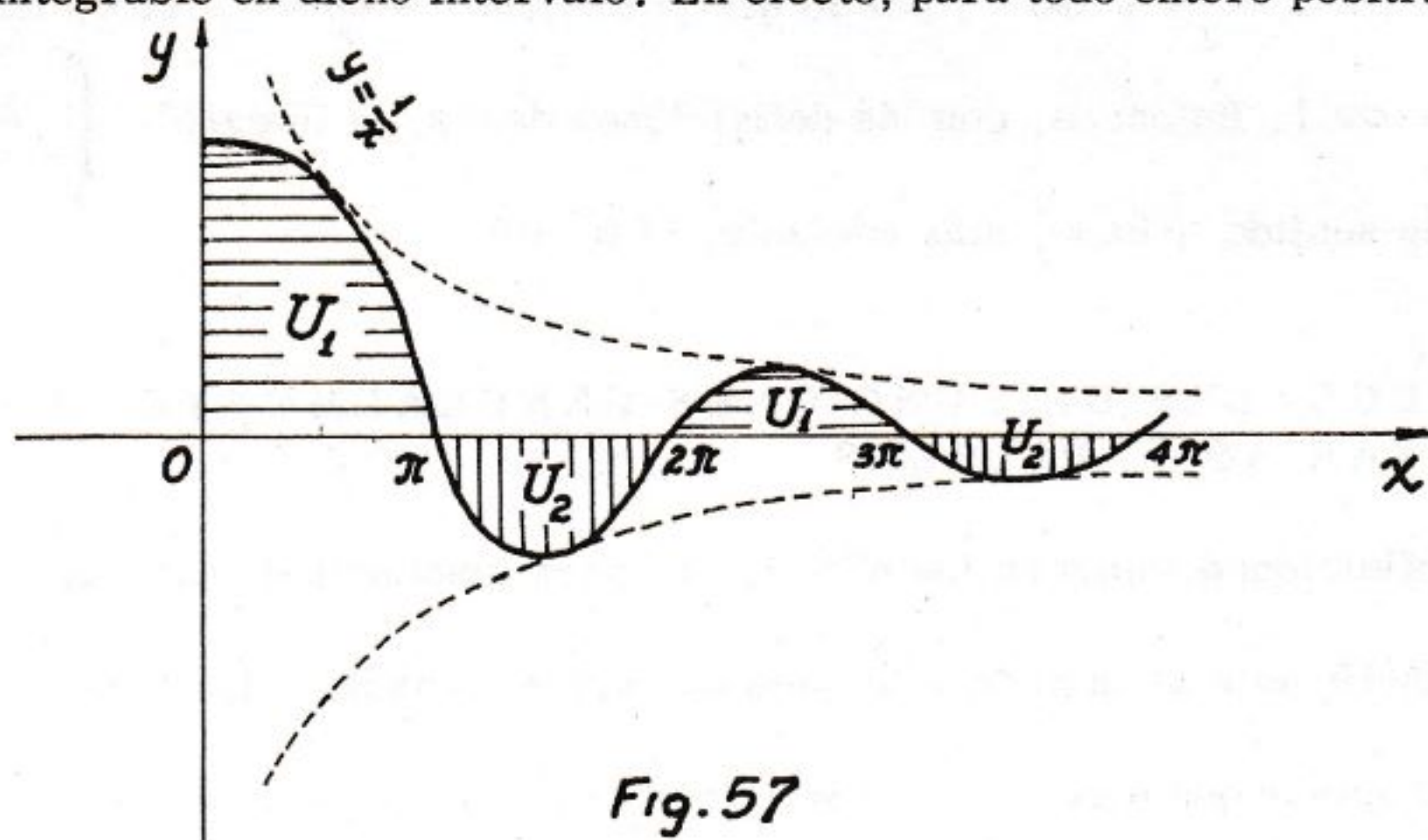


Fig. 57

rectánguloide generalizado  $U_1$  contiene los  $n$  rectánguloides  $V_k$   $[2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, 0 \leq y \leq \frac{\text{sen } x}{x}]$ , ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) carentes dos a dos de puntos en común. En  $V_k$  está además contenido este otro rectánguloide

$W_k$   $[2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, 0 \leq y \leq \frac{\text{sen } x}{x}]$ , por lo que puede escribirse

$$\text{área } U_1 > \sum_{k=0}^{n-1} \text{área } W_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi + \frac{\pi}{6}}^{2k\pi + \frac{5\pi}{6}} \frac{\text{sen } x}{x} dx ;$$

pero en el intervalo indicado se tiene  $\text{sen } x \geq \frac{1}{2}$ ,  $x \leq (2k+1)\pi$  y entonces

$$\frac{\text{sen } x}{x} > \frac{1}{2(2k+1)\pi} > \frac{1}{4(k+1)\pi}, \text{ de modo que resulta :}$$

$$\text{área } U_1 > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4(k+1)\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{6} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) \quad (4)$$

Un razonamiento del todo análogo muestra que

$$\text{área } U_2 > \sum_{k=1}^n \int_{(2k-1)\pi + \frac{\pi}{6}}^{(2k-1)\pi + \frac{5\pi}{6}} \frac{\text{sen } x}{x} dx > \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{6} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}). \quad (5)$$

Recordemos ahora (véase Cap. V, nº 1) que la serie armónica  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  es divergente; de ahí que tomando  $n$  suficientemente grande, su suma parcial  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  puede asumir valores tan grandes como



se quiera. Teniendo en cuenta esto, de la (4) y (5) sigue obviamente área  $U_1 = +\infty$ , área  $U_2 = +\infty$ , por lo que la función  $\frac{\text{sen } x}{x}$  no es integrable en  $[0, +\infty]$ . Entonces, con las definiciones dadas, la integral  $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$  carece de sentido (véase, más adelante, el n° 10).

## 5 - INTEGRALES DE FUNCIONES GENERALMENTE CONTINUAS DE VARIAS VARIABLES.

Las definiciones dadas en los n°s 3, 4 para funciones de una variable, se extienden fácilmente al caso de funciones de varias variables. Es necesario, sin embargo, precisar qué debe entenderse por funciones generalmente continuas de varias variables. Se ve inmediatamente que no conviene mantener la misma definición dada para funciones de una variable, es decir, prescribir que la función deba tener a lo sumo un número finito de puntos singulares en todo dominio acotado, porque inclusive en las aplicaciones más comunes, se encuentran funciones de dos variables que tienen como singulares a todos los puntos de una línea (ejemplos:  $\frac{1}{x+y}$ ,  $\log(1+x^2-y^2)$ ) y funciones de tres variables que tienen como singulares a todos los puntos de una superficie (ejemplos:

$$\frac{1}{x^2+y^2-z^2-1}, \log(x+y+z)$$

Adoptaremos, por lo tanto, esta nueva definición: diremos que la función  $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  es generalmente continua en el dominio medible  $A$ , acotado o no, del espacio  $S_r$  cuando sus puntos singulares contenidos en  $A$  constituyen un conjunto  $N$  cerrado y de medida nula. Entonces, la  $f(P)$  resulta continua en el conjunto  $A-N$ , que evidentemente no es vacío. El conjunto  $N$  será designado el conjunto singular de la  $f(P)$ . (\*)

(\*) Esta definición puede también adoptarse en el caso  $r=1$ , es decir, para funciones de una variable. Eso nos llevaría a considerar una clase de funciones  $f(x)$  más general que la considerada en los n°s 3 y 4; por ejemplo, la función  $\frac{1}{\text{sen } x}$  (que tiene los infinitos puntos sin-



Por ejemplo, la función  $\frac{1}{x+y}$  es generalmente continua en todo el plano y el conjunto singular  $N$  coincide con la recta  $x+y=0$ ; la función  $\log(1-x^2-y^2)$  es generalmente continua en el círculo que tiene centro en el origen y radio 1, y  $N$  coincide con la circunferencia  $x^2+y^2=1$ ; la función  $\frac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$  es generalmente continua en todo el espacio y  $N$  coincide con el hiperboloide  $x^2+y^2-z^2=1$ ; la función  $\log(x+y+z)$  es generalmente continua en el semiplano  $x+y+z \geq 0$  y  $N$  coincide con el plano  $x+y+z=0$ ; la función  $\frac{1}{x^2+2y^2}$  es generalmente continua en todo el plano y  $N$  está constituido solamente por el origen.

Observemos que si  $f(P)$  es generalmente continua en  $A$ , existen en  $A$  dominios  $T$ , acotados y medibles, de continuidad para la  $f(P)$ . En efecto; fijado un punto  $P_0 \in A-N$ , tal punto tendrá distancia positiva del conjunto cerrado  $N$  y existirá sin duda un dominio circular de centro  $P_0$  que no tenga puntos comunes con  $N$ ; entonces, la clausura del conjunto abierto constituido por los puntos interiores de la intersección  $A \cap C$  proporciona un dominio  $T$  acotado y medible que está contenido en  $A-N$  y es, por lo tanto, de continuidad para la  $f(P)$ . Nótese que  $T$  contiene el punto  $P$ , de modo que con los citados dominios  $T$  puede captarse cualquier punto de  $A-N$ .

Indicaremos con  $\Phi$  a la familia de todos los dominios acotados y medibles  $T$  de continuidad para  $f(P)$  (es decir, contenidos en  $A-N$ ); en cada uno de estos dominios la  $f(P)$  es continua y puede, por tanto, considerarse la integral

gulares 0 y  $\frac{1}{k\pi}$  con  $k$  entero) es generalmente continua según esta nueva definición y no lo es según la anterior. La teoría de la integración que estamos exponiendo continúa valiendo para las  $f(x)$  generalmente continuas según este nuevo significado, pero para las aplicaciones resulta ciertamente suficiente el significado precedente. Por lo tanto adoptaremos la nueva definición solamente para las funciones de dos o más variables.



$$\int_T f(P) dT$$

Ya resulta claro, entonces, cómo se pueden formular definiciones y dar teoremas análogos a los de los n<sup>os</sup> 3, 4; haremos una rápida exposición de los mismos, omitiendo las demostraciones, que son análogas a las de los n<sup>os</sup> citados.

Supongamos, al comienzo, que la  $f(P)$ , generalmente continua en  $A$ , sea no negativa. Llamaremos integral de la  $f(P)$  extendida al dominio  $A$  y la indicaremos con el símbolo corriente  $\int_A f(P) dT$ , o también,  $\int_A f(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_1 dx_2 \dots dx_r$  al extremo superior (finito o  $+\infty$ ) del conjunto numérico descripto por  $\int_T f(P) dT$  cuando  $T$  varía en la familia  $\Phi$ .

Valen teoremas análogos a los teor. I y I' del n<sup>o</sup> 3; no los enunciaremos porque serían casos particulares de los sucesivos teoremas II y II'. Vale también un teorema análogo al teor. II del n<sup>o</sup> 3; nos limitaremos a considerar el único caso interesante, es decir, el caso de las funciones de dos variables  $z = f(x, y) \geq 0$ , definiendo el correspondiente cilindroide generalizado  $U$ , como el conjunto (acotado o no acotado) de los puntos  $(x, y, z)$  del espacio que verifican las

$$(x, y) \in A-N, \quad 0 \leq z \leq f(x, y) \quad (1)$$

y enunciar el teorema (que extiende el teor. II del Cap. XXII, n<sup>o</sup> 2):

I - Si la función no negativa  $f(x, y)$  es generalmente continua en el dominio medible  $A$  (acotado o no acotado), el correspondiente cilindroide generalizado  $U$  es un conjunto medible del espacio y su volumen (finito o  $+\infty$ ) está dado por la fórmula

$$\text{volumen } U = \iint_A f(x, y) dx dy \quad (2)$$

Pasando luego al caso de una  $f(P)$  generalmente continua en  $A$ , real y de



cualquier signo, podemos considerar  $f(P)$  como diferencia de las dos funciones

$$f_1(P) = \frac{|f(P)| + f(P)}{2}, \quad f_2(P) = \frac{|f(P)| - f(P)}{2},$$

cada una de las cuales es generalmente continua en  $A$  y no negativa. Diremos

que  $f(P)$  es integrable en el dominio  $A$  si al menos una de las dos

integrales  $\int_A f_1(P) dT$ ,  $\int_A f_2(P) dT$ , tiene valor finito; en tal caso, defini-

remos su integral como la diferencia

$$\int_A f(P) dT = \int_A f_1(P) dT - \int_A f_2(P) dT \quad (3)$$

con la advertencia que al segundo miembro se le adjudicará el valor  $+\infty$  si

$\int_A f_1(P) dT = +\infty$  y  $\int_A f_2(P) dT$  toma un valor finito, mientras que le será atribuido el valor  $-\infty$  si  $\int_A f_1(P) dT$  es finita y  $\int_A f_2(P) dT = +\infty$ .

Refiriéndonos a funciones de dos variables, puede decirse que  $f(x, y)$  es integrable en  $A$  cuando al menos uno de los dos cilindroides generalizados

$$U_1[(x, y) \in A-N, 0 \leq z \leq f_1(x, y)], \quad U_2[(x, y) \in A-N, -f_2(x, y) \leq z \leq 0]$$

tiene volumen finito; en ese caso su integral representa la diferencia entre el volumen de  $U_1$  y el volumen de  $U_2$  (diferencia que puede ser finita,  $+\infty$ ,  $-\infty$ ).

En cambio, en el caso en que  $U_1$  y  $U_2$  tienen ambas volumen infinito, la integral  $\iint_A f(x, y) dx dy$  carece de sentido (salvo que introduzcamos otras definiciones.)

Se extienden los teoremas I y I' del n° 4. Como de costumbre diremos que una sucesión  $\{T_n\}$  de dominios de la familia  $\Phi$  es no decreciente si para todo  $n$  resulta  $T_n \subseteq T_{n+1}$ ; diremos, además, que la sucesión no decreciente  $\{T_n\}$  tiende a  $A-N$  y escribiremos  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = A-N$  si, fijado arbitrariamente un conjunto cerrado y acotado  $C$ , contenido en  $A-N$  (en particular, un dominio  $T$  de la familia  $\Phi$ ), existe un  $T$  de la sucesión que contiene a  $C$ . Puede enunciarse:

II - Sea  $f(P)$  una función real y generalmente continua en un



dominio medible  $A$  dado, acotado o no acotado, y sea  $N$  su conjunto singular. Si la  $f(P)$  es integrable en  $A$ , fijada arbitrariamente en  $A$  una sucesión no decreciente  $\{T_n\}$  de dominios acotados y medibles, de continuidad para  $f(P)$  de modo que sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = A - N$ , resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f(P) dT = \int_A f(P) dT \quad (4)$$

A propósito de este teorema vale una observación similar a la hecha respecto del teor. I del n° 4:

II' - Sea  $f(P)$  una función real y generalmente continua en un dominio medible  $A$  dado, acotado o no acotado, y sea  $N'$  cualquier conjunto cerrado y de medida nula, contenido en  $A$  y tal que contenga todos los puntos singulares de  $f(P)$  [es decir, sea  $N' \supseteq N$ ]. Ahora, si la  $f(P)$  es integrable en  $A$ , para toda sucesión no decreciente  $\{T'_n\}$  de dominios acotados y medibles, contenidos en  $A - N'$ , (por lo tanto de continuidad para  $f(P)$ ), que verifique  $\lim_{n \rightarrow \infty} T'_n = A - N'$  resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} f(P) dT = \int_A f(P) dT$$

Señalemos, todavía, otro teorema que extiende una conocida propiedad:

III - Si  $A$  es un dominio medible, acotado o no acotado, del espacio  $S_r$  (con  $r \geq 1$ ), se tiene

$$\int_A dT = \text{med } A \quad (\text{finita o } +\infty)$$

Dem. La función  $f(P) = 1$  es integrable en  $A$  y, por el teor. I se tiene

$$\int_A dT = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} dT = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{med } T_n$$

Por otra parte, se ve rápidamente (razonando como en el teor. I del n° 3) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{med } T_n$  coincide con el extremo superior de las medidas de los conjuntos

cerrados, acotados y medibles, contenidos en  $A$ , es decir, (n° 2, teor. I), coin-



cide con med A .

Demos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 1º) La función  $f(x, y) = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$  ,  $(R > 0)$  es general —

mente continua en el círculo  $A$   $(x^2 + y^2 \leq R^2)$  y el conjunto singular  $N$  está constituido por la circunferencia  $x^2 + y^2 = R^2$  . La  $f(x, y)$  es siempre positiva

en  $A - N$  y será, por ende, integrable. Podemos aplicar la (4) asumiendo, por

ejemplo, como sucesión  $\{T_n\}$  la de los círculos con centro en el origen y radio

$R - \frac{1}{n}$  ; se encuentra así (con el pasaje a las coordenadas polares):

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R - \frac{1}{n}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \\ &= 2\pi R \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^{R - \frac{1}{n}} = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

Respecto de esta integral, véase el Cap. XXII, nº 12 .

Ejemplo 2º) Sea  $C$  un dominio circular del espacio  $S_r$  , con centro en el pun-

to  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0)$  y radio  $R$  . Designando con  $\alpha$  a un nº posi-

vo, consideremos la función

$$\frac{1}{\overline{P_0 P}^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_r - x_r^0)^2}} , \quad (5)$$

la que es generalmente continua en  $C$  , con el único punto singular  $P_0$  ; ade-

más, siendo siempre positiva, será sin

duda integrable. Para calcular la integral

de tal función extendida sobre  $C$  pode-

mos aplicar la (4) asumiendo, por e-

jemplo, como sucesión  $\{T_n\}$  aquélla en

la que  $T_n$  es el dominio lugar de los

puntos  $P$  que verifican la  $\frac{1}{n} \leq \overline{P_0 P} \leq R$

(véase fig. 58) . Nos limitaremos a ha-

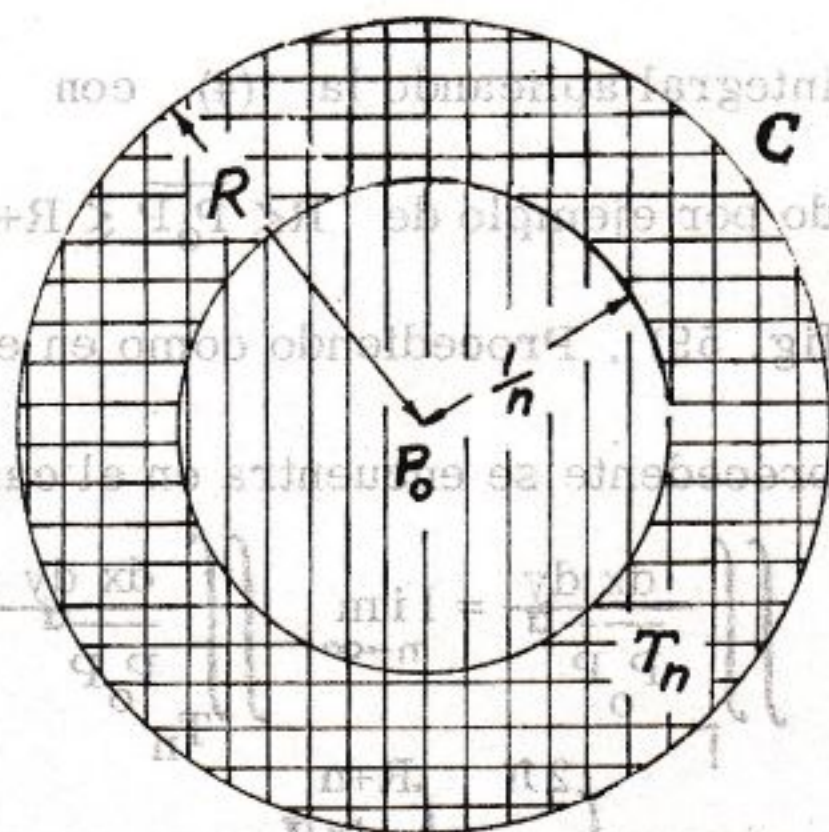


Fig. 58



cer el cálculo en el caso en que  $r=2$  y  $r=3$  usando coordenadas polares en el plano  $\rho, \varphi$  con polo en  $P_0$  y coordenadas polares en el espacio  $\rho, \theta, \varphi$ , con polo en  $P_0$ , respectivamente.

En el caso  $r=2$  se encuentra

$$\begin{aligned} \iint_C \frac{dx \, dy}{\overline{P_0 P}^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} \frac{dx \, dy}{\overline{P_0 P}^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{n}}^R \rho^{1-\alpha} d\rho = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} \left[ R^{2-\alpha} - \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha} \right], & \text{si } \alpha \neq 2 \\ 2\pi \log(Rn), & \text{si } \alpha = 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\pi R^{2-\alpha}}{2-\alpha}, & \text{si } \alpha < 2 \\ +\infty, & \text{si } \alpha \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

En el caso  $r=3$ , se tendrá análogamente

$$\begin{aligned} \iiint_C \frac{dx \, dy \, dz}{\overline{P_0 P}^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{T_n} \frac{dx \, dy \, dz}{\overline{P_0 P}^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_{\frac{1}{n}}^R \rho^{2-\alpha} d\rho = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{4\pi}{3-\alpha} \left[ R^{3-\alpha} - \left(\frac{1}{n}\right)^{3-\alpha} \right], & \text{si } \alpha \neq 3 \\ 4\pi \log(Rn), & \text{si } \alpha = 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{4\pi R^{3-\alpha}}{3-\alpha}, & \text{si } \alpha < 3 \\ +\infty, & \text{si } \alpha \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

En general, para cualquier  $r$ , se encuentra que  $\int_C \frac{dT}{\overline{P_0 P}^\alpha}$  tiene un valor finito si  $\alpha < r$ ; en cambio, si  $\alpha \geq r$ , vale  $+\infty$ . Para el caso  $r=1$ , el resultado ya había sido establecido en el Ej. 4º del nº 3.

Ejemplo 3º) Consideremos la misma función (5) en el dominio no acotado  $\Gamma$  definido por  $\overline{P_0 P} \geq R$ ; tal función es continua y positiva en  $\Gamma$  siendo por tanto integrable. Calculemos la correspondiente

integral aplicando la (4) con  $T_n$  definido por ejemplo de  $R \leq \overline{P_0 P} \leq R+n$  (véase fig. 59). Procediendo como en el ejemplo precedente se encuentra en el caso  $r=2$

$$\begin{aligned} \iint_\Gamma \frac{dx \, dy}{\overline{P_0 P}^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} \frac{dx \, dy}{\overline{P_0 P}^\alpha} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{R+n} \rho^{1-\alpha} d\rho = \end{aligned}$$

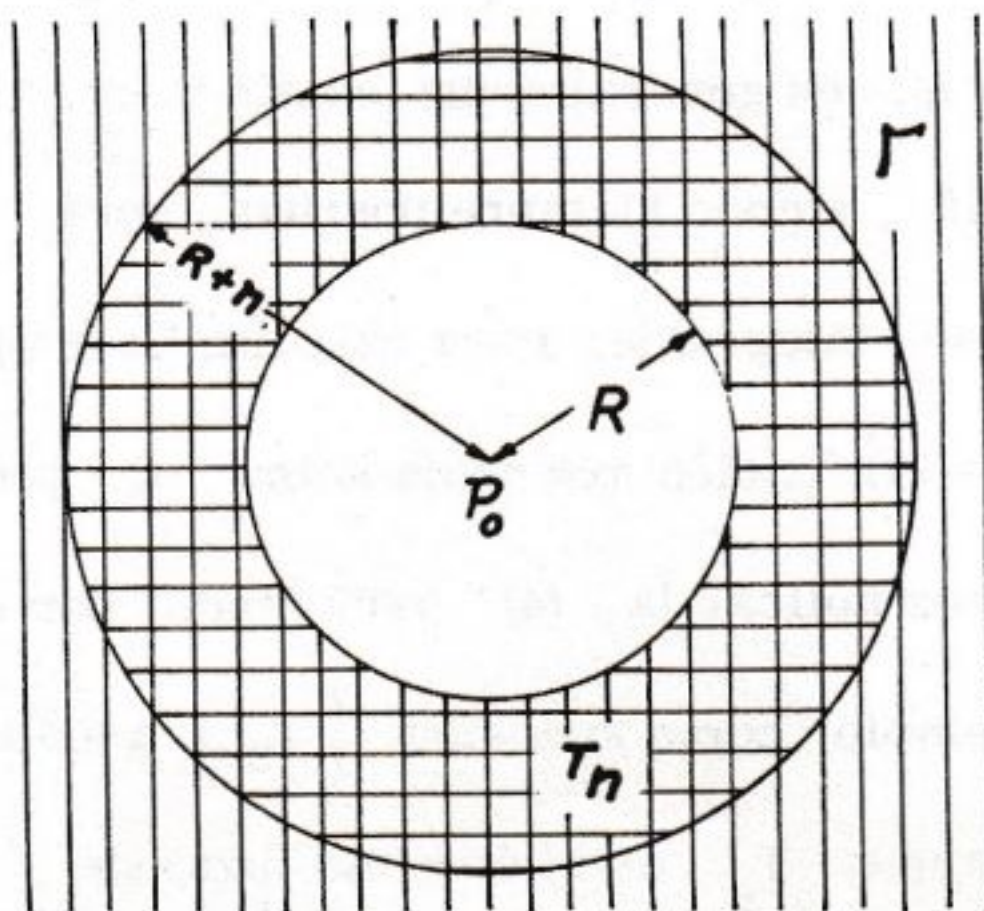


Fig. 59



$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} [(R+n)^{2-\alpha} - R^{2-\alpha}], & \text{si } \alpha \neq 2 \\ 2\pi \log(1 + \frac{n}{R}) & , \text{ si } \alpha = 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2\pi}{(\alpha-2)R^{\alpha-2}} & , \text{ si } \alpha > 2 \\ +\infty & , \text{ si } \alpha \leq 2 \end{cases}$$

y, en el caso  $r = 3$  :

$$\begin{aligned} \iiint_T \frac{dx dy dz}{P_0 P^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{T_n} \frac{dx dy dz}{P_0 P^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_R^{R+n} \varphi^{2-\alpha} d\varphi = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{4\pi}{3-\alpha} [(R+n)^{3-\alpha} - R^{3-\alpha}], & \text{si } \alpha \neq 3 \\ 4\pi \log(1 + \frac{n}{R}) & , \text{ si } \alpha = 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{4\pi}{(\alpha-3)R^{\alpha-3}} & , \text{ si } \alpha > 3 \\ +\infty & , \text{ si } \alpha \leq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

En general, para cualquier  $r$ , se encuentra que  $\int_T \frac{dT}{P_0 P^\alpha}$  tiene un valor finito si  $\alpha > r$ ; y vale, por el contrario  $+\infty$  si  $\alpha \leq r$ . Para el caso  $r = 1$  el resultado ya había sido establecido en el ejemplo 5º) del nº 3.

Ejemplo 4º) Demos ahora un simple ejemplo de función no integrable, mostrando que el límite (4) puede tener en algunos casos un valor arbitrario según sea elegida la sucesión  $\{T_n\}$ .

Consideremos la función  $z = x - y$  en el dominio no acotado  $A$  definido por  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . La función es continua en  $A$  y su diagrama es un plano que pasa por la recta  $x - y = 0$  del plano  $xy$ ; además se tiene  $z > 0$  para los

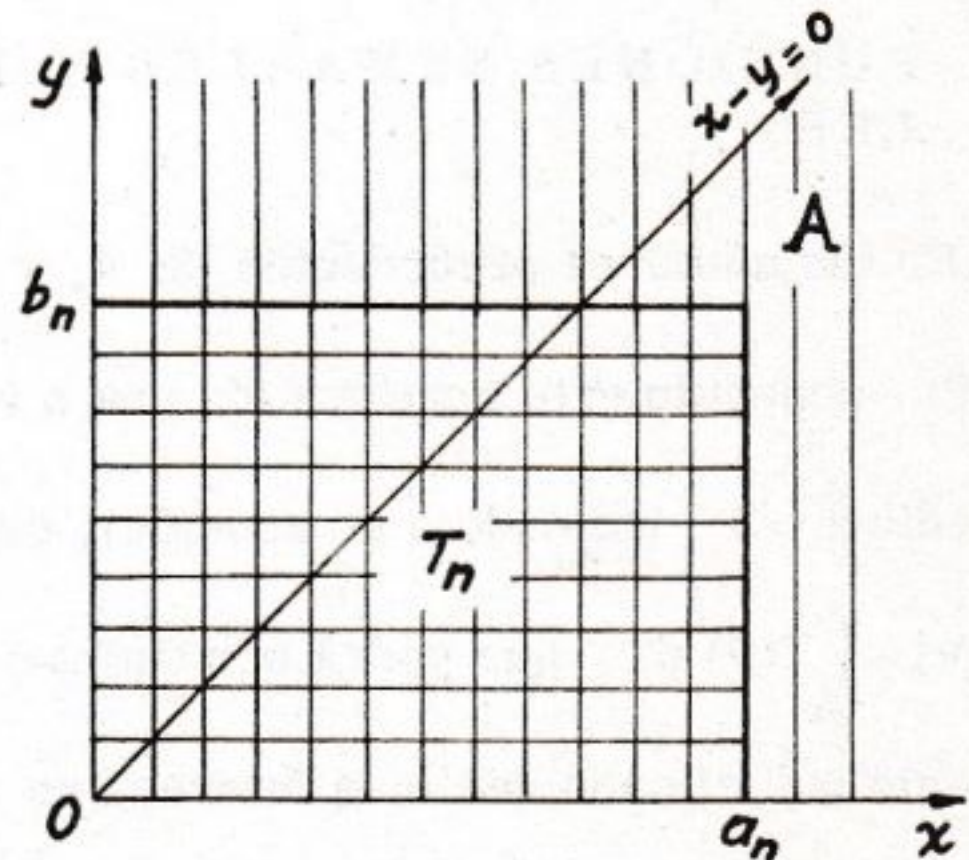


Fig. 60

$(x, y)$  de  $A$  situados por encima de tal

recta, y  $z < 0$  para los situados por debajo. Es entonces evidente que los dos cilindroides generalizados  $U_1$ ,  $U_2$ , tienen ambos volumen infinito y de ahí nuestra afirmación de que la función no es integrable.

Intentemos calcular el límite (4) tomando como  $\{T_n\}$  el rectángulo  $0 \leq x \leq$



$\leq a_n$  ,  $0 \leq y \leq b_n$  , siendo  $\{a_n\}$  ,  $\{b_n\}$  dos sucesiones crecientes cualesquiera de  $n^{\text{os}}$  positivos.

Primeramente encontramos

$$I_n = \iint_{T_n} (x-y) dx dy = \int_0^{a_n} dx \int_0^{b_n} (x-y) dy = \frac{1}{2} \int_0^{a_n} (2b_n x - b_n^2) dx = \frac{1}{2} (a_n^2 b_n - a_n b_n^2) .$$

Si se asume  $a_n = n$  ,  $b_n = n$  resulta  $I_n = 0$  y, por ende,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$  ; si se asume  $a_n = n^2$  ,  $b_n = n$  resulta  $I_n = \frac{1}{2} (n^5 - n^4)$  y entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = +\infty$  ; si se asume  $a_n = n$  ,  $b_n = n^2$  tendremos  $I_n = \frac{1}{2} (n^4 - n^5)$  y entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = -\infty$  . Además, fijado arbitrariamente un número real  $c \neq 0$  , si se asume  $a_n = c^2 n$  ,  $b_n = c^2 n - \frac{1}{c n^2}$  , resulta

$$I_n = \frac{1}{2} \left[ c^4 n^2 (c^2 n - \frac{1}{c n^2}) - c^2 n (c^4 n^2 - \frac{2c}{n} + \frac{1}{c^2 n^4}) \right] = \frac{1}{2} (c^3 - \frac{1}{n^3})$$

y entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2} c^3$  (es decir, un número real arbitrario no nulo). Por

último, si se toma  $a_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$  ,  $b_n = n - \frac{(-1)^n}{n}$  se encuentra  $I_n = (-1)^n (n - \frac{1}{n^3})$  y el  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  no existe.

## 6 - FUNCIONES SUMABLES Y PROPIEDADES DE SUS INTEGRALES.

En los números precedentes 3, 4, y 5 hemos establecido el concepto de función  $f(P)$  generalmente continua (de una o varias variables) integrable en un dominio medible  $A$  (acotado o no acotado), definiendo a la vez su correspondiente integral  $\int_A f(P) dT$  que podrá ser finita o también valer  $+\infty$  o  $-\infty$  . Naturalmente que el caso que más interesa es aquél en que tal integral tiene un valor finito. (\*)

-----

(\*) Puede establecerse un paralelismo con las series (Véase Cap. XIX): existen series convergentes o divergentes (con suma determinada, finita o infinita) y series indeterminadas (carentes de sumas), así como existen funciones integrables (con integral finita o infinita) y funciones no integrables (carentes de integral). Como para las series, en donde nos hemos detenido sobre todo en las series convergentes, proseguiremos aquí más a fondo el estudio de las funciones integrables con integral finita (o brevemente sumables). Debemos, sin embargo



Diremos que la función generalmente continua  $f(P)$  es sumable en el dominio medible  $A$  (acotado o no acotado) si es integrable en  $A$  y su integral  $\int_A f(P) dT$  tiene un valor finito.

Volviendo a examinar los ejemplos del n° 3 se ve que  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  es sumable en  $[-1, 1]$ ;  $\frac{1}{1+x^2}$  es sumable en  $[-\infty, +\infty]$ ;  $\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$  es sumable en  $[x_0 - h, x_0 + h]$  si  $\alpha < 1$  y la misma función es sumable en  $[x_0 + h, +\infty]$ ; si  $\alpha > 1$ ;  $e^{-x}$  es sumable en  $[0, +\infty]$ ; en cambio  $\frac{1}{e^x - 1}$ , aún siendo integrable en  $[0, 1]$ , no es sumable en dicho intervalo; etc.

Análogamente en el n° 4 los ejemplos 1°) y 2°) y en el n° 5 los ejemplos 1°), 2°) con  $\alpha < r$ , 3°) con  $\alpha > r$  proporcionan funciones sumables.

Demostremos el siguiente teorema:

I - Condición necesaria y suficiente para que  $f(P)$  sea sumable en  $A$  es que la función  $|f(P)|$  (no negativa y por cierto integrable) tenga sobre  $A$  una integral finita.

Dem. Designando con  $T$  a cualquier dominio acotado y medible, de continuidad para  $f(P)$ , contenido en  $A$ , e introducidas las dos funciones no negativas de costumbre

$$f_1(P) = \frac{|f(P)| + f(P)}{2}, \quad f_2(P) = \frac{|f(P)| - f(P)}{2}$$

se tiene

$$\int_T f_1(P) dT \leq \int_A f_1(P) dT, \quad \int_T f_2(P) dT \leq \int_A f_2(P) dT, \quad (1)$$

$$f(P) = f_1(P) - f_2(P), \quad (2)$$

-----

advertir que el parangón hecho aquí con las series no es perfecto porque (como resultará del te or. I) el caso de las funciones sumables corresponde más bien al caso de las series absolutamente convergentes.



$$|f(P)| = f_1(P) + f_2(P). \quad (3)$$

Entonces, si  $f(P)$  es sumable en  $A$ , los segundos miembros de la (1) son ambos finitos; por otra parte, de la (3) sigue

$$\int_T |f(P)| dT = \int_T f_1(P) dT + \int_T f_2(P) dT$$

y, por lo tanto, teniendo en cuenta las (1)

$$\int_T |f(P)| dT \leq \int_A f_1(P) dT + \int_A f_2(P) dT < +\infty$$

Resulta así que  $\int_T |f(P)| dT$  describe un conjunto numérico cuyo extremo superior  $\int_A |f(P)| dT$  es ciertamente finito.

Viceversa; si la integral  $\int_A |f(P)| dT$  es finita, teniendo en cuenta que se tiene  $\int_T |f(P)| dT \leq \int_A |f(P)| dT$  o sea [por la (3)],  $\int_T f_1(P) dT + \int_T f_2(P) dT \leq \int_A |f(P)| dT$ , puede obviamente asegurarse que resulta  $\int_T f_1(P) dT \leq \int_A |f(P)| dT < +\infty$ ,  $\int_T f_2(P) dT \leq \int_A |f(P)| dT < +\infty$ .

Entonces, tanto  $\int_T f_1(P) dT$ ,  $\int_T f_2(P) dT$  describen conjuntos numéricos acotados, por lo que los extremos superiores serán finitos; esto significa que  $\int_A f_1(P) dT$ ,  $\int_A f_2(P) dT$  son ambas finitas, es decir que  $f(P)$  es sumable en  $A$ , que es lo que queríamos demostrar.

El teorema anterior puede en la práctica ser sustituido ventajosamente por uno de los siguientes, que proporcionan simples criterios suficientes de sumabilidad:

II - Sea  $f(P)$  una función generalmente continua en el dominio medible  $A$ , acotado o no acotado. Si la  $f(P)$  está acotada y el dominio  $A$  tiene medida finita, la  $f(P)$  resulta sumable en  $A$ .

Dem. En efecto; suponiendo que sea  $|f(P)| \leq H$ , para todo dominio  $T$ , acotado y medible, de continuidad para  $|f(P)|$  y contenido en  $A$ , se tendrá

$$\int_T |f(P)| dT \leq H \text{ med } T \leq H \text{ med } A < +\infty,$$



y entonces el extremo superior de  $\int_T |f(P)| dT$ , es decir  $\int_A |f(P)| dT$ , es ciertamente finito.

Sigue, por el teor. I, que  $f(P)$  es sumable en  $A$ .

III - Sean  $f(P)$ ,  $g(P)$  dos funciones generalmente continuas en el dominio  $A$ , acotado o no acotado, tales que  $|f(P)| \leq |g(P)|$ . Si  $g(P)$  es sumable en  $A$ , también lo será  $f(P)$ ; si  $f(P)$  no lo es, tampoco lo será  $g(P)$ .

Dem. Llamando con  $N'$  a un conjunto cerrado y de medida nula, contenido en  $A$  y que contenga todos los puntos singulares de  $f(P)$  y  $g(P)$ , fijemos una sucesión no decreciente  $\{T'_n\}$  de dominios acotados y medibles, contenidos en  $A - N'$  tal que verifique la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} T'_n = A - N'$ . Se tendrá (nº 5, teor. II')

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} |f(P)| dT = \int_A |f(P)| dT, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} |g(P)| dT = \int_A |g(P)| dT$$
 mientras que, en virtud de la hipótesis  $|f(P)| \leq |g(P)|$ , resulta

$$\int_{T'_n} |f(P)| dT \leq \int_{T'_n} |g(P)| dT.$$

De las tres relaciones escritas sigue  $\int_A |f(P)| dT \leq \int_A |g(P)| dT$  y entonces, si la segunda es finita, lo será también la primera; en el otro caso, si la primera integral vale  $+\infty$  también la segunda tiene el mismo valor. Ahora, por el teor. I, sigue la tesis.

IV - Si la función generalmente continua  $f(P)$  es sumable en el dominio medible  $A$ , acotado o no acotado, lo será también en todo dominio  $B$  medible contenido en  $A$ ; si no es sumable en un  $B$  particular tampoco lo será en cualquier  $A$  que contenga a  $B$ .

Dem. Si  $U$  es un dominio acotado y medible de continuidad para  $f(P)$ , contenido en  $B$ , el mismo  $U$  puede ser considerado como un dominio análogo contenido en  $A$ .



Resulta así  $\int_U |f(P)| dT \leq \int_A |f(P)| dT$  y entonces el extremo superior de  $\int_U |f(P)| dT$ , es decir  $\int_B |f(P)| dT$ , no puede superar  $\int_A |f(P)| dT$ . Entonces, si  $\int_A |f(P)| dT < +\infty$ , también será  $\int_B |f(P)| dT < +\infty$ ; si, en cambio, para cierto  $B$  resulta  $\int_B |f(P)| dT = +\infty$  se tendrá como consecuencia  $\int_A |f(P)| dT = +\infty$ . Ahora, por el teor. I., sigue la tesis.

Otros criterios suficientes de sumabilidad serán expuestos en el n<sup>o</sup> sucesivo.

Las integrales de las funciones generalmente continuas y sumables gozan de las mismas propiedades ya vistas en el caso de las integrales de las funciones continuas (véase Cap. IX, n<sup>o</sup> 4 y Cap. XXII, n<sup>o</sup> 1). Limitándonos a extender las propiedades esenciales, demostremos los siguientes teoremas:

V - (Teorema de la aditividad) - Supongamos que el dominio medible  $A$ , acotado o no acotado, se ha descompuesto en un número finito de dominios medibles  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Si la función  $f(P)$  es generalmente continua y sumable en cada uno de estos dominios parciales, será generalmente continua y sumable en  $A$  y se tendrá

$$\int_A f(P) dT = \int_{A_1} f(P) dT + \int_{A_2} f(P) dT + \dots + \int_{A_n} f(P) dT.$$

Dem. Basta considerar el caso  $n = 2$ . Sean  $N_1, N_2$  los conjuntos singulares (cerrados y de medida nula) de  $f(P)$  en  $A_1, A_2$  respectivamente. Los puntos singulares de la  $f(P)$ , considerada en todo  $A$ , son los del conjunto  $N = N_1 \cup N_2$  que también es cerrado y de medida nula; por lo tanto  $f(P)$  es generalmente continua en  $A$ . También la  $|f(P)|$  es generalmente continua en  $A_1, A_2, A$  con los respectivos conjuntos singulares  $N_1^*, N_2^*, N^*$ , que verifican, según ya sabemos,  $N_1^* \subseteq N_1, N_2^* \subseteq N_2, N^* \subseteq N$ .

Fijada una sucesión  $\{T_n\}$ , no decreciente, de dominios acotados y medibles



contenidos en  $A - N$ , con  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = A - N$ , puede escribirse en virtud del teor. II' del n° precedente

$$\int_A |f(P)| dT = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} |f(P)| dT. \quad (4)$$

Fijado un  $T_n$  cualquiera, el dominio  $A$  queda descompuesto en  $T_n$  y otro dominio medible  $U_n$ . Nos encontramos entonces en presencia de dos descomposiciones del dominio  $A$ : una  $\mathcal{D}$  con  $A = A_1 \cup A_2$ , y otra  $\mathcal{D}'$  con  $A = T_n \cup U_n$ . Si, con el método indicado en el Cap. XXI, n° 6 construimos una tercer descomposición  $\mathcal{D}^*$  sucesiva tanto de  $\mathcal{D}$  como de  $\mathcal{D}'$ , el dominio  $T_n$  quedará descompuesto en dos dominios acotados y medibles  $T'_n, T''_n$  (uno de los cuales eventualmente vacío), con  $T'_n \subseteq A_1$ ,  $T''_n \subseteq A_2$ . (\*)

Se tendrá entonces, por el teorema de la aditividad de las integrales de las funciones continuas

$$\int_{T_n} |f(P)| dT = \int_{T'_n} |f(P)| dT + \int_{T''_n} |f(P)| dT. \quad (5)$$

Se ve fácilmente que las dos sucesiones  $\{T'_n\}$ ,  $\{T''_n\}$  son no decrecientes; que  $T'_n$  no tiene puntos en común con  $N_1$  y que  $T''_n$  no los tiene con  $N_2$ ; que resulta  $\lim_{n \rightarrow \infty} T'_n = A_1 - N_1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T''_n = A_2 - N_2$ . Entonces, por el teor. II' del n° precedente, valen las

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} |f(P)| dT = \int_{A_1} |f(P)| dT, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T''_n} |f(P)| dT = \int_{A_2} |f(P)| dT, \quad (6)$$

con los segundos miembros finitos, ya que por hipótesis  $f(P)$  es sumable en  $A_1$  y  $A_2$ .

De (4), (5) y (6) sigue

$$\int_A |f(P)| dT = \int_{A_1} |f(P)| dT + \int_{A_2} |f(P)| dT,$$

de donde  $\int_A |f(P)| dT$  es finita, es decir,  $f(P)$  es sumable en  $A$ .

Se puede ahora aplicar el teor. II del n° precedente y escribir las (4), (5) y

-----

(\*) Recordemos que  $T_h$  [o  $T''_n$ ] coincide con la clausura del conjunto abierto constituido por los puntos interiores de la intersección  $A_1 \cap T_n$  [o  $A_2 \cap T_n$ ]



(6) con  $f(P)$  en lugar de  $|f(P)|$ ; se llega de tal modo a

$$\int_A f(P) dT = \int_{A_1} f(P) dT + \int_{A_2} f(P) dT,$$

que es lo que queríamos demostrar.

VI - (Teorema de la distributividad) - Si las funciones  $f_1(P)$ ,  $f_2(P)$ , ...,  $f_n(P)$  son generalmente continuas y sumables en el dominio medible  $A$ , acotado o no, y se designan con  $c_1, c_2, \dots, c_n$  a  $n$  constantes reales arbitrarias, también la combinación lineal  $c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \dots + c_n f_n(P)$  resulta generalmente continua y sumable en  $A$ , y se tiene

$$\int_A [c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \dots + c_n f_n(P)] dT = c_1 \int_A f_1(P) dT + c_2 \int_A f_2(P) dT + \dots + c_n \int_A f_n(P) dT.$$

Dem. Sean  $N_1, N_2, \dots, N_n$  los conjuntos singulares de las funciones  $f_1(P)$ ,  $f_2(P)$ , ...,  $f_n(P)$ . Puesto que todo punto de  $A$  que sea de continuidad para cada una de estas funciones, lo será también para la combinación lineal  $f(P) = c_1 f_1(P) + c_2 f_2(P) + \dots + c_n f_n(P)$ , podremos decir que el conjunto singular  $N$  de la  $f(P)$  está sin duda contenido en el conjunto  $N' = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$  que es cerrado y de medida nula. De ahí,  $f(P)$  es generalmente continua en  $A$ .

También los conjuntos singulares de las  $|f_1(P)|$ ,  $|f_2(P)|$ , ...,  $|f_n(P)|$  están contenidos en  $N'$  y por eso, fijada cualquier sucesión no decreciente  $\{T'_n\}$  de dominios acotados y medibles, contenidos en  $A - N'$ , con  $\lim_{n \rightarrow \infty} T'_n = A - N'$ , se tiene, por el teor. II' del n° precedente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} |f_i(P)| dT = \int_A |f_i(P)| dT < +\infty, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} |f(P)| dT = \int_A |f(P)| dT. \quad (8)$$

Pero  $|f(P)| \leq |c_1| |f_1(P)| + |c_2| |f_2(P)| + \dots + |c_n| |f_n(P)|$  y entonces, teniendo también en cuenta el teorema de la distributividad para integrales de funcion



nes continuas, puede escribirse

$$\int_{T'_n} |f(P)| dT \leq \int_{T'_n} \sum_{i=1}^n |c_i| |f_i(P)| dT = \sum_{i=1}^n |c_i| \int_{T'_n} |f_i(P)| dT \quad (9)$$

De (7), (8), (9) sigue

$$\int_A |f(P)| dT \leq \sum_{i=1}^n |c_i| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} |f_i(P)| dT = \sum_{i=1}^n |c_i| \int_A |f_i(P)| dT < +\infty,$$

de modo que  $f(P)$  resulta sumable en  $A$ .

Siempre por el teor. II' del n<sup>o</sup> precedente puede también escribirse

$$\begin{aligned} \int_A f(P) dT &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} f(P) dT = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} \sum_{i=1}^n c_i f_i(P) dT = \sum_{i=1}^n c_i \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T'_n} f_i(P) dT = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \int_A f_i(P) dT, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Apoyándose en las definiciones dadas y sobre los dos teoremas precedentes es también fácil demostrar estos otros:

VII - Si la función  $f(P)$  es generalmente continua y sumable en  $A$  y es  $f(P) \geq 0$ , se tiene  $\int_A f(P) dT \geq 0$ , valiendo el signo de igualdad sólo si  $f(P)$  es nula en todos los puntos de  $A$  no singulares. Además, si  $B$  es un dominio medible contenido en  $A$ , resulta  $\int_B f(P) dT \leq \int_A f(P) dT$ , con el signo de igualdad sólo si  $f(P) = 0$  en todos los puntos no singulares de  $A-B$ .

VIII - Si  $f_1(P), f_2(P)$  son funciones generalmente continuas y sumables en  $A$  y es  $f_1(P) \leq f_2(P)$ , resulta  $\int_A f_1(P) dT \leq \int_A f_2(P) dT$ , con el signo de igualdad sólo si  $f_1(P) = f_2(P)$  en todo punto no singular para ambas funciones.

IX - Si  $f(P)$  es generalmente continua y sumable en  $A$ , se tendrá

$$\left| \int_A f(P) dT \right| \leq \int_A |f(P)| dT,$$



con el signo de igualdad sólo si  $f(P)$  tiene signo constante en todos los puntos de  $A$  no singulares.

## 7 - ALGUNOS CRITERIOS DE SUMABILIDAD Y EJEMPLOS VARIOS.

A los teoremas II, III, IV del n° precedente que proporcionan criterios generales de sumabilidad conviene agregar otros, de naturaleza más particular, pero extremadamente útiles en las aplicaciones. Comenzaremos exponiendo los que se refieren a funciones de una variable.

I - Si en el intervalo acotado  $[a, b]$  la función  $f(x)$  tiene un solo punto singular  $x_0$  (internamente o en un extremo) y verifica, para  $x \neq x_0$  una limitación del tipo

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x - x_0|^\alpha}, \quad \text{con } M > 0 \text{ y } 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

tal función será sumable en  $[a, b]$ . Si vale, por el contrario, una desigualdad del tipo

$$|f(x)| \geq \frac{M}{|x - x_0|^\alpha}, \quad \text{con } M > 0 \text{ y } \alpha \geq 1, \quad (2)$$

la  $f(x)$  no es sumable en  $[a, b]$ .

Dem. Del ejemplo 4°) del n° 3 sigue que la función  $\frac{M}{|x - x_0|^\alpha}$ , considerada en cualquier intervalo cerrado acotado que contenga  $x_0$  es sumable si  $\alpha < 1$  mientras no lo es si  $\alpha \geq 1$ . De este hecho y del teor. III del n° precedente resultan las dos afirmaciones del teorema.

Por ejemplo, la función  $\frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$  tiene en  $[0, 1]$  únicamente el punto singular  $x_0 = 0$ ; dado que  $\left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}$ , es sumable en dicho intervalo; no es en cambio sumable en el mismo intervalo la función  $\sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{x^3}}$ , pues to que es  $\geq \frac{1}{x^{3/2}}$ .



II - Si en el intervalo acotado  $[a, b]$  la  $f(x)$  tiene un solo punto singular  $x_0$  (interior o en un extremo) y si para  $x \rightarrow x_0$  es un infinito de orden determinado  $\alpha > 0$  (respecto del infinito principal  $\frac{1}{|x-x_0|}$ ), será sumable en  $[a, b]$  si  $\alpha < 1$  y no lo será si  $\alpha \geq 1$ .

Dem. Decir que para  $x \rightarrow x_0$  la  $f(x)$  es un infinito de orden  $\alpha$  significa (cfr. Cap. VI, n° 6) que para  $x \rightarrow x_0$  la función  $|x-x_0|^\alpha |f(x)|$  tiende a un límite  $l$ , finito y positivo. Del hecho de que  $l$  es finito sigue que tal producto se mantiene acotado en  $[a, b]$ ; vale decir existe un número  $M > 0$  tal que resulta  $|x-x_0|^\alpha |f(x)| \leq M$ ; de aquí sigue la (1) y entonces, si  $\alpha < 1$ , la  $f(x)$  es sumable en  $[a, b]$ .

Del hecho de que  $l > 0$  sigue también que existe en  $[a, b]$  un intervalo cerrado  $I$  que contiene a  $x_0$  y tal que en todo punto del mismo ( $\neq x_0$ ) resulta  $|x-x_0|^\alpha |f(x)| > h$  (con  $0 < h < l$ ). En tal  $I$  vale entonces una desigualdad del tipo (2) y, dado que  $\alpha \geq 1$ , la  $f(x)$  no es sumable en  $I$  y, por lo tanto, (n° precedente, teor. IV) tampoco en  $[a, b]$ .

Nótese que en la primera parte de la demostración se aprovecha solamente el hecho de que  $l$  es finito y entonces el teorema continúa valiendo en el caso en que  $l = 0$ ; análogamente para la 2ª parte, si  $l = +\infty$ . Se puede enunciar entonces el siguiente teorema, que puede prestar utilidad cuando para  $x \rightarrow x_0$  la  $f(x)$  sea un infinito sin orden determinado.

III - Supongamos que en el intervalo acotado  $[a, b]$  la  $f(x)$  tenga un solo punto singular  $x_0$  (interior o en un extremo). Si para un cierto número positivo  $\alpha < 1$  resulta  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x-x_0|^\alpha |f(x)| = 0$ , la  $f(x)$  será sumable en  $[a, b]$ . Si para cierto  $\alpha > 1$  resulta  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x-x_0|^\alpha |f(x)| = +\infty$ , la  $f(x)$  no es sumable en  $[a, b]$ .



Si en el intervalo acotado  $[a, b]$  la  $f(x)$  tiene varios puntos singulares  $x_1$ ,  $x_2$ , ...,  $x_m$ , se puede descomponer  $[a, b]$  en intervalos parciales (cada uno de los cuales contenga un solo punto singular) y tentar de aplicar, en cada uno de ellos, alguno de los teor. I, II, III.

Por ejemplo, la función  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  es sumable en  $[-1, 1]$ , ya que en los puntos singulares  $-1$  y  $1$  resulta infinita de orden  $\frac{1}{2}$  (cfr. n° 3, ej. 1°). La función  $\frac{1}{e^x - 1}$  no es sumable en  $[0, 1]$  puesto que, en el punto  $x = 0$ , resulta infinita de orden  $1$  (cfr. n° 3, ej. 2°). La función  $f(x) = x^{-\beta} |\log x|^\gamma$ , con  $0 < \beta < 1$  y  $\gamma > 0$  es sumable en  $[0, 1]$  porque, fijado cualquier  $\alpha$  que verifique  $\beta < \alpha < 1$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-\beta} |\log x|^\gamma = 0$  (cfr. Cap. X, n° 8, ej. 1°). La función  $e^{\frac{1}{x}}$  no es sumable en  $[0, 1]$  porque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ .

Los teoremas precedentes se refieren al caso de un intervalo acotado; pero pueden darse teoremas análogos para los intervalos no acotados.

IV - Si en el intervalo no acotado  $A$  del eje  $x$  la función  $f(x)$  es continua y verifica una acotación del tipo

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x|^\alpha}, \quad \text{con } M > 0, \alpha > 1, \quad (3)$$

será sumable en  $A$ . Si resulta, en cambio,

$$|f(x)| \geq \frac{M}{|x|^\alpha}, \quad \text{con } M > 0, \alpha \leq 1, \quad (4)$$

la  $f(x)$  no es sumable en  $A$ .

Dem. Del ej. 5°) del n° 3 resulta que la función  $\frac{M}{|x|^\alpha}$ , considerada en cualquier intervalo no acotado que no contenga el origen, es sumable si  $\alpha > 1$  y no lo es si  $\alpha \leq 1$ . Entonces, si  $A$  no contiene el origen, nuestras dos afirmaciones son consecuencias inmediatas del teor. III del n° precedente. Si, en cambio,  $A$  contiene el origen, lo descomponemos en un intervalo  $A_0$ , aco-



tado y que contenga el origen, y una parte residua  $A_1$  que no lo contenga. También en este caso resulta  $f(x)$  sumable si  $\alpha > 1$  en  $A$ , puesto que lo es en  $A_0$  (ya que  $f(x)$  es continua y  $A_0$  acotado) y en  $A_1$  (demostración precedente para  $\alpha > 1$ ). Aplicando el teor. V del n° precedente sigue nuestra afirmación. Como, si  $\alpha \leq 1$ ,  $f(x)$  no resulta sumable en  $A_1$ , por el teor. IV del n° precedente, tampoco lo será en  $A$ .

V - Si la función  $f(x)$  es continua en el intervalo no acotado  $A$  del eje  $x$ , y si al tender  $x$  a infinito (sobre  $A$ ) resulta infinitésima de un orden determinado  $\alpha$  (respecto del infinitésimo principal  $\frac{1}{|x|}$ ), resultará sumable en  $A$  si  $\alpha > 1$  y no lo será si  $\alpha \leq 1$ .

Dem. Decir que para  $x \rightarrow \infty$  la  $f(x)$  es infinitésima de orden  $\alpha$  significa que  $\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^\alpha |f(x)| = l$ , con  $l$  finito y positivo.

Del hecho de que  $l$  es finito se deduce que la función  $|x|^\alpha |f(x)|$  se mantiene acotada en  $A$ , es decir, existe un número  $M > 0$  tal que resulta  $|x|^\alpha |f(x)| \leq M$ ; sigue la (3) y entonces, si  $\alpha > 1$ , la  $f(x)$  es sumable en  $A$ .

Del hecho de que  $l$  es finito sigue que para  $|x|$  suficientemente grande se tiene  $|x|^\alpha |f(x)| > h$  (con  $0 < h < 1$ ), es decir, una desigualdad del tipo (4); por lo tanto, si  $\alpha \leq 1$  la  $f(x)$  deja de ser sumable en una parte de  $A$ , de donde  $f(x)$  no es sumable en  $A$ .

Puesto que la primera parte de la demostración permanece válida si  $l=0$ , y la segunda si  $l = +\infty$ , podemos enunciar también este otro teorema (útil cuando para  $x \rightarrow \infty$  la  $f(x)$  es infinitésima sin un orden determinado).

VI - Supongamos que la función  $f(x)$  sea continua en el intervalo no acotado  $A$ . Si para cierto número  $\alpha > 1$  se tiene



$\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^\alpha |f(x)| = 0$ , la  $f(x)$  resultará sumable en  $A$ ; si para cierto número  $\alpha \leq 1$  resulta  $\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^\alpha |f(x)| = +\infty$ , la  $f(x)$  no será sumable en  $A$ .

Por ejemplo, la función  $\frac{1}{1+x^2}$  es sumable en  $[-\infty, +\infty]$  ya que para  $x \rightarrow \infty$  es infinitésima de orden 2 (cfr. n° 3, ej. 3°). La función  $e^{-x}$  es sumable en  $[0, +\infty]$  puesto que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha e^{-x} = 0$  con  $\alpha$  positivo arbitrario (cfr. n° 3, ej. 6°). La función  $\frac{x}{1+x^2}$  no es sumable en  $[0, +\infty]$  porque para  $x \rightarrow +\infty$  es infinitésima de orden 1. La función  $f(x) = x^{-\beta} (\log x)^\gamma$ , con  $\beta > 1$ ,  $\gamma > 0$  es sumable en  $[1, +\infty]$  porque, fijado arbitrariamente un  $\alpha$  que verifique  $1 < \alpha < \beta$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-(\beta-\alpha)} (\log x)^\gamma = 0$ . La función  $f(x) = |x|^\beta e^{-|x|^\gamma}$ , con  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma > 0$ , es sumable en cualquier intervalo no acotado  $A$  ya que, cualquiera sea  $\alpha > 0$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow \infty} |x|^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} |x|^{\alpha+\beta} e^{-|x|^\gamma} = 0$ .

Los teoremas precedentes pueden extenderse al caso de las funciones de varias variables, con algunas precauciones. Precisamente a los teor. I, II, III corresponden los siguientes:

I' - Si en el dominio medible y acotado  $A$  del espacio  $S_r$ , la función  $f(P)$  tiene un solo punto singular  $P_0$  (interior o sobre la frontera) y verifica para  $P \neq P_0$  una desigualdad del tipo

$$|f(P)| \leq \frac{M}{P_0 P}^\alpha, \text{ con } M > 0, 0 < \alpha < r, \quad (1')$$

tal función será sumable en  $A$ . Si, por el contrario, vale una desigualdad del tipo

$$|f(P)| \geq \frac{M}{P_0 P}^\alpha, \text{ con } M > 0, \alpha \geq r, \quad (2')$$



y si  $P_0$  es interior a  $A^{(*)}$ , la  $f(P)$  no es sumable en  $A$ .

Dem. Del ej. 2º del nº 5 sigue que la función  $\frac{M}{P_0 P^\alpha}$ , considerada en cualquier dominio circular con centro en  $P_0$ , es sumable si  $\alpha < r$  y no lo es si  $\alpha \geq r$ . Si  $P_0$  es interior a  $A$  (acotado) se puede construir dos dominios circulares  $C'$ ,  $C''$  con centro en  $P_0$  de modo que sea  $C' \subseteq A \subseteq C''$ ; si en cambio  $P_0$  es de frontera sólo se puede construir  $C'' \supseteq A$ . Entonces, si  $\alpha < r$  y  $P_0$  es de frontera o interior, la  $\frac{M}{P_0 P^\alpha}$  (que es sumable en  $C''$ ) resulta sumable en  $A$  y, por la (1), tenemos que también  $f(P)$  será sumable en  $A$ ; si  $\alpha \geq r$  y  $P_0$  es interior a  $A$ , la  $\frac{M}{P_0 P^\alpha}$  (que no es sumable en  $C'$ ) tampoco resulta sumable en  $A$ , siguiendo de la (2) que la  $f(P)$  no es sumable en  $A$ .

II' - Si en el dominio medible y acotado  $A$  del espacio  $S_r$  la función  $f(P)$  tiene un solo punto singular  $P_0$  (interior o de frontera) y si para  $P \rightarrow P_0$  (sobre  $A$ ) resulta infinita de un orden determinado  $\alpha$  (respecto del infinito principal  $\frac{1}{P_0 P}$ ), tal función será sumable en  $A$  si  $\alpha < r$ ; si, por el contrario,  $\alpha \geq r$  con  $P_0$  interior a  $A$ , no será sumable en  $A$ .

III' - En el dominio acotado y medible  $A$  del espacio  $S_r$  supongamos que la  $f(P)$  tenga un solo punto singular  $P_0$  (interior o de frontera). Si para cierto número positivo  $\alpha < r$  resulta  $\lim_{P \rightarrow P_0} \overline{P_0 P}^\alpha |f(P)| = 0$ , se puede asegurar que  $f(P)$  es sumable. Si, por el contrario, para cierto  $\alpha \geq r$  resulta  $\lim_{P \rightarrow P_0} \overline{P_0 P}^\alpha |f(P)| = +\infty$  (con  $P_0$  interior a  $A$ ), la  $f(P)$  no será sumable en  $A$ .

(\*) Diferentemente de lo que sucedía en el teor. I, nada puede decirse ahora en general si  $P_0 \in \tilde{f} A$ ; la sumabilidad o no de  $f(P)$  depende de la "forma" de  $A$  en las proximidades de  $P_0$ .



Las demostraciones de estos dos últimos teoremas son totalmente análogas a las de los teoremas I y II .

Demos ahora los teoremas correspondientes a los teor. IV, V y VI :

IV' - Si en el dominio medible y no acotado  $A$  del espacio  $S_r$  la función  $f(P)$  es continua y verifica una desigualdad del tipo

$$|f(P)| \leq \frac{M}{\overline{OP}^\alpha}, \quad \text{con } M > 0 \text{ y } \alpha > r, \quad (3')$$

donde  $O$  designa al origen del espacio, dicha función será sumable en  $A^{(*)}$ .

Dem. Del ej. 3º) del nº 5 resulta que la función  $\frac{M}{\overline{OP}^\alpha}$  (con  $\alpha > r$ ) es sumable en todo dominio no acotado, lugar de los puntos  $P$  que satisfacen una desigualdad del tipo  $\overline{OP} \geq R$  (con  $R > 0$ ). Ahora bien, si  $A$  no contiene a  $O$ , designando con  $\delta$  a la distancia (positiva) de  $O$  hasta el dominio  $A$ , este último quedará contenido en el dominio no acotado  $C$  definido por  $\overline{OP} \geq \frac{\delta}{2}$ ; la función  $\frac{M}{\overline{OP}^\alpha}$  será sumable en  $C$  y, por ende, en  $A$ , de modo que por la (3') también  $f(P)$  es sumable en  $A$ . Si  $A$  contiene a  $O$  podemos descomponerlo en un dominio medible y acotado  $A_0$  que contenga a  $O$  y en otro dominio no acotado  $A_1$  que no lo contenga; en este caso la  $f(P)$  (continua), que es sumable en  $A_0$ , lo será también en  $A_1$  (por la demostración precedente) y, por ende, será sumable en  $A$ .

V' - Si la función  $f(P)$  es continua en el dominio medible y acotado  $A$  del espacio  $S_r$  y si al tender  $P$  a  $\infty$  (sobre  $A$ ) resulta infinitésima de un orden determinado  $\alpha$  ( respecto

-----

(\*) Obsérvese que falta aquí una afirmación similar a la hecha en segundo término en el teor. IV, es decir, si  $|f(P)| \geq \frac{M}{\overline{OP}^\alpha}$  con  $M > 0$ ,  $\alpha \leq r$  no se puede extraer la conclusión que  $f(P)$  no sea sumable en  $A$ ; su sumabilidad o no, dependerá de la forma de  $A$  cuando  $P$  tiende a  $\infty$ .



del infinitésimo principal  $\frac{1}{OP}$ ), podemos afirmar que será sumable en  $A$  en el caso en que sea  $\alpha > r$ .

VI' - Sea la  $f(P)$  continua en el dominio no acotado y medible  $A$ . Si para cierto número  $\alpha > r$  resulta  $\lim_{P \rightarrow \infty} \overline{OP}^\alpha |f(P)| = 0$ , la  $f(P)$  es sumable en  $A$ .

Las demostraciones de los teor. V' y VI' son análogas a las de los teor. V y VI.

Hagamos una importante aplicación de los teor. VI y VI', que nos dicen inmediatamente que la función de una variable  $e^{-x^2}$  es sumable en  $[-\infty, +\infty]$  y que la función de dos variables  $e^{-(x^2+y^2)}$  es sumable sobre todo el plano  $S_2$ ; las dos integrales

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad I_2 = \iint_{S_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (5)$$

tienen, por lo tanto, valores finitos que nos proponemos calcular.

Comencemos calculando  $I_2$ , tomando como sucesión no decreciente  $\{T_n\}$  de dominios acotados y medibles, tendiente al plano  $S_2$ , la constituida por círculos con centro en el origen y radio  $n$ . Se tendrá (tras un pasaje a coordenadas polares  $\varrho, \varphi$ ):

$$I_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n e^{-\varrho^2} \varrho d\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi (1 - e^{-n^2})$$

o sea,

$$I_2 = \pi. \quad (6)$$

Podía también haberse tomado como sucesión  $\{T_n\}$  la de los cuadrados  $\{-n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n\}$  y escribir en consecuencia

$$I_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \int_{-n}^n e^{-y^2} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2;$$

pero, recordando la primera de las (5), se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-x^2} dx = I_1$  y entonces

$$I_2 = I_1^2. \quad (7)$$



De comparar (6) y (7) sigue  $I_1 = \sqrt{\pi}$  y entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Esta integral, llamada integral de Gauss, se encuentra en muchas aplicaciones.

## 8 - NOCIONES SOBRE ULTERIORES DESARROLLOS DE LA TEORÍA .

Vinculando el concepto de un conjunto acotado o no acotado con el de función integrable, ya hemos visto en los n<sup>os</sup> 3 y 5 la extensión de los teoremas relativos al área de un rectánguloide y al volumen de un cilindroide.

Análogas extensiones pueden hacerse para los teoremas relativos al área de un dominio normal del plano (Cap. XX, n<sup>o</sup> 5 teor. II) y al volumen de un dominio normal del espacio (Cap. XXII, n<sup>o</sup> 2, teor. III); tales teoremas valen todavía si se supone que las funciones que definen el dominio normal sean sumables (\*) en la base de dicho dominio, base que inclusive puede ser no acotada.

Lo mismo puede decirse para los teoremas concernientes al área de un sector plano o de un dominio polarmente normal (Cap. XX, n<sup>o</sup> 5, teor. III y IV); el primero vale todavía si  $f^2(\varphi)$  es integrable en  $[\alpha, \beta]$ ; el segundo si  $f_1^2(\varphi)$ ,  $f_2^2(\varphi)$  son sumables en  $[\alpha, \beta]$ .

Pueden también extenderse los teor. I y III del Cap. XXII, n<sup>o</sup> 10 sobre el volumen de un sólido de rotación o sobre el volumen de un sólido como integral de las áreas de sus secciones con planos paralelos.

Como en las correspondientes integrales las funciones que se integran son no negativas (se trata de  $2\pi \iint_A x dx dz$  y  $\int_a^b \text{área } C_x dx$ ), tales integrales tienen sentido (con valor finito o  $+\infty$ ) también si  $A$  es no acotado o si se sus-

(\*) Nótese que decimos sumables (y no: integrables) porque la diferencia de dos funciones integrables no es, en general, una función integrable (el lector puede convencerse examinando el ejemplo 1<sup>o</sup> del n<sup>o</sup> 5).



tituye a  $[a, b]$  por un intervalo no acotado, y proporcionan todavía los volúmenes a que ese hizo referencia.

Extensiones del mismo tipo pueden también hacerse para los resultados del Cap. X, n° 11 sobre la longitud de un arco de curva, del Cap. XXII, n° 3 sobre los baricentros y momentos de inercia, del Cap. XXII, n°s 11, 12, 13 sobre el área de una superficie.

Pueden también generalizarse, de modo obvio, los conceptos de integral curvilínea (Cap. XXIII, n°s 2 y 6) y de integral superficial (Cap. XXIV, n°s 1 y 2).

Bastante más delicada es, por el contrario, la cuestión de extender a las integrales consideradas en este Cap., las fórmulas de reducción de las integrales múltiples (Cap. XXII, n°s 5 y 6). Para obtener resultados simples y expresivos sería necesario avanzar más en la teoría de integración expuesta, hasta llegar al concepto de integral de Lebesgue, con el que se demuestra que las citadas fórmulas de reducción continúan siendo válidas (teorema de Fubini). Todas las integrales que nosotros hemos considerado son casos particulares de integrales de Lebesgue, a las que, por lo tanto, se les puede aplicar sin duda el teorema de Fubini.

Agreguemos, por último, que también para las integrales de funciones generalmente continuas y sumables de una variable, permanece en esencia válido el teorema de Torricelli-Barrow puesto que, haciendo  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , valen las siguientes propiedades: 1°)  $F(x)$  es una función continua; 2°) resulta  $F'(x) = f(x)$ , siempre que en el punto  $x$  considerado, la  $f(x)$  sea continua. Dejamos al lector la fácil demostración.

## 9 - INTEGRALES DE FUNCIONES COMPLEJAS.

Los conceptos expuestos en los n°s precedentes para las funciones reales se extienden de inmediato al caso de una función compleja  $f(P) = \varphi(P) + i \psi(P)$  (de u



na o varias variables).

Diremos que la  $f(P)$  es generalmente continua en el dominio medible  $A$ , acotado o no, si son tales las funciones reales  $\varphi(P)$ ,  $\psi(P)$ . Si  $N_1; N_2$  son los conjuntos singulares de  $\varphi(P)$  y  $\psi(P)$ , poniendo  $N = N_1 \cup N_2$  la  $f(P)$  resulta definida y continua en  $A - N$ .

En tales condiciones, la  $f(P)$  será considerada sumable en  $A$  si lo son ambas funciones reales  $\varphi(P)$ ,  $\psi(P)$  y por definición se pondrá, entonces,

$$\int_A f(P) dT = \int_A \varphi(P) dT + i \int_A \psi(P) dT \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que para el módulo  $|f(P)| = \sqrt{\varphi^2(P) + \psi^2(P)}$  de la función compleja  $f(P)$  se tiene

$$\left. \begin{array}{l} |\varphi(P)| \\ |\psi(P)| \end{array} \right\} \leq |f(P)| < |\varphi(P)| + |\psi(P)|,$$

y recordando el teor. I del n° 6, se ve inmediatamente que: condición necesaria y suficiente para que la función compleja  $f(P)$  sea sumable en  $A$  es que la integral  $\int_A |f(P)| dT$  (de la función real y no negativa  $|f(P)|$ ) tenga valor finito.

Para el cálculo de la integral (1) valen todavía sin duda los teoremas II y II' del n° 5.

Para las integrales de funciones complejas continúan valiendo los teoremas de la aditividad y la distributividad, como también el teorema expresado por la

$$\left| \int_A f(P) dT \right| \leq \int_A |f(P)| dT$$

con la advertencia de que las barras verticales están indicando el módulo de una cantidad compleja.

## 10 - INTEGRALES IMPROPIAS.

Volvamos a considerar funciones reales, lo que es suficiente en virtud de la (1) del n° anterior. En los n°s 4 y 5 hemos visto que existen funciones generalmen-



te continuas en un dominio medible  $A$  (acotado o no) que no son integrables en  $A$ ; recordemos que eso sucede cuando, consideradas las dos funciones no negativas

$$f_1(P) = \frac{|f(P)| + f(P)}{2}, \quad f_2(P) = \frac{|f(P)| - f(P)}{2},$$

resulta

$$\int_A f_1(P) dT = \int_A f_2(P) dT = +\infty.$$

Hemos también dicho, e ilustrado con un ejemplo, que si  $f(P)$  no es integrable en  $A$ , llamando con  $N$  a su conjunto singular y fijada una sucesión no decreciente  $\{T_n\}$  de dominios acotados y medibles, que tienda a  $A-N$ , no se puede afirmar que exista determinado el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f(P) dT$  y que, si tal límite existiera, su valor cambiaría tomando otra sucesión  $\{T_n\}$ . Más aún; podría demostrarse que con una oportuna elección de la  $\{T_n\}$ , puede obtenerse para tal límite un valor arbitrario prefijado.

Para una  $f(P)$  no integrable en  $A$  no tiene entonces sentido hablar de integral; pero resulta claro que, deseando hacerlo, puede darse el nombre de integral de la  $f(P)$  extendida sobre  $A$ , a uno cualquiera de los citados límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} f(P) dT, \quad (1)$$

toda vez que se tome en consideración una sucesión  $\{T_n\}$  para la que tal límite exista determinado (finito o infinito).

El límite (1), supuesto existente, será designado como integral impropia relativa a la sucesión  $\{T_n\}$  de la función no integrable  $f(P)$ , extendida al dominio  $A$ . Será todavía indicada con el símbolo  $\int_A f(P) dT$ , acompañado si es necesario de otro signo o indicación que sirva para recordar el modo en que tal integral fuera definida. Suele también decirse que la integral impropia  $\int_A f(P) dT$  resulta convergente sobre la sucesión  $\{T_n\}$ .

En base a lo que ha sido dicho, cualquier número real puede considerarse como



una integral impropia, extendida sobre  $A$ , de la función no integrable  $f(P)$ . Puede entonces parecer totalmente inútil el concepto de integral impropia; pero debe observarse que en un determinado problema puede ser necesaria la consideración del límite (1) con una bien determinada sucesión  $\{T_n\}$  (y no con otras) de modo que para dicho problema se presente útil considerar la correspondiente integral impropia (y no las otras).

Sin entrar en detalles sobre esta cuestión que tiene amplios desarrollos y muchas aplicaciones, nos limitaremos a dar dos ejemplos para funciones de una variable, y a advertir que las integrales impropias se manejan con gran cautela porque en ellas no continúan en general valiendo las propiedades expuestas en el n° 6.

Ejemplo 1°) Ya sabemos que la función continua  $\frac{\text{sen } x}{x}$  no es integrable en  $[0, +\infty]$ , (n° 4, ej. 4°). Sin embargo, si como sucesión  $\{T_n\}$  de dominios acotados y medibles contenidos en  $[0, +\infty]$ , no decreciente y tendiente a  $[0, +\infty]$  tomamos la de los intervalos  $[0, n]$ , es fácil probar que existe, determinado y finito, el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\text{sen } x}{x} dx \quad . \quad (2)$$

En efecto; con una integración por partes, puede escribirse, ante todo

$$\int_0^n \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{1 - \cos n}{n} + \int_0^n \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad ; \quad (3)$$

pero la función  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ , continua en  $[0, +\infty]$ , es sumable en tal intervalo porque se tiene  $\left| \frac{1 - \cos x}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2}$  (n° 7, teor. IV), existiendo finito, por lo tanto, el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad . \text{ De la (3) sigue, por lo tanto,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\text{sen } x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad .$$

Esto muestra que la integral impropia relativa a la sucesión de los intervalos



$[0, n]$  de la función no integrable  $\frac{\text{sen } x}{x}$ , extendida al intervalo  $[0, +\infty]$  tiene un valor igual a la integral (en sentido corriente)  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ . Se podría demostrar que esta última integral vale  $\frac{\pi}{2}$ , por lo que puede escribirse

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

con la advertencia de que a la integral del primer miembro se le ha atribuido el significado impropio proporcionado por la (2) .-

Ejemplo 2º) La función  $\frac{1}{x}$  no es integrable en  $[-a, b]$  donde  $a, b$  son dos números positivos, ya que los dos rectánguloides generalizados de la fig. 61 tie-

nen ambos área infinita. Sin embargo, si como sucesión  $\{T_n\}$  de dominios medibles contenidos en  $[-a, b]$ , no decreciente y tendiente al mismo intervalo privado del origen, tomamos aquella para la que  $T_n$  es obtenido a partir de  $[-a, b]$  privándolo de los puntos del intervalo abierto  $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  (simétrico respecto del origen), es fácil constatar

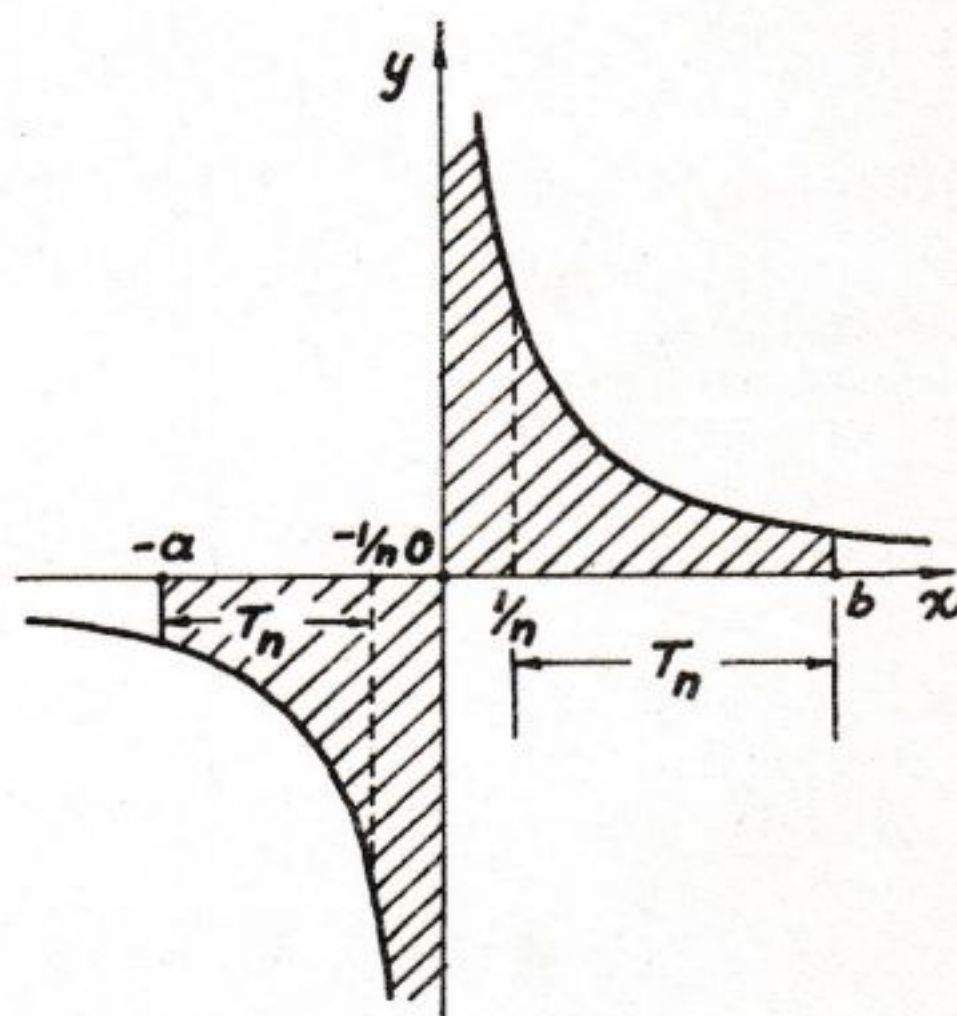


Fig. 61

que existe finito el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T_n} \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-a}^{-\frac{1}{n}} \frac{dx}{x} + \int_{\frac{1}{n}}^b \frac{dx}{x} \right). \quad (4)$$

En efecto; se tiene

$$\int_{-a}^{-\frac{1}{n}} \frac{dx}{x} + \int_{\frac{1}{n}}^b \frac{dx}{x} = [\log|x|]_{-a}^{-\frac{1}{n}} + [\log x]_{\frac{1}{n}}^b = \log \frac{1}{n} - \log a + \log b - \log \frac{1}{n} = \log \frac{b}{a},$$

y, por lo tanto, el límite (4) vale  $\log \frac{b}{a}$ .

A menudo se tiene ocasión de encontrar casos de este tipo, es decir, de funciones  $f(x)$  no integrables en un intervalo  $[a, b]$ , que presentan un solo punto singular  $\xi$  interior a tal intervalo; en tales casos tiene interés, con frecuencia,



considerar la integral impropia sobre una sucesión de dominios obtenidos (cada uno de ellos) a partir de  $[a, b]$  privándolo de los puntos de un intervalo abierto simétrico respecto del punto  $\xi$ . Tal integral impropia, supuesta existente, es denominada integral principal de Cauchy e indicada con el símbolo  $\int_a^b f(x) dx$ .

Podemos por lo tanto decir que la función  $\frac{1}{x}$  admite integral principal de Cauchy en el intervalo  $[-a, b]$  y que resulta

$$\int_{-a}^b \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{a}.$$



## CAPITULO XXVI

### Sucesiones y series de funciones

#### 1 - CONVERGENCIA UNIFORME DE UNA SUCESION DE FUNCIONES.

Retomemos ahora el estudio de las sucesiones, examinando el caso en que los términos de una sucesión son funciones (que por el momento supondremos reales) de una o varias variables reales  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , es decir, del punto  $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$  de  $S_r$ . Sea  $\{f_n(P)\}$  una sucesión de funciones, definidas todas en cierto conjunto  $E$  del espacio  $S_r$ ; se dirá que dicha sucesión es convergente en el conjunto  $E$  si, fijado arbitrariamente un punto  $P_0 \in E$ , la sucesión numérica  $\{f_n(P_0)\}$  resulta convergente. Si esto sucede, a cada punto  $P_0 \in E$  quedará asociado al número que es límite de la sucesión  $\{f_n(P_0)\}$ . Escribiendo  $P$  en lugar de  $P_0$ , podemos entonces decir que resulta así definida en  $E$  una función  $f(P)$ , con

$$f(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(P) \quad (1)$$

Sigue que, fijado el punto  $P \in E$ , a todo número positivo  $\epsilon$  es posible ponerle en correspondencia un índice  $\nu$  tal que, para  $n > \nu$ , resulte  $|f(P) - f_n(P)| < \epsilon$ . Tal índice  $\nu$  depende del número  $\epsilon$  fijado; pero, en general, depende también del punto  $P$  considerado ya que, si en lugar de  $P$  se considera otro punto  $P' \in E$ , la nueva sucesión numérica  $\{f_n(P')\}$  es todavía convergente pero, en general, distinta de la  $\{f_n(P)\}$ . Se puede entonces aceptar que, manteniendo fijo el número  $\epsilon$ , el citado índice  $\nu$



varíe cuando varía el punto  $P$  en  $E$ , describiendo cierto conjunto  $I$  de números naturales. Si este conjunto  $I$  resultase acotado superiormente, existiría un índice  $\nu_0$  mayor que todos los posibles índices  $\nu$ , y entonces para  $n > \nu_0$  la  $|f_n(P) - f(P)| < \epsilon$  tendría valor para todo punto  $P \in E$ .

Advirtamos ya que este hecho en general no sucede, como veremos enseguida con un ejemplo; pero si se verificase, constituye una propiedad particular de la sucesión  $\{f_n(P)\}$  que se expresa diciendo que la sucesión  $\{f_n(P)\}$  converge uniformemente en el conjunto  $E$ .

Se puede dar, entonces, la siguiente definición: la sucesión de funciones  $\{f_n(P)\}$  convergente en  $E$  a la función  $f(P)$ , es uniformemente convergente en el conjunto  $E$  si, fijado arbitrariamente un  $\epsilon > 0$ , existe un índice  $\nu$ , dependiente de  $\epsilon$  pero no del punto  $P$ , tal que para  $n > \nu$  resulta

$$|f(P) - f_n(P)| < \epsilon, \quad (2)$$

cualquiera sea el punto  $P \in E$ .

Como ejemplo, consideremos en el intervalo  $[0, 1]$  la sucesión  $\{x^n\}$ , que converge en dicho intervalo hacia una  $f(x)$  definida así:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{para } x = 1 \end{cases}.$$

Es, entonces,

$$|f(x) - x^n| = \begin{cases} x^n & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{para } x = 1 \end{cases},$$

y si se quiere que esta cantidad resulte menor que  $\epsilon$ , se debe asumir  $n$  de modo que, para  $0 < x < 1$ , resulte  $x^n < \epsilon$ . Esta desigualdad se transforma en la  $n \log x < \log \epsilon$ , de donde,  $n > \frac{\log \epsilon}{\log x}$  (siendo  $\log x < 0$ ). De aquí que la desigualdad análoga a la (2) se verifique para  $n > \nu$ , donde  $\nu$  se-



ñala al primer entero no inferior a  $\frac{\log \epsilon}{\log x}$  (como puede verse,  $\nu$  depende de  $\epsilon$  y de  $x$ ). Dejando fijo  $\epsilon$  hagamos variar  $x$  en  $(0,1)$ ; el número  $\nu$  varía pero sin mantenerse acotado porque, cuando  $x \rightarrow 1$ , se tiene  $\frac{\log \epsilon}{\log x} \rightarrow +\infty$  (si  $\epsilon < 1$ ). La sucesión  $\{x^n\}$  es entonces convergente en  $[0,1]$ ; pero en dicho intervalo no es uniformemente convergente.

En cambio se ve inmediatamente que es uniformemente convergente, por ejemplo, en  $[0, \frac{1}{2}]$ . En efecto, mientras  $x$  varía en tal intervalo, la función  $\frac{\log \epsilon}{\log x}$  crece desde 0 hasta  $\frac{\log \epsilon}{\log \frac{1}{2}}$  (si  $\epsilon < 1$ ) y entonces el número  $\nu$  al que nos hemos referido no supera, para  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ , al primer entero no inferior a  $\frac{\log \epsilon}{\log \frac{1}{2}}$ .

Para las sucesiones uniformemente convergentes vale un teorema análogo al criterio de convergencia de Cauchy (Cap. IV, nº 6); es decir, tenemos que:

I - Condición necesaria y suficiente para que la sucesión de funciones  $\{f_n(P)\}$  sea uniformemente convergente en el conjunto  $E$  es que, fijado arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , exista un índice  $\nu$ , dependiente de  $\epsilon$  pero no del punto  $P$  tal que, para todo par de índices  $m, n$ , ambos mayores que  $\nu$ , resulte

$$|f_m(P) - f_n(P)| < \epsilon, \quad (3)$$

cualquiera sea el punto  $P \in E$ .

Dem. Que la condición sea necesaria sigue inmediatamente de la desigualdad  $|f_m(P) - f_n(P)| \leq |f(P) - f_m(P)| + |f(P) - f_n(P)|$  y de la (2). En lo que respecta a la suficiencia obsérvese ante todo que (por el citado criterio de convergencia de Cauchy) la sucesión es ciertamente convergente en todo punto  $P \in E$ ; lla-



mando  $f(P)$  a la función límite, si en la (3) dejando fijo  $n$  hacemos tender  $m$  al infinito, deducimos que para  $n > \nu$  vale la  $|f(P) - f_n(P)| \leq \epsilon$ , que es lo que queríamos demostrar.

## 2 - TEOREMAS DEL LIMITE Y DE LA CONTINUIDAD PARA SUCESIONES DE FUNCIONES.

Sea la sucesión de funciones  $\{f_n(P)\}$  definida en el conjunto  $E$ , y supongámosla convergente hacia la función  $f(P)$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(P) = f(P) \quad (1)$$

Designando con  $P_0$  a un punto de acumulación de  $E$ , supongamos que cada función  $f_n(P)$  admita un límite determinado y finito para  $P \rightarrow P_0$ :

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f_n(P) = l_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

Consideremos ahora la sucesión numérica  $\{l_n\}$  de estos límites y planteemos estas dos preguntas: 1º) ¿Es la  $l_n$  convergente? ; 2º) admitido que lo sea, poniendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l, \quad (3)$$

¿puede asegurarse que resulta

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l \quad ? \quad (4)$$

Nótese que la (4) puede también escribirse

$$\lim_{P \rightarrow P_0} [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(P)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{P \rightarrow P_0} f_n(P)] \quad (4')$$

por lo que las preguntas hechas equivalen a averiguar si las dos operaciones de pasaje al límite  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ ,  $\lim_{P \rightarrow P_0}$ , son permutables entre sí.

La respuesta en general es negativa. Por ejemplo, la sucesión  $\{(-x)^n\}$  converge en  $(0, 1)$  hacia la  $f(x) = 0$ ; se tiene  $\lim_{x \rightarrow 1} (-x)^n = (-1)^n$  y la sucesión  $\{(-1)^n\}$  no converge. La sucesión  $\{x^n\}$  converge en  $[0, 1]$  hacia la función  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{para } x = 1 \end{cases}$ ; es  $\lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1$  y la sucesión  $\{1\}$  converge al lí



mite  $l = 1$ , mientras, en cambio,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

Una condición suficiente para que la (4) o (4') sea cierta es que la sucesión considerada  $\{f_n(P)\}$  sea uniformemente convergente en  $E$ . Es decir, se tiene el siguiente teorema del límite:

I- Si la sucesión de funciones  $\{f_n(P)\}$  es uniformemente convergente en el conjunto  $E$  hacia la función  $f(P)$  y si, siendo  $P_0$  un punto de acumulación de  $E$ , existe finito (para todo índice  $n$ ) el límite  $\lim_{P \rightarrow P_0} f_n(P) = l_n$ , la sucesión  $\{l_n\}$  será convergente y, llamando  $l$  a su límite, se tendrá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P) = l$$

Dem. Como la  $\{f_n(P)\}$  es uniformemente convergente en  $E$ , dado  $\epsilon > 0$ , existirá un índice  $\nu$ , independiente de  $P$  tal que, elegidos arbitrariamente dos índices  $m, n$ , mayores que  $\nu$  resultará, para todo punto  $P \in E$ :

$$|f_m(P) - f_n(P)| < \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{para } m > \nu, n > \nu).$$

Si en esta relación se pasa al límite para  $P \rightarrow P_0$ , se obtiene por la (2)

$$|l_m - l_n| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad (\text{para } m > \nu, n > \nu)$$

lo que prueba, por el criterio de convergencia de Cauchy, que la  $\{l_n\}$  es convergente.

Para probar la segunda afirmación del teorema, observemos que, cualquiera sea el índice  $n$  puede escribirse

$$|f(P) - l| \leq |f(P) - f_n(P)| + |f_n(P) - l_n| + |l_n - l|.$$

Por otra parte, dado  $\epsilon > 0$ , existe un índice  $\nu$  (dependiente solamente de  $\epsilon$ ) tal que para  $n > \nu$  resulta

$$|f(P) - f_n(P)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (\text{en todo punto } P \in E), \text{ y } |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Una vez fijado de tal modo el  $n$ , se tendrá para todo  $P \in E$ :

$$|f(P) - l| < \frac{2\epsilon}{3} + |f_n(P) - l_n|;$$



pero por la (2), en correspondencia con el  $\epsilon$  fijado, existe un número  $\delta > 0$  tal que, para todo punto  $P \in E$  que verifique  $0 < \overline{P_0 P} < \delta$  resultará

$$|f_n(P) - l_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

y, por lo tanto, también

$$|f(P) - l| < \epsilon,$$

lo que prueba efectivamente que  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l$ , que es lo que queríamos demostrar.

Un teorema análogo vale en el caso en que, siendo  $E$  no acotado, se considere el pasaje al límite para  $P \rightarrow \infty$ . Se tiene, al respecto, el siguiente teorema, cuya demostración es del todo análoga a la precedente:

I' - Si la sucesión de funciones  $\{f_n(P)\}$  es uniformemente convergente en el conjunto no acotado  $E$  hacia la función  $f(P)$ , y si para todo índice  $n$  existe finito el límite  $\lim_{P \rightarrow \infty} f_n(P) = l_n$ , la sucesión  $\{l_n\}$  será convergente y, llamando  $l$  a su límite, se tendrá  $\lim_{P \rightarrow \infty} f(P) = l$ .

Pasemos a otra cuestión. Sea la sucesión  $\{f_n(P)\}$  convergente hacia  $f(P)$  en el conjunto  $E$ ; si cada una de las  $f_n(P)$  es continua en  $E$ , ¿podría asegurarse que también la función límite  $f(P)$  resulta continua en  $E$ ? La respuesta, en general, es negativa, como muestra el ejemplo de la  $\{x^n\}$  que, en  $[0, 1]$ , converge hacia la función discontinua  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{para } x = 1 \end{cases}$

Se tiene, al respecto, el siguiente teorema de la continuidad:

II - Si la sucesión de funciones  $\{f_n(P)\}$  es uniformemente convergente en el conjunto  $E$  y cada una de las funciones de la misma es continua en  $E$ , también la función  $f(P)$ , límite de la sucesión, será continua en  $E$ .



Dem. Llamando con  $P_0$  a cualquier punto de  $E$  que sea además de acumulación de  $E$ , se tiene, por el teor. I [véase la (4')] :

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{P \rightarrow P_0} f_n(P) \right] .$$

Pero, por la continuidad de  $f_n(P)$  vale la  $\lim_{P \rightarrow P_0} f_n(P) = f_n(P_0)$  ; por otra parte es  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(P_0) = f(P_0)$ , de modo que en definitiva resulta

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) ,$$

lo que prueba la tesis.

### 3 - TEOREMAS DE DERIVACION Y DE PASAJE AL LIMITE BAJO EL SIGNO DE INTEGRAL PARA SUCESIONES DE FUNCIONES.

Consideremos una sucesión  $\{f_n(x)\}$  de funciones de una sola variable<sup>(\*)</sup>, definidas en un intervalo  $A$  del eje  $x$  y supongámosla convergente en  $A$  hacia cierta función  $f(x)$ . Supongamos, además, que cada  $f_n(x)$  sea derivable en  $A$  y examinemos la sucesión  $\{f'_n(x)\}$  de las derivadas. ¿Podrá afirmarse que la  $f(x)$  es derivable y que vale la  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$ ? En otras palabras, ¿será cierta la fórmula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) , \quad (1)$$

que expresa la posibilidad de permutar las dos operaciones de pasaje al límite y de derivación? También en este caso la respuesta es, en general, negativa, como muestra el ejemplo de la sucesión  $\left\{ x - \frac{x^n}{n} \right\}$  en el intervalo  $[0, 1]$ ; el lector verificará inmediatamente que la (1) no es válida en el punto  $x = 1$ .

Se tiene, al respecto, el siguiente teorema:

I - Si en el intervalo  $A$  la sucesión de funciones  $\{f_n(x)\}$  es convergente hacia la función  $f(x)$ , si cada función  $f_n(x)$  es

-----

(\*) En la cuestión de la derivación de una sucesión, basta referirse a funciones de una variable, puesto que, si se tratase de funciones de varias variables y de la derivación parcial respecto de una de ellas, las restantes variables deben considerarse como constantes.



derivable en  $A$  y si la sucesión de las derivadas  $\{f'_n(x)\}$  converge uniformemente en  $A$ , la función  $f(x)$  será derivable en  $A$  y se tendrá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x) \quad . \quad (2)$$

Dem. Fijemos en  $A$  un punto cualquiera  $x_0$  y, llamando con  $A_0$  al conjunto obtenido privando al  $A$  del punto  $x_0$ , consideremos para cada  $x \in A_0$  la sucesión

$$\left\{ \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right\} \quad (3)$$

de los cocientes incrementales de la  $f_n(x)$ . Demostremos primeramente que tal sucesión es uniformemente convergente para  $x$  variando en  $A_0$

Con ese objeto observemos que, cualesquiera sean los enteros  $m, n$ , se tiene

$$\frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_0) - f_n(x_0)]}{x - x_0} \quad ,$$

que, aplicando el teorema de Lagrange a la función  $f_m(x) - f_n(x)$ , se transforma como

$$\frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f'_m(\xi) - f'_n(\xi) \quad , \quad (4)$$

donde  $\xi$  indica cierto punto interior del intervalo que tiene por extremos a los puntos  $x_0$  y  $x$ .

Por otra parte, la sucesión  $\{f'_n(x)\}$  es por hipótesis uniformemente convergente y entonces, dado  $\epsilon > 0$ , existirá un índice  $\nu$  tal que para  $m > \nu$ ,  $n > \nu$  y para todo  $x \in A$  resulta

$$|f'_m(x) - f'_n(x)| < \epsilon$$

De ésta y de la (4) sigue que, para  $m > \nu$ ,  $n > \nu$  se tiene, para todo



punto  $x \in A_0$  :

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon$$

lo que prueba que la sucesión (3) es uniformemente convergente en  $A_0$ .

Tras este resultado, consideremos el cociente incremental de la  $f(x)$ , el que obviamente puede escribirse

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}.$$

Pasemos ahora al límite para  $x \rightarrow x_0$ ; en virtud de la convergencia uniforme de la (3) y del teor. I del n° precedente, el  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existe finito y se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0). \end{aligned}$$

Esto prueba que en el punto  $x_0$  la  $f(x)$  es derivable y que vale la  $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0)$ ; si tenemos ahora en cuenta que  $x_0$  era un punto arbitrario de  $A$ , el teorema queda demostrado.

Pasemos a otra cuestión. Supongamos que cada una de las funciones  $f_n(P)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), sea continua en el dominio acotado y medible  $A$  del espacio  $S_r$  y la sucesión  $\{f_n(P)\}$  por ellas formada sea convergente en  $A$  hacia la función límite  $f(P)$ . Tienen entonces sentido las integrales  $\int_A f_n(P) dT$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) y nos podemos preguntar si tendrá también sentido la integral  $\int_A f(P) dT$  y si es válida la  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(P) dT = \int_A f(P) dT$ . En otros términos, nos preguntamos si es cierta la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(P) dT = \int_A \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(P) \right] dT, \quad (5)$$

que expresaría la posibilidad de permutar las operaciones de pasaje al límite con la de la integración, o como se dice comúnmente, de efectuar el pasaje



al límite bajo el signo de integral. En general, la (5) no es cierta; por ejemplo, si  $f_n(x) = n x e^{-nx^2}$  y  $A [0,1]$ , un fácil cálculo muestra que el primer miembro de (5) vale  $\frac{1}{2}$ , mientras el segundo miembro vale 0

Un primer teorema sobre el pasaje al límite bajo el signo de integral es el siguiente:

**II** - Si la sucesión  $\{f_n(P)\}$  de funciones continuas en un dominio acotado y medible  $A$  converge uniformemente (en  $A$ ) hacia la función límite  $f(P)$ , valdrá la (5) o sea que se tendrá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(P) dT = \int_A f(P) dT \quad (6)$$

**Dem.** Desde ya, por el teor. II del n° precedente, la  $f(P)$  será continua en  $A$ , de donde el segundo miembro de (6) tendrá un valor finito. Además, para cualquier  $n$ , se tendrá

$$\left| \int_A f(P) dT - \int_A f_n(P) dT \right| = \left| \int_A [f(P) - f_n(P)] dT \right| \leq \int_A |f(P) - f_n(P)| dT, \quad (7)$$

mientras que, por la uniforme convergencia de la  $\{f_n(P)\}$ , dado  $\epsilon > 0$  existirá un índice  $\nu$  (dependiente solamente de  $\epsilon$ ) tal que, para  $n > \nu$ , resulte en todo punto  $P \in A$ :

$$|f(P) - f_n(P)| < \frac{\epsilon}{\text{med } A} \quad (8)$$

De la (8) sigue que, para  $n > \nu$ , se tendrá

$$\int_A |f(P) - f_n(P)| dT < \frac{\epsilon}{\text{med } A} \int_A dT = \epsilon,$$

y entonces, teniendo en cuenta la (7), logramos para  $n > \nu$  que

$$\left| \int_A f(P) dT - \int_A f_n(P) dT \right| < \epsilon,$$

lo que prueba la validez de la (6), que es lo que queríamos demostrar.

El teorema que acabamos de probar puede extenderse al caso de una sucesión de funciones generalmente continuas y sumables, con el siguiente enunciado:



III - Sea  $\{f_n(P)\}$  una sucesión de funciones generalmente continuas y sumables en un dominio  $A$  medible, acotado o no a cotado, y sean verificadas las siguientes hipótesis:

$\alpha$ ) Existe en  $A$  un conjunto  $N$ , cerrado y de medida nula, tal que todas las funciones  $f_n(P)$  sean continuas en  $A-N$ ; (\*)

$\beta$ ) Existe una función no negativa  $F(P)$ , generalmente continua y sumable en  $A$ , continua en  $A-N$ , tal que para todo punto  $P \in A-N$  y para todo entero  $n$ , resulta

$$|f_n(P)| \leq F(P) \quad ; \quad (9)$$

$\gamma$ ) La sucesión dada es uniformemente convergente en todo dominio  $T$  de la familia  $\Phi$  constituida por los dominios acotados y medibles contenidos en  $A-N$ .

Entonces, la función límite  $f(P)$  de la sucesión dada (que resulta obviamente definida en cada punto  $P \in A-N$ ) resulta generalmente continua y sumable en  $A$ , siendo además válida la (6).

Dem. Puesto que en todo dominio  $T$  de la familia  $\Phi$  los términos de nuestra sucesión son funciones continuas y la sucesión converge uniformemente, el límite  $f(P)$  será también una función continua en  $T$ . Puesto que esto vale para cualquier  $T$ , la  $f(P)$  resultará continua en  $A-N$  y será, entonces, generalmente continua en  $A$ . En todo punto  $P \in A-N$  la sucesión considerada converge y, además, vale la (9) cualquiera sea  $n$ ; pasando al límite para  $n \rightarrow \infty$  se deduce  $|f(P)| \leq F(P)$ , de lo que deriva (Cap. XXV, n° 6, teor. III) la

-----

(\*) El hecho de que exista, para cada  $f_n(P)$  un tal  $N_n$  no implica, en general, que exista uno,  $N$ , que sirva para todas las  $f_n(P)$ ; no se crea que lo logremos con la unión de los  $N_n$ , porque la unión de infinitos conjuntos cerrados de medida nula no es, en general, un conjunto cerrado y de medida nula.

Admitamos que aquí damos a la locución "función generalmente continua" el significado expuesto en el Cap. XXV, n° 5, también si se tratase de funciones de una variable (para las que, en el Cap. precedente, había sido adoptada la definición más restrictiva del n° 3). Habíamos, sin embargo, señalado que la teoría de la integración de las funciones generalmente continuas de una variable, expuesta en el Cap. XXV, n° 3 y 4, continúa valiendo en las condiciones más generales del n° 5.



sumabilidad de  $f(P)$  en  $A$ , o sea, que el segundo miembro de (6) tiene un valor finito.

Señalado esto, dado que la  $F(P) \geq 0$  es sumable en  $A$ , fijado  $\epsilon > 0$  existirá sin duda (Cap. XXV, n° 5, teor. II') un dominio  $T_\epsilon$  de la familia  $\Phi$  tal que resulte

$$\int_A F(P) dT - \frac{\epsilon}{3} < \int_{T_\epsilon} F(P) dT \leq \int_A F(P) dT. \quad (10)$$

El dominio  $A$  queda así descompuesto en el dominio  $T_\epsilon$  y en otro dominio medible  $U_\epsilon$  y, por el teorema de la aditividad, la (10) puede también escribirse

$$0 \leq \int_{U_\epsilon} F(P) dT < \frac{\epsilon}{3}. \quad (11)$$

Entonces, para todo entero  $n$  se tendrá

$$\begin{aligned} & \left| \int_A f(P) dT - \int_A f_n(P) dT \right| = \left| \int_A [f(P) - f_n(P)] dT \right| = \\ & = \left| \int_{T_\epsilon} [f(P) - f_n(P)] dT + \int_{U_\epsilon} f(P) dT - \int_{U_\epsilon} f_n(P) dT \right| \leq \\ & \leq \int_{T_\epsilon} |f(P) - f_n(P)| dT + \int_{U_\epsilon} |f(P)| dT + \int_{U_\epsilon} |f_n(P)| dT \leq \\ & \leq \int_{T_\epsilon} |f(P) - f_n(P)| dT + 2 \int_{U_\epsilon} F(P) dT < \int_{T_\epsilon} |f(P) - f_n(P)| dT + \frac{2}{3} \epsilon; \end{aligned}$$

pero en  $T_\epsilon$  nuestra sucesión converge uniformemente hacia  $f(P)$  y de ahí que exista un índice  $\nu$  (dependiente sólo de  $\epsilon$ ) tal que para  $n > \nu$  y para cada punto  $P \in T_\epsilon$  resulta  $|f(P) - f_n(P)| < \frac{\epsilon}{3 \text{ med } T_\epsilon}$ .

Sigue así que para  $n > \nu$  se tendrá

$$\int_{T_\epsilon} |f(P) - f_n(P)| dT < \frac{\epsilon}{3 \text{ med } T_\epsilon} \int_{T_\epsilon} dT = \frac{\epsilon}{3}$$

y, en consecuencia,

$$\left| \int_A f(P) dT - \int_A f_n(P) dT \right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2}{3} \epsilon = \epsilon,$$

lo que prueba la tesis.

#### 4 - CONVERGENCIA UNIFORME DE UNA SERIE DE FUNCIONES Y TEOREMAS RELATIVOS.

En el Cap. V, n° 1 hemos puesto ya en evidencia la vinculación entre la teoría de



las sucesiones y la de las series; en particular hemos visto que el estudio de una serie equivale al estudio de la sucesión de sus sumas parciales. Por lo tanto, considerada una serie de funciones  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P)$  definidas en un conjunto  $E$ , resulta claro que se pueden trasladar a la misma todos los conceptos y los teoremas de los n<sup>os</sup> 1, 2, 3 refiriéndose, simplemente, a la sucesión de sus sumas parciales

$$f_n(P) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(P) \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

Por lo tanto, la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P)$  será uniformemente convergente en el conjunto  $E$  si tal es su sucesión de sumas parciales  $\{f_n(P)\}$ . En ese caso, indicando con  $f(P)$  al límite de esta sucesión, es decir, a la suma de la serie, puede afirmarse que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe un índice  $\nu$  (dependiente de  $\varepsilon$  y no de  $P$ ) tal que, para  $n > \nu$  y cualquiera sea  $P \in E$ , resultará  $|f(P) - f_n(P)| < \varepsilon$ .

Pero la diferencia  $f(P) - f_n(P)$  coincide evidentemente con el resto  $R_n(P) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(P)$  de la serie dada y entonces puede decirse también que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P)$  es uniformemente convergente en  $E$  si, dado  $\varepsilon > 0$  existe un índice  $\nu$  (dependiente de  $\varepsilon$  y no de  $P$ ) tal que, para  $n > \nu$  y para todo  $P \in E$  resulta

$$|R_n(P)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(P) \right| < \varepsilon$$

El teor. I del n<sup>o</sup> 1 puede adaptarse a las series; basta, como es lícito, que se a  $m > n$ , poner  $m = n + p$  y observar que

$$f_m(P) - f_n(P) = f_{n+p}(P) - f_n(P) = \sum_{k=1}^{n+p} \varphi_k(P) - \sum_{k=1}^n \varphi_k(P) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(P) \quad ,$$

para obtener:

I - Condición necesaria y suficiente para que la serie de fun -



ciones  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k (P)$  sea uniformemente convergente en el conjunto  $E$  es que, fijado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , exista un índice  $\nu$ , dependiente de  $\varepsilon$  pero no del punto  $P$  tal que, para  $n > \nu$  y  $p$  arbitrario, resulte

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k (P) \right| < \varepsilon ,$$

cualquiera sea el punto  $P \in E$ .

Los teoremas I, I', II del n° 2 pueden ser inmediatamente transportados a las series de funciones. El primero de dichos teoremas da lugar al siguiente:

II - (Teorema del límite) - Si la serie de funciones  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k (P)$  es uniformemente convergente en el conjunto  $E$  y si, siendo  $P_0$  un punto de acumulación de  $E$  existe, para todo índice  $k$  el  $\lim_{P \rightarrow P_0} \varphi_k (P)$ , vale la

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k (P) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{P \rightarrow P_0} \varphi_k (P) . \quad (2)$$

Dem. Introducidas las sumas parciales (1) el primer miembro de la (2) puede escribirse como

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi_k (P) \right] = \lim_{P \rightarrow P_0} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n (P) \right] ,$$

mientras el segundo miembro, teniendo en cuenta que el límite de una suma (finita) es igual a la suma de los límites, puede transformarse como sigue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \lim_{P \rightarrow P_0} \varphi_k (P) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{P \rightarrow P_0} \sum_{k=1}^n \varphi_k (P) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{P \rightarrow P_0} f_n (P) \right] .$$

Con estas transformaciones, la (2) pasa a ser la (4') del n° 2, que es verdadera cierta, puesto que la uniforme convergencia de nuestra serie implica la de la



sucesión  $\{f_n(P)\}$  de las sumas parciales.

Nótese que este teorema proporciona una condición suficiente para que el límite de una serie sea igual a la serie de los límites, propiedad que, en general, no es cierta.

Análogamente, del teor. I' del n° 2, se deriva este otro:

II' - Si la serie de funciones  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P)$  es uniformemente convergente en el conjunto no acotado  $E$  y si, para todo índice  $k$  existe finito el  $\lim_{P \rightarrow P_0} \varphi_k(P)$ , se tendrá

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{P \rightarrow \infty} \varphi_k(P) .$$

El teor. II del n° 2 se transforma en el siguiente:

III - (Teorema de la continuidad) - Si la serie de funciones  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P)$

converge uniformemente en el conjunto  $E$  y cada uno de sus términos es una función continua en  $E$ , también la suma  $f(P)$  de la serie será una función continua en  $E$ .

Dem. Cada suma parcial  $f_n(P)$  de la serie dada, por ser suma de un número finito de funciones continuas, es una función continua en  $E$ . Además, la sucesión  $\{f_n(P)\}$  es uniformemente convergente en  $E$ . Por el citado teorema II del n° 2, la función límite de dicha sucesión, es decir, la suma  $f(P)$  de la serie, es también continua en  $E$ , que es lo que queríamos demostrar.

Podemos por último adaptar a las series de funciones también los teor. I, II y III del n° 3, obteniéndose los siguientes:

IV - (Teorema de derivación por serie) - Si la serie de funciones

$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$  es convergente en el intervalo  $A$  del eje  $x$ ,



si cada función  $\varphi_k(x)$  es derivable en  $A$ , y si la serie de las derivadas es uniformemente convergente en  $A$ , valdrá para todo punto  $x \in A$  la

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \varphi_k(x), \quad (3)$$

es decir, la derivada de la serie es igual a la serie de las derivadas. (\*)

Dem. Introducidas las sumas parciales  $f_n(x)$  de la serie dada, el primer miembro de (3) puede escribirse

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

mientras que, teniendo en cuenta que la derivada de una suma (finita) es igual a la suma de las derivadas, el segundo miembro se transforma como sigue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} \varphi_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

Con esto la (3) se reduce a la (1) del n° 3, que es ciertamente válida ya que la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$  implica la de la sucesión  $\{f_n(x)\}$ , mientras que la convergencia uniforme de la  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi'_k(x)$  da lugar a la convergencia uniforme de la  $\{f'_n(x)\}$ .

V - (Primer teorema de integración por serie). Si la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P)$ , de funciones continuas en un dominio acotado y medible  $A$ , es uniformemente convergente en  $A$ , valdrá la

$$\int_A \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P) \right] dT = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A \varphi_k(P) dT, \quad (4)$$

es decir, la integral de la serie es igual a la serie de las in

(\*) Se dice también que la serie es derivable término por término.



tegrales . (\*)

Dem . Introducidas las sumas parciales de la serie dada y teniendo en cuenta, entre otras cosas, que la integral de una suma (finita) es la suma de las integrales , los dos miembros de (4) se transforman respectivamente como sigue

$$\int_A \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi_k(P) \right] dT = \int_A \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(P) \right] dT ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_A \varphi_k(P) dT = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \sum_{k=1}^n \varphi_k(P) dT = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(P) dT ,$$

de modo que la (4) equivale a la (5) del n<sup>o</sup> 3 . Y ésta es sin duda cierta por que la sucesión  $\{f_n(P)\}$  es uniformemente convergente.

VI - (Segundo teorema de integración por serie) - Sea  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P)$  una serie

de funciones generalmente continuas y sumables en el dominio  $A$  medible, acotado o no acotado, y supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:

$\alpha$ ) existe en  $A$  un conjunto  $N$  , cerrado y de medida nula , tal que todas las funciones  $\varphi_k(P)$  sean continuas en  $A-N$  ;

$\beta$ ) existe una función no negativa  $F(P)$  , generalmente continua y sumable en  $A$  , continua en  $A-N$  tal que para todo punto  $P \in A-N$  y para todo entero  $n$  , resulta

$$\left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(P) \right| \leq F(P) ;$$

$\gamma$ ) la serie dada es uniformemente convergente en cada dominio  $T$  de la familia  $\Phi$  constituida por los dominios acotados y medibles contenidos en  $A-N$  .

Entonces, la suma de la serie dada (que evidentemente es —

(\*) Se dice también que la serie es integrable término por término .



tá definida para todo punto  $P \in A-N$  ) resulta generalmente continua y sumable en  $A$  y la (4) es válida.

Dem. La introducción de las sumas parciales  $f_n(P)$  y el mismo razonamiento usado para el teorema precedente nos conduce inmediatamente al teor. III del n° 3.

## 5 - CONVERGENCIA TOTAL DE UNA SERIE DE FUNCIONES.

Para las series de funciones resulta muy útil, además del concepto de convergencia uniforme, este otro de convergencia total, que pasamos a exponer:

Se dice que la serie de funciones  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P)$  es totalmente convergente en  $E$  si: 1°) cada uno de sus términos  $\varphi_k(P)$  es una función acotada en  $E$ ; 2°) designando con  $L_k \geq 0$  al extremo superior (finito) de  $|\varphi_k(P)|$  en  $E$ , la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} L_k$  resulta convergente.

Por ejemplo, la serie

$$\frac{\text{sen } x}{1^2} + \frac{\text{sen } 2x}{2^2} + \frac{\text{sen } 3x}{3^2} + \dots + \frac{\text{sen } kx}{k^2} + \dots$$

es totalmente convergente en  $[-\infty, +\infty]$ , ya que se tiene  $L_k = \frac{1}{k^2}$  y

la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  es convergente.

Se tiene el importante teorema (criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme):

I - Si la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P)$  es totalmente convergente en  $E$ , resultará también absolutamente y uniformemente convergente en  $E$ .



Dem. Puesto que es  $|\varphi_k(P)| \leq L_k$ , y la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} L_k$  es convergente, también lo será la  $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(P)|$ , de donde nuestra serie será absolutamente convergente.

Probemos la uniforme convergencia. Dado que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} L_k$  es convergente, fijado  $\varepsilon > 0$ , existirá un índice  $\nu$  (dependiente sólo de  $\varepsilon$ ) tal que, para  $n > \nu$  y  $p$  arbitrario, resulta  $\sum_{k=n+1}^{n+p} L_k < \varepsilon$ . En las mismas condiciones ( $n > \nu$  y  $p$  arbitrario) se tendrá en consecuencia, para todo  $P \in E$ :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(P) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |\varphi_k(P)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} L_k < \varepsilon;$$

pero, por el teor. I del n° precedente, esto equivale a decir que nuestra serie es uniformemente convergente en  $E$ , que es lo que queríamos demostrar.

Nótese que no vale el inverso del teorema precedente; es decir, existen series uniformemente convergentes que no son totalmente convergentes. Considérese, por ejemplo, en el intervalo  $[0, 1]$ , la serie

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Esta serie no es totalmente convergente porque se tiene  $L_k = \frac{1}{k}$ , y la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  no es convergente. Sin embargo, es uniformemente convergente; en efecto, tal serie se encuentra en las condiciones indicadas en el teor. III del Cap. V, n° 5 y de ahí que su suma  $f(x)$  está comprendida entre cualquier suma parcial  $f_n(x)$  y la sucesiva  $f_{n+1}(x)$ . Sigue que, para el resto  $R_n(x)$ , pueda escribirse:

$$|R_n(x)| = |f(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = |(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$$

por lo que evidentemente puede lograrse  $|R_n(x)| < \varepsilon$ , para todo  $x \in [0, 1]$



con tal de asumir  $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$  (cantidad independiente de  $\varepsilon$ ).

## 6 - LA SERIE DE TAYLOR EN EL CAMPO REAL.

Recordemos del Cap. X, n° 9 que si en el intervalo  $A$  del eje  $x$  la función  $f(x)$  admite las primeras  $n+1$  derivadas continuas, fijado un punto  $x_0 \in A$  ya le la fórmula de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x), \quad (1)$$

donde, para el resto  $R_n(x)$  pueden adoptarse varias formas, entre las que particularmente importantes son las

$$R_n(x) = (x-x_0)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (\text{resto de Lagrange}), \quad (2)$$

$$R_n(x) = (x-x_0)(x-\xi)^n \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}, \quad (\text{resto de Cauchy}), \quad (3)$$

siendo  $\xi$  (distinto, en general, en una y otra fórmula) un oportuno punto interior al intervalo que tiene por extremos los puntos  $x_0, x$ .

Supongamos ahora que la  $f(x)$  admita en  $A$  derivadas de cualquier orden. En este caso la (1) puede escribirse con un  $n$  arbitrariamente grande y tiene sentido considerar la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k, \quad (4)$$

que se denomina la serie de Taylor relativa a la función  $f(x)$  y al punto inicial  $x_0$  (serie de Mac Laurin si  $x_0 = 0$ ).

Es natural preguntarse: la serie (4) ¿es convergente?; y si converge, ¿tendrá por suma la función  $f(x)$ ? Al respecto, tenemos el siguiente teorema:

I - Condición necesaria y suficiente para que la serie de Taylor (4) relativa a la función  $f(x)$  sea convergente en el intervalo  $A$  hacia la misma  $f(x)$  es que, en cada punto  $x \in A$  re-



sulte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (5)$$

donde  $R_n(x)$  es el resto de orden  $n$  de la fórmula de Taylor aplicada a la  $f(x)$ .

Dem. Para la suma parcial  $S_{n+1}(x)$  de la (4) se tiene

$$S_{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k ,$$

vale decir, por la (1) ,

$$S_{(n+1)}(x) = f(x) - R_n(x) .$$

Sigue que, para  $n \rightarrow \infty$  , la  $S_{n+1}(x)$  tenderá a  $f(x)$  si y sólo si vale la (5) que es lo que queríamos demostrar.

Si se verifica la (5) se tendrá, por lo tanto, en el intervalo  $A$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad (6)$$

y se dice que la  $f(x)$  es desarrollable en serie de Taylor, de punto inicial  $x_0$  , en el intervalo  $A$  . Una condición suficiente muy simple para que eso ocurra está expresada por

II - Si existe una constante positiva  $M$  tal que para todo entero positivo  $n$  y para cada  $x \in A$  , resulte

$$| f^{(n)}(x) | \leq M ,$$

la  $f(x)$  será , en  $A$  , desarrollable en serie de Taylor.

Dem. En efecto, asumiendo para  $f(x)$  la expresión (2) , se tiene

$$| R_n(x) | \leq M \frac{|x-x_0|^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

y, dado que (Cap. IV, n° 1) se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-x_0|^{(n+1)}}{(n+1)!} = 0$  , se deduce que vale la (5) y, por ende, (teor.I), que vale la tesis.



Vayamos ahora al análisis de algunos notables casos particulares:

1<sup>o</sup>) Serie exponencial. Es la serie de Mac Laurin relativa a la función  $f(x) = e^x$ . Puesto que, para cualquier  $n$ , se tiene  $f^{(n)}(x) = e^x$ ,  $f^{(n)}(0) = 1$ , tal serie se escribirá  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ . Demostraremos que

III - Para todo valor real de  $x$ , la serie

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (7)$$

converge absolutamente.

Dem. Bastará hacer ver que la serie de Mac Laurin considerada converge hacia  $e^x$  en cualquier intervalo fijado, del tipo  $[-a, a]$  con  $a > 0$  arbitrario. Tal hecho es consecuencia inmediata del teor. II ya que, para cualquier  $x$  de dicho intervalo y para todo entero  $n$ , se tiene evidentemente  $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^a$ . La convergencia absoluta de la serie (7) se prueba después de inmediato con el criterio del cociente, como ya se ha visto en el Cap. V, n<sup>o</sup> 4.

2<sup>o</sup>) Series hiperbólicas. Son las series de Mac Laurin relativas a las funciones  $\cosh x$ ,  $\sinh x$ . Considerando la  $f(x) = \cosh x$ , se tiene  $f^{(n)}(x) = \cosh x$  (para  $n$  par) y  $= \sinh x$  (para  $n$  impar); por lo tanto  $f^{(n)}(0) = 1$  (para  $n$  par),  $= 0$  (para  $n$  impar), y de ahí que la serie relativa sea  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ . Análogamente se ve que la relativa a la función  $\sinh x$  es  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ . Demostremos que:

IV - Cualquiera sea el número real  $x$ , se tiene

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (8)$$

y que ambas series resultan absolutamente convergentes.

Dem. Basta razonar como en el teor. III, observando que en todo intervalo



$(-a, a)$ , se tiene  $\left| \begin{matrix} \cosh x \\ \sinh x \end{matrix} \right| \leq \cosh a$ . La convergencia absoluta de la serie (8) se demuestra después, sin dificultad, con el criterio del cociente.

3º) Series circulares. Son las series de Mac Laurin relativas a las funciones  $\cos x$ ,  $\sin x$ . Considerada la  $f(x) = \cos x$ , se tiene

$$f^{(n)}(x) = \cos \left( x + n \frac{\pi}{2} \right); f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \quad (\text{si } n \text{ es par}), \quad = 0$$

(si  $n$  es impar), de modo que la serie buscada resulta ser la

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Análogamente, la relativa a la función  $\sin x$  es la  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ .

V - Cualquiera sea el número real  $x$ , se tiene

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (9)$$

y ambas series resultan absolutamente convergentes.

Dem. Basta observar que, para cada  $x$  se tiene  $\left| \begin{matrix} \cos x \\ \sin x \end{matrix} \right| \leq 1$  y aplicar el teor. II. La convergencia absoluta surge, inmediatamente, de la aplicación del criterio del cociente.

4º) Serie logarítmica. Es la serie de Mac Laurin relativa a la función  $f(x) = \log(1+x)$  que está definida para  $x > -1$ . Se tiene  $f(0) = 0$  y, para  $k > 0$ :

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

por lo que la serie buscada resulta absolutamente convergente para  $-1 < x < 1$ .

Demostremos que

VI - Para  $-1 < x < 1$  vale la fórmula

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad (10)$$

resultando la serie escrita absolutamente convergente para



$$-1 < x < 1.$$

Dem. Observemos primeramente que la (10) no puede valer para  $x > 1$  ya que para tales  $x$  la serie del segundo miembro no converge, como surge inmediatamente de la aplicación del criterio del cociente. El mismo criterio muestra también que dicha serie converge absolutamente para  $-1 < x < 1$ . Dicho esto, pasemos a demostrar la (10) aplicando el teor. I y considerando separadamente los dos casos  $0 < x \leq 1$ ,  $-1 < x < 0$  (para  $x=0$  la fórmula es evidente).

En el primer caso  $0 < x \leq 1$ , conviene escribir el resto  $R_n(x)$  bajo la forma de Lagrange (2) :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \quad (\text{con } 0 < \xi < x),$$

ya que de esta fórmula sigue inmediatamente (ya que  $0 < x^{n+1} \leq 1$ ,  $(1+\xi) > 1$  y por ende  $\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} < 1$ ) :

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1} \quad \text{y, por lo tanto,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

En el segundo caso  $-1 < x < 0$ , conviene escribir  $R_n(x)$  bajo la forma de Cauchy

$$R_n(x) = \frac{x(x-\xi)^n}{n!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}} = (-1)^n \frac{x}{1+\xi} \left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n \quad (\text{con } x < \xi < 0)$$

de la que, siendo  $1+\xi > 1+x > 0$ ,  $\xi-x > 0$  se deduce

$$|R_n(x)| < \frac{|x|}{1+x} \left(\frac{\xi-x}{1+\xi}\right)^n.$$

Por otra parte se ve inmediatamente que  $\frac{\xi-x}{1+\xi} < -x = |x|$ , de modo que resulta

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{1+x},$$

de donde, siendo  $|x| < 1$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ .

5º) Serie binomial. Es la serie de Mac Laurin relativa a la función  $f(x) =$



$= (1+x)^\alpha$ , con  $\alpha$  número real arbitrario. Se tiene  $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$ ,  $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$ , y entonces la serie en consideración se escribe

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k.$$

Se suele poner, por analogía con los coeficientes binomiales  $\binom{n}{k}$ ,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad (k=1, 2, \dots) \quad (11)$$

conviniendo además en que sea  $\binom{\alpha}{0} = 1$ ; escribiremos la precedente serie, por lo tanto, bajo la forma  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ .

Se trata ahora de estudiar bajo qué condiciones vale el desarrollo en serie de Mac Laurin

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k. \quad (12)$$

Observemos primeramente que si  $\alpha$  es un entero no negativo ( $\alpha = n \geq 0$ ) resulta evidentemente  $\binom{\alpha}{k} = \binom{n}{k} = 0$  para  $k > n$ , por lo que la (12) se reduce a la  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ , que es la conocida fórmula del binomio de Newton, válida para cualquier  $x$ .

Desde ahora en adelante supondremos excluido este caso elemental. Surge claramente, entonces, de la (11) que ninguno de los coeficientes  $\binom{\alpha}{k}$  puede ser nulo, de modo que en el segundo miembro de (12) figura una serie efectiva. Con una simple aplicación del criterio del cociente se encuentra que tal serie converge (absolutamente) si  $|x| < 1$ , mientras no converge para  $|x| > 1$ . Esto nos está indicando desde ya que la (12) podrá, a lo sumo, ser válida para  $-1 \leq x \leq 1$ .

No tomaremos en consideración el punto  $x = -1$  puesto que en él la función  $(1+x)^\alpha$  no admite derivadas de orden  $k > \alpha$ , por lo que tal punto no puede



formar parte de un intervalo  $A$  en el que valga el teor. I. (\*) Queda por estudiar, entonces, la eventual validez de la (12) para  $-1 \leq x \leq 1$ .

Demostremos dos lemas preliminares:

VII- Para  $|x| < 1$  y cualquier  $\alpha$ , se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \binom{\alpha}{k} x^k = 0. \quad (13')$$

Dem. La (13) es consecuencia inmediata del hecho recién observado de que la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$  es convergente para  $|x| < 1$ . La (13') se transforma en la (13) notando que

$$k \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha x \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1}$$

VIII - Se tendrá

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \binom{\alpha}{k} = 0 \quad (14)$$

si y sólo si  $\alpha > -1$ .

Dem. Poniendo  $\alpha + 1 = \beta$ , de la

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-k)}{k!} = \left(-\frac{\beta}{1} - 1\right) \left(-\frac{\beta}{2} - 1\right) \dots \left(-\frac{\beta}{k} - 1\right)$$

sigue

$$\left| \binom{\alpha}{k} \right| = \left| 1 - \frac{\beta}{1} \right| \left| 1 - \frac{\beta}{2} \right| \left| 1 - \frac{\beta}{3} \right| \dots \left| 1 - \frac{\beta}{k} \right|.$$

Suponiendo  $\alpha \leq -1$ , es decir  $\beta \leq 0$ , todos los factores del segundo miembro son  $\geq 1$ ; de ahí que  $\left| \binom{\alpha}{k} \right| \geq 1$  y la no validez de la (14).

Sea ahora  $\alpha > -1$ , o sea  $\beta > 0$ . Designando con  $\nu$  al primer entero para el que con  $k > \nu$  resulte  $1 - \frac{\beta}{k} > 0$ , puede escribirse (para  $k > \nu$ )

$$\begin{aligned} \left| \binom{\alpha}{k} \right| &= \left| \binom{\alpha}{\nu} \right| \left(1 - \frac{\beta}{\nu+1}\right) \left(1 - \frac{\beta}{\nu+2}\right) \dots \left(1 - \frac{\beta}{k}\right) < \frac{\left| \binom{\alpha}{\nu} \right|}{\left(1 + \frac{\beta}{\nu+1}\right) \left(1 + \frac{\beta}{\nu+2}\right) \dots \left(1 + \frac{\beta}{k}\right)} < \\ &< \frac{\left| \binom{\alpha}{\nu} \right|}{1 + \beta \left(\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \dots + \frac{1}{k}\right)}. \end{aligned}$$

(\*) Este hecho no impide que la (12) pueda valer para  $x=-1$ ; pero se hace necesario estudiar la cuestión desde otro punto de vista (distinto del de la serie de Taylor) al que haremos referencia en el n° 10. Simplemente como información digamos ya que la (12) vale para  $x=-1$  con tal que sea  $\alpha > 0$ .



Como para  $k \rightarrow \infty$  el denominador de esta última fracción tiende a  $+\infty$  (en virtud de la divergencia de la serie armónica, Cap. V, n° 1), la validez de la (14) queda demostrada.

Tras estos dos lemas podemos demostrar que :

IX - La fórmula (12) vale para  $|x| < 1$ , cualquiera sea  $\alpha$ ; para  $x = 1$  solamente si  $\alpha > -1$ .

Dem. Observemos primeramente que para  $x = 1$ ,  $\alpha \leq -1$  la (12) no puede ser cierta ya que la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}$  no converge, al no ser válida la (14).

Pasemos a demostrar las otras afirmaciones, aplicando el teor. I y considerando separadamente los dos casos  $0 < x \leq 1$ ,  $-1 < x < 0$  [para  $x=0$  la (12) es evidente].

En el primer caso  $0 < x \leq 1$ , conviene escribir el resto  $R_n(x)$  bajo la forma de Lagrange (2) :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \alpha (\alpha-1) (\alpha-2) \dots (\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n-1} = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}, \text{ (con } 0 < \xi < x);$$

puesto que  $1 + \xi > 1$ , apenas sea  $n > \alpha - 1$  se tendrá  $(1+\xi)^{\alpha-n-1} < 1$  y, por lo tanto,

$$|R_n(x)| < \left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \right| \quad (\text{para } n > \alpha - 1).$$

Recordando las (13), (14) se ve precisamente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \begin{cases} \text{para } 0 < x < 1 & \text{cualquiera sea } \alpha \\ \text{para } x = 1 & \text{si } \alpha > -1 \end{cases}.$$

En el segundo caso  $-1 < x < 0$ , conviene usar para el resto la expresión de Cauchy (3) :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \alpha (\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n+1} = \\ &= (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x \left( \frac{x-\xi}{1+\xi} \right)^n (1+\xi)^{\alpha-1}, \quad (\text{con } x < \xi < 0) \end{aligned}$$



Siendo  $1 > 1 + \xi > 1 + x > 0$ ,  $\left| \frac{x - \xi}{1 + \xi} \right| = \frac{\xi - x}{1 + \xi} < -x = |x|$ , se tendrá

$$|R_n(x)| < \left| (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \right| (1+\xi)^{\alpha-1} \leq \begin{cases} \left| (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \right| & \text{si } \alpha - 1 \geq 0 \\ \left| (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \right| (1+x)^{\alpha-1} & \text{si } \alpha - 1 < 0, \end{cases}$$

y entonces, recordando la (13') :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (\text{para } -1 < x < 0 \text{ cualquiera sea } \alpha) .$$

El teorema queda así demostrado.

En los ejemplos precedentes la deducción de la serie de Taylor ha sido bastante fácil, ya que se pudo establecer rápidamente la expresión de la derivada  $k$ -ésima de la función considerada. No siempre eso sucede y, a menudo, conviene llegar de modo indirecto a la serie de Taylor. Con ese objeto es útil observar que tal serie es una serie de potencias del binomio  $x - x_0$ , o sea que proporciona para una función  $f(x)$  un desarrollo en serie del tipo  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ . Veremos más adelante (nº 9) que tal desarrollo es necesariamente único y entonces, cualquiera sea el modo que se utilizó para llegar a él, se puede asegurar que el mismo coincidirá con la serie de Taylor (es decir, se tendrá  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ ). Demos otros dos clásicos ejemplos.

6º) Serie del arco tangente. Es la serie de Mac Laurin de la función  $f(x) = \arctg x$ , a la que llegaremos desarrollando en serie a la derivada  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  e integrando luego la serie obtenida. Aplicando la (12) con  $\alpha = -1$  y escribiendo  $-x^2$  en lugar de  $x$  (o, si se quiere, pensando en la serie geométrica de razón  $-x^2$ ) se encuentra

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad (\text{para } -1 < x < 1) . \quad (15)$$

Llamemos  $A$  al intervalo  $[-1, 1]$  y  $N$  al conjunto formado por los dos puntos  $-1, 1$ , de modo que podemos decir que la (15) vale en  $A - N$ . Observe-mos entonces que:



$\alpha$ ) los términos de la serie (15) son funciones continuas en  $A$  ;

$\beta$ ) considerada una suma parcial cualquiera  $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$  de dicha serie, se tendrá en  $A$  :

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} \right| = \left| \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2} \right| \leq \frac{2}{1 + x^2} ,$$

con  $\frac{2}{1 + x^2}$  continua y, por ende, sumable en  $A$  ;

$\gamma$ ) la serie (15) converge uniformemente en todo dominio medible  $T$  contenido en  $A - N$  , ya que converge totalmente en todo intervalo  $[-a, a]$  , con  $0 < a < 1$  . (En efecto, en tal intervalo se tiene  $|(-1)^k x^{2k}| \leq a^{2k}$  y la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a^{2k}$  es convergente.

Entonces, en  $A$  , y por lo tanto en todo intervalo contenido en  $A$  , se satisfacen todas las condiciones del teor. VI del n° 4 y, en consecuencia, fijado en  $A$  cualquier punto  $x$  , de la (15) sigue

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt , \quad (\text{para } -1 < x < 1)$$

o sea

$$\text{arc tg } x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} , \quad (\text{para } -1 \leq x \leq 1) \quad (16)$$

que es la serie de deseábamos calcular. Sugerimos al lector demostrar que esta serie converge absolutamente solamente para  $|x| < 1$  .

7°) Serie del arco seno . Es la serie de Mac Laurin de la función  $f(x) = \text{arc sen } x$  , que está definida para  $-1 \leq x \leq 1$  . Obtendremos tal serie con un procedimiento análogo al precedente. Considerada la derivada  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

se tiene, aplicando la (12) con  $\alpha = -\frac{1}{2}$  y escribiendo  $-x^2$  en lugar de  $x$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} x^{2k} \quad (\text{para } -1 < x < 1). \quad (17)$$



Con las notaciones de antes, se tiene que los términos de esta serie son funciones continuas en  $A$ ; que, considerada una suma parcial cualquiera de dicha serie, se tiene en  $A-N$ :

$$\left| 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} x^{2k} \right| \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} x^{2k} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

con  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  continua en  $A-N$  y sumable en  $A$  (ya que en los puntos  $-1$ ,  $1$  presenta un infinito de orden  $\frac{1}{2}$ ); que la serie (17) converge uniformemente en todo dominio medible  $T$  contenido en  $A-N$ , ya que converge totalmente en todo intervalo  $[-a, a]$  con  $0 < a < 1$  (en efecto, en tal intervalo es  $\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} x^{2k} < \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} a^{2k}$  y la serie formada con estos últimos términos converge).

Entonces, por el teor. VI del n° 4, se tendrá para todo punto  $x$  de  $A$

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} \int_0^x t^{2k} dt$$

o sea

$$\arcsen x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad (\text{para } -1 \leq x \leq 1), \quad (18)$$

que es la serie buscada. Se ve inmediatamente que la misma converge absolutamente para todos los  $x$  indicados.

## 7 - CALCULO DE INTEGRALES POR MEDIO DE SERIES.

Los teoremas de integración por serie vistos en el n° 4 permiten, en muchos casos, el cálculo de integrales que, por otro camino, no sería fácil efectuar. Supongamos que  $f(P)$  sea una función sumable en cierto dominio medible  $A$  y que se haya logrado (en  $A$  o, al menos, en  $A-N$ , con  $N$  conjunto cerrado y de medida nula) desarrollar la  $f(P)$  en una serie de funciones  $\varphi_k(P)$ :

$$f(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P), \quad (1)$$



con las  $\varphi_k(P)$  sumables en  $A$  y sus integrales  $\int_A \varphi_k(P) dT$  de fácil cálculo.

Entonces, si a la (1) le es aplicable uno de los dos teoremas V, VI del n° 4, se deduce

$$\int_A f(P) dT = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A \varphi_k(P) dT ,$$

por lo que, con las sumas parciales de la serie aquí escrita, se podrá aproximar cuanto se quiera la integral buscada.

Demos algunos ejemplos para integrales de funciones de una variable; advirtamos que en estos ejemplos las integrales consideradas no se pueden calcular por medio de la función primitiva, pues ésta no se puede expresar en forma elemental.

1º) Calcular  $\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x} dx$ . Sabemos que la función  $\text{sen } x$  admite, para todo  $x$ , el desarrollo en serie  $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ ; entonces

$$\frac{\text{sen } x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

y es fácil reconocer que esta serie es totalmente (y, por ende, uniformemente) convergente en  $[0, 1]$ . Por el teor. V del n° 4 se tendrá, entonces,

$$\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} .$$

Esta serie tiene sus términos con signos alternados, decrecientes en valor absoluto. De ahí que, por el teor. III del Cap. XIX, n° 5, sus sumas parciales de orden impar (o par) den valores aproximados por exceso (o por defecto) de la integral buscada. Por ejemplo, con las sumas parciales de orden 5 y 6 se obtiene:

$$0,946083073 > \int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x} dx > 0,946083070 .$$

2º) Calcular  $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$ . De la serie exponencial, escrita con  $-x^2$  en lugar de  $x$  surge, para todo  $x$ :

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$



y esta serie converge totalmente (y, por ende, uniformemente) en todo intervalo a cotado del eje  $x$ . Entonces, por el teor. V del n° 4, se tiene

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{(2k+1) 2^{2k+1}}.$$

Vale la misma observación que en el caso precedente, con las sumas parciales de orden 5 y 6 se obtiene

$$0,46128137 > \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx > 0,46128100$$

3°) Calcular  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$  (esta integral tiene sentido porque, en el punto  $x=1$  la función a integrar resulta infinita de orden  $\frac{1}{2}$ ). Usando la serie binomial con

$\alpha = -\frac{1}{2}$  y escribiendo  $-x^3$  en lugar de  $x$ , se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^3)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} x^{3k} \quad (\text{para } -1 \leq x \leq 1)$$

y con un razonamiento del todo análogo al hecho en el ejemplo 7°) del n° prece - dente, se ve que es aplicable el teor. VI del n° 4, por lo que se tendrá

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} &= \int_0^1 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} \int_0^1 x^{3k} dx = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \dots 2k} \frac{1}{3k+1}. \end{aligned}$$

Esta serie es de términos positivos, por lo que sus sumas parciales dan valores aproximados por defecto de la integral. Sin embargo, como es de muy lenta con - vergencia, es necesario sumar más de 20 términos para obtener el valor 1,32... con dos decimales exactos.

## 8 - SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES COMPLEJAS.

Diremos que una sucesión de funciones complejas (de variables reales)

$$\{f_n(P)\} = \{a_n(P) + i b_n(P)\}$$

es uniformemente convergente en un conjunto  $E$  si lo son ambas sucesiones

$\{a_n(P)\}$ ,  $\{b_n(P)\}$  de funciones reales.



En virtud del teor. I del n<sup>o</sup> 1 y de las desigualdades

$$\left. \begin{array}{l} |a_m(P) - a_n(P)| \\ |b_m(P) - b_n(P)| \end{array} \right\} \leq |f_m(P) - f_n(P)| \leq |a_m(P) - a_n(P)| + |b_m(P) - b_n(P)|$$

se ve que, condición necesaria y suficiente para que la sucesión (1) sea uniformemente convergente en  $E$  es que, dado  $\varepsilon > 0$ , exista un índice  $\nu$  (dependiente sólo de  $\varepsilon$ ) tal que, para  $m > \nu$ ,  $n > \nu$ , resulte para todo  $P \in E$ :

$$|f_m(P) - f_n(P)| < \varepsilon \quad (2)$$

Se ve inmediatamente que continúan valiendo todos los teoremas de los n<sup>os</sup> 2 y 3.

Análogamente, para una serie de funciones complejas,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(P) = \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k(P) + i\beta_k(P)] \quad ; \quad (3)$$

diremos que tal serie es uniformemente convergente (o totalmente convergente) en el conjunto  $E$  si los son ambas series  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(P)$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(P)$  de funciones reales.

En el caso de la convergencia uniforme se reconoce inmediatamente que la definición dada es equivalente a esta otra: la sucesión de las sumas parciales  $f_n(P) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(P) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(P) + i \sum_{k=1}^n \beta_k(P)$  es uniformemente convergente en  $E$ . Y entonces, transformando la (2), se ve que condición necesaria y suficiente para que la serie (3) sea uniformemente convergente en  $E$  es que, dado  $\varepsilon > 0$ , exista un índice  $\nu$  (dependiente sólo de  $\varepsilon$ ) tal que, para  $n > \nu$  y  $p$  arbitrario, resulte para todo punto  $P \in E$ :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(P) \right| < \varepsilon$$

Es obvio que continúan valiendo los teor. II, III, IV, V, VI del n<sup>o</sup> 4. En el caso de la convergencia total, de las desigualdades



$$\left. \begin{array}{l} |\alpha_k(P)| \\ |\beta_k(P)| \end{array} \right\} \leq |\varphi_k(P)| \leq |\alpha_k(P)| + |\beta_k(P)|$$

se deduce que la serie (3) es totalmente convergente si y sólo si, llamando con  $L_k$  al extremo superior de  $|\varphi_k(P)|$ , cada  $L_k$  es finito y la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} L_k$  es convergente. Resulta así, como en el n° 5, que si la serie (3) es totalmente convergente en  $E$ , será allí también absolutamente y uniformemente convergente.

### 9 - SERIE DE POTENCIAS Y SERIE DE TAYLOR EN EL CAMPO COMPLEJO.

En el n° 6 hemos observado que la serie de Taylor de una función real  $f(x)$  de punto inicial  $x_0$ , es una serie de potencias del binomio  $x-x_0$ . El estudio de tales series de potencias puede realizarse de modo mucho más profundo considerándolas en el campo complejo. Si  $z = x + iy$  es una variable compleja y  $z_0 = x_0 + iy_0$  un valor fijo de la misma, llamaremos serie de potencias, de punto inicial  $z_0$ , toda serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad (1)$$

donde los coeficientes  $a_k$  son constantes prefijadas (reales o complejas).

Evidentemente la serie (1) resulta convergente para  $z = z_0$  (con suma  $a_0$ ) y es natural preguntarse si existen otros valores de  $z$  para los que dicha serie converja. Con respecto a esta cuestión, comencemos estableciendo el siguiente teorema:

I - Si la serie (1) converge en un punto  $z_1 \neq z_0$ , convergerá también absolutamente en todos los puntos  $z$  para los que resulte  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  (es decir, interiores al círculo de centro  $z_0$  y radio  $|z_1 - z_0|$ ).



Dem. Por hipótesis la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$  converge y de ahí que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k (z_1 - z_0)^k = 0.$$

Pero si una sucesión converge, el conjunto de los módulos de sus términos está acotado, y entonces existirá un  $M > 0$  tal que  $|a_k| |z_1 - z_0|^k \leq M$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Consideremos ahora el módulo del término general de la serie (1) que, para  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  puede mayorarse como sigue

$$|a_k (z - z_0)^k| = |a_k| |z_1 - z_0|^k \frac{|z - z_0|^k}{|z_1 - z_0|^k} \leq M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^k.$$

Resulta así que la serie de los módulos de los términos de la (1) queda mayorada por una serie geométrica de razón menor que 1 y, por lo tanto, convergente. La (1) es entonces absolutamente convergente para  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  que es lo que queríamos demostrar.

Consideremos ahora el conjunto de todos los puntos  $z$  en que la (1) converge e, inmediatamente, el conjunto  $E$  formado por los módulos de las diferencias  $z - z_0$  (conjunto que no es vacío porque contiene, al menos, el cero). Designemos con  $r$  el extremo superior de tal conjunto  $E$  (puede ser,  $r = 0$ ,  $0 < r < +\infty$ ,  $r = +\infty$ ) y demostremos que:

II - Si  $r = 0$ , la serie converge sólo para  $z = z_0$ . Si  $r$  es finito y mayor que cero, la serie converge absolutamente para todos los  $z$  que verifican la condición  $|z - z_0| < r$  y no converge para  $|z - z_0| > r$ . Si  $r = +\infty$  la serie converge absolutamente para todo  $z$ .

Dem. Sea  $r$  finito  $\geq 0$ . Para  $|z - z_0| > r$  mostraremos que la serie no puede converger. Supongamos, en efecto, que existe un punto  $z$  verificante la re



lación  $|z - z_0| > r$ , en el que la serie converja. El número  $|z - z_0|$  debe pertenecer al conjunto  $E$  y se llega así al absurdo de haber encontrado un número de  $E$  mayor que su extremo superior. Entonces, si  $r = 0$  la serie converge sólo en  $z_0$ ; si  $0 < r < +\infty$  la serie no converge para  $|z - z_0| > r$ .

Supongamos ahora  $0 < r \leq +\infty$ . Fijado un punto  $z$  tal que  $|z - z_0| < r$ , por una conocida propiedad del extremo superior existirá un número  $\rho$  del conjunto  $E$  que verifica la desigualdad  $|z - z_0| < \rho \leq r$  y, además, un punto  $z_1$ , a distancia  $\rho$  de  $z_0$ , en el que la serie converge. Siendo  $|z - z_0| < \rho < |z_1 - z_0|$ , el teor. I nos dice que nuestra serie converge absolutamente en el punto  $z$ , que es lo que queríamos demostrar.

Del teorema recién demostrado resulta entonces que, dada una serie de potencias de punto inicial  $z_0$ , queda determinado en correspondencia con dicha serie un número  $r$  (con  $0 \leq r \leq +\infty$ ) que verifica las dos propiedades:

a) habrá convergencia (absoluta) de la serie en los puntos  $z$  para los que se cumple  $|z - z_0| < r$  (si existen, es decir, si  $r > 0$ );

b) no se tiene convergencia de la serie en los puntos  $z$  para los que  $|z - z_0| > r$  (si existen, es decir, si  $r < +\infty$ ).

Es además evidente que este número  $r$  es único y está completamente caracterizado por las dos propiedades a) y b).

Se puede también decir: si se describe con centro en el punto inicial  $z_0$  un círculo  $C$  de radio  $r$  (que se reduce al único punto  $z_0$  si  $r = 0$  y coincide con todo el plano si  $r = +\infty$ ), la serie de potencias arriba considerada converge absolutamente en todos los puntos interiores al círculo  $C$  y no converge en los puntos exteriores a  $C$ .



Tal círculo  $C$  se denomina el círculo de convergencia y el número  $r$ , el radio de convergencia de la serie de potencias. El conjunto de los puntos interiores de  $C$  es llamado el campo de convergencia de dicha serie.

Notemos que el teor. I no dice nada sobre la naturaleza de la serie (1) en los puntos de la circunferencia que limita  $C$ , es decir, para  $|z - z_0| = r$ ; en efecto, en tales puntos nada puede afirmarse, en general y la cuestión debe estudiarse caso por caso (véase el sucesivo n° 10).

Para el cálculo del radio de convergencia  $r$  de una determinada serie de potencias, conviene tener presente el siguiente teorema que, aun no teniendo validez general, permite en muchos casos una rápida determinación de tal radio.

III - Dada la serie de potencias (1), si sus coeficientes  $a_k$  son definitivamente distintos de cero, y si existe el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lambda, \quad (0 \leq \lambda \leq +\infty)$$

su recíproco  $\frac{1}{\lambda}$  ( $0 \leq \frac{1}{\lambda} \leq +\infty$ ) será igual al radio de convergencia  $r$  de la serie en consideración.

Dem. En efecto, para  $z \neq z_0$  se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} (z - z_0)^{k+1}}{a_k (z - z_0)^k} \right| = |z - z_0| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |z - z_0| \lambda,$$

y, recordando el criterio del cociente (teor. IV' de Cap. V, n° 4), se ve que, si  $|z - z_0| \lambda < 1$  o sea  $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$  la serie (1) converge absolutamente; si, en cambio,  $|z - z_0| \lambda > 1$ , o sea  $|z - z_0| > \frac{1}{\lambda}$ , la serie no converge. Por lo tanto,  $\frac{1}{\lambda}$  coincide con el radio de convergencia  $r$ , que es lo que queríamos demostrar.

Considerando, por ejemplo, en el campo complejo (es decir, escribiendo  $z$



en lugar de  $x$ ) las series de potencias tratadas en el n° 6, el teorema precedente permite determinar inmediatamente sus radios de convergencia. Se encuentra así que las series<sup>(\*)</sup>

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad (2)$$

$$1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (3)$$

$$z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4)$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (5)$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (6)$$

tienen radio de convergencia infinito, mientras que las series

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}, \quad (7)$$

$$1 + \binom{\alpha}{1} z + \binom{\alpha}{2} z^2 + \binom{\alpha}{3} z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k, \quad (\alpha \text{ real o complejo}) \quad (8)$$

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}, \quad (9)$$

$$z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{5} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \quad (10)$$

tienen radio de convergencia igual a 1. Nos ocuparemos poco más adelante de las sumas de estas series (ya conocidas en el caso  $z$  real).

(\*) A las (3), (5) el teorema IV se les aplica considerándolas series de potencias de  $z^2$ ; lo mismo para las (4), (6), (9), (10) tras haberlas dividido por  $z$ .



Cada término de la serie de potencias (1) es una función holomorfa de  $z$  (en todo el plano) y, por lo tanto, derivable de modo complejo (véase Cap. XVII, n<sup>os</sup> 4, 5, 6).

Entonces, junto a la serie (1) puede considerarse la obtenida derivándola término por término, que se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad \text{o también} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z - z_0)^k. \quad (11)$$

Se trata todavía de una serie de potencias y es natural preguntarse cuál será su radio de convergencia. Respecto de esta cuestión, se tiene el teorema:

IV - Dada la serie de potencias (1) con radio de convergencia  $r$ , la serie (11), obtenida derivando término por término la serie (1), tiene el mismo radio de convergencia de la serie dada.

Dem. Sea  $r'$  el radio de convergencia de la serie (11); evidentemente  $r'$  también será el radio de convergencia de la

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^k \quad (12)$$

que se obtiene multiplicando todos los términos de la (11) por  $(z - z_0)$ .

Supongamos  $|z - z_0| < r'$ ; para tales  $z$  la (12) será absolutamente convergente, y como es  $|a_k (z - z_0)^k| \leq |k a^k (z - z_0)^k|$ , también la (1) resultará absolutamente convergente para  $|z - z_0| < r'$ . Entonces, necesariamente es

$$r' \leq r. \quad (13)$$

Supongamos  $|z - z_0| < r$ . Entonces, fijado un punto  $\xi$  de modo de tenerse  $|z - z_0| < |\xi - z_0| < r$ , la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\xi - z_0)^k$  resulta absolutamente convergente, de donde la sucesión descrita por  $a_k (\xi - z_0)^k$  tiene límite cero. De aquí surge que tal sucesión está acotada, es decir, que existe un nú-



mero  $M > 0$  tal de tenerse, para todo  $k$ ,  $|a_k (\xi - z_0)^k| < M$ . Tras esta afirmación, poniendo  $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \varphi$  (con  $0 < \varphi < 1$ ), puede escribirse

$$|k a_k (z - z_0)^k| = |a_k (\xi - z_0)^k| \cdot k \left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right|^k < M k \varphi^k$$

Siendo  $0 < \varphi < 1$ , la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} k \varphi^k$  es convergente (como se ve inmediatamente con el criterio del cociente); de esto y de la desigualdad precedente sigue que la (12) es absolutamente convergente para  $|z - z_0| < r$ . Entonces, necesariamente será

$$r \leq r' \quad (14)$$

De las (13) y (14) sigue  $r' = r$ , es decir, la tesis.

Pasemos ahora a estudiar la suma de una serie de potencias que es, evidentemente, una función de la variable compleja  $z$  que resulta definida en el campo de convergencia de la serie considerada. Con tal objeto señalemos, primeramente, el siguiente teorema:

V - Si la serie de potencias (1) tiene radio  $r$  de convergencia no nulo, convergerá totalmente (y, por ende, uniformemente) en todo círculo  $|z - z_0| \leq r_1$ , donde  $r_1$  es cualquier número prefijado menor que  $r$ .

Dem. En efecto; fijado un punto  $z_1$  tal de verificarse  $|z_1 - z_0| = r_1$ , tal punto resulta interior al círculo de convergencia, y entonces la serie

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$  converge absolutamente, es decir, converge la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k (z - z_0)^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r_1^k \quad (15)$$

Cuando  $z$  varía en el círculo  $|z - z_0| \leq r_1$  se tiene  $|a_k (z - z_0)^k| \leq |a_k| r_1^k$ , de lo que (junto a la convergencia de la serie (15)) sigue precisamente que la (1) converge totalmente para  $|z - z_0| \leq r_1$ .



Ahora podemos demostrar el teorema fundamental:

VI - Si la serie de potencias (1) tiene radio de convergencia  $r$  no nulo, su suma  $f(z)$  será una función holomorfa en el campo de convergencia. En tal campo la  $f(z)$  admitirá derivadas de cualquier orden y su derivada enésima ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) es tará dada por la suma de la serie que se obtiene derivando  $n$  veces, término por término, la serie dada.

Dem. La serie (1) y la serie que de ella se deduce derivándola término por término tienen el mismo círculo de convergencia  $C$  de radio  $r > 0$  (eventualmente infinito).

Pongamos

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} (z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}, \quad (\text{en } C - \mathcal{F}C)$$

y si es  $z = x + iy$ , se tendrá, como ya es sabido (Cap. XVII, n° 4)

$$\frac{d}{dz} [a_k (z-z_0)^k] = \frac{\partial}{\partial x} [a_k (z-z_0)^k] = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} [a_k (z-z_0)^k],$$

de modo que también puede escribirse

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [a_k (z-z_0)^k], \quad \text{o, también}$$

$$g(z) = \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} [a_k (z-z_0)^k], \quad (\text{en } C - \mathcal{F}C) \quad (17)$$

Por otra parte, fijado un número positivo  $r_1 < r$ , las dos series (16) con vergen uniformemente en el círculo  $C_1$  definido por  $|z - z_0| \leq r_1$ . En tonces (teor. III del n° 4) tanto  $f(z)$  como  $g(z)$  serán funciones continuas en  $C_1$ ; además, por el teorema de derivación por serie visto en el n° 4, la  $f(z)$  resulta en  $C_1$  parcialmente derivable respecto de  $x$  y de  $y$ , teniéndose

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [a_k (z-z_0)^k], \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} [a_k (z-z_0)^k] \quad (\text{en } C_1)$$



o sea, por las (17)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(z) \quad ; \quad \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = g(z) \quad , \quad (\text{en } C_1) \quad . \quad (18)$$

Teniendo en cuenta que  $r_1$  es un arbitrario número positivo menor que  $r$ , se concluye que, en todo punto interior de  $C$ , la  $f(z)$  es continua, admite derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continuas y tales que resulta  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$ . Entonces, por un conocido teorema (Cap. XVII, n° 4) la  $f(z)$  será holomorfa en  $C - \mathcal{T} C$  y por la (18) su derivada  $f'(z)$  será igual a  $g(z)$  es decir, a la serie que se obtiene derivando la (1) término por término.

Entonces, la  $f'(z)$ , al resultar expresada por una serie de potencias que tiene a  $C$  por círculo de convergencia, también será holomorfa en  $C - \mathcal{T} C$  y su derivada, es decir la  $f''(z)$ , está dada por la serie que se obtiene derivando dos veces la (1) término por término. La misma cosa puede repetirse sobre la  $f''(z)$  y así sucesivamente, con lo que el teorema queda completamente demostrado.

Este teorema afirma entonces que, dada la serie de potencias  $a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$  y, ubicados en el interior de su círculo de convergencia  $C$ , si ponemos

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \quad , \quad (19)$$

esta  $f(z)$  resultará holomorfa en  $C$  y se tendrá

$$f'(z) = 1. a_1 + 2 a_2 (z - z_0) + 3 a_3 (z - z_0)^2 + \dots ,$$

$$f''(z) = 2.1. a_2 + 3.2. a_3 (z - z_0) + 4.3. a_4 (z - z_0)^2 + \dots ,$$

$$f'''(z) = 3.2.1. a_3 + 4.3.2. a_4 (z - z_0) + 5.4.3. a_5 (z - z_0)^2 + \dots ,$$

.....

Si en estas fórmulas se pone  $z = z_0$ , se obtiene

$$a_0 = f(z_0) \quad , \quad a_1 = \frac{f'(z_0)}{1!} \quad , \quad a_2 = \frac{f''(z_0)}{2!} \quad , \quad a_3 = \frac{f'''(z_0)}{3!} \quad ,$$

de modo que la (19) puede también escribirse



$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots \quad (20)$$

Extendiendo una locución ya usada en el campo real, la serie aquí escrita en el segundo miembro puede denominarse la serie de Taylor de la  $f(z)$ , con punto inicial  $z_0$ , por lo que puede enunciarse:

VII - Dada una serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ , con el círculo de convergencia  $C$ , la misma coincide con la serie de Taylor, de punto inicial  $z_0$ , relativo a la función holomorfa  $f(z)$  que dicha serie define en el interior de  $C$ , o también

VII' - Si una función  $f(z)$ , holomorfa en un campo circular de centro  $z_0$ , es en dicho campo desarrollable en una serie de potencias del binomio  $z - z_0$ , tal serie coincidirá necesariamente con la serie de Taylor, de punto inicial  $z_0$ , relativa a dicha  $f(z)$  (\*).

Aplicemos los teoremas recién demostrados al estudio de las series (2), (3), ..., (10).

La serie (2) tiene radio de convergencia infinito y, por lo tanto, define en todo el plano una función holomorfa  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  para la que se tiene  $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}$ , es decir,  $f'(z) = f(z)$ .

Para determinar la expresión de  $f(z)$ , consideremos el producto  $e^{-z} f(z)$ , cuya derivada,  $e^{-z} [f'(z) - f(z)]$ , valdrá cero, por lo que tal producto será una constante  $C$ , es decir,  $f(z) = C e^z$ . Pero  $f(0) = 1$  y entonces debe ser  $C = 1$ ; esto permite la conclusión de que, para todo  $z$ , se tiene

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \text{[cfr. con la (7) del n° 6]} \quad (21)$$

(\*) Es decir que se tiene la unicidad del desarrollo en serie de Taylor como ya se había afirmado en el n° 6. La cuestión de la existencia de tal desarrollo será estudiada más adelante en el Cap. XXX.



Pasando a las series (3), (4), sus sumas se calculan inmediatamente recordando las fórmulas  $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ ,  $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$  y teniendo en cuenta la (21). Se encuentra así

$$\begin{cases} \cosh z = \\ \sinh z = \end{cases} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) \pm \left( 1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \dots \right) \right] \right\} \begin{cases} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\ = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \end{cases}$$

de donde, para todo  $z$ , se tiene

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad [\text{cfr. con las (8) del n}^\circ 6]. \quad (22)$$

Para las (5), (6) basta recordar que  $\cos z = \cosh(iz)$ ,  $\sin z = \frac{1}{i} \sinh(iz)$ , para obtener, mediante las (22):

$$\cos z = 1 + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots,$$

$$\sin z = \frac{1}{i} \left[ iz + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots \right] = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots,$$

o sea que, para todo  $z$ , se tendrá

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad [\text{cfr. con las (9) del n}^\circ 6]. \quad (23)$$

Examinemos ahora la serie (8) que tiene radio de convergencia 1. Llamando  $f(z)$  a la función holomorfa que tal serie define para  $|z| < 1$ , es decir, poniendo  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ , se tendrá  $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} z^k$  y, en consecuencia,

$$(1+z)f'(z) - \alpha f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1) \binom{\alpha}{k+1} - \alpha \binom{\alpha}{k}] z^k = 0, \quad \text{ya que evidentemente es } (k+1) \binom{\alpha}{k+1} = (\alpha - k) \binom{\alpha}{k}.$$

Consideramos ahora la potencia principal  $(1+z)^\alpha$ , y analicemos, para

$|z| < 1$ , la función  $\frac{f(z)}{(1+z)^\alpha}$  (\*). Su derivada vale

(\*) Recordemos (Cap. XVII, n° 6) que la  $(1+z)^\alpha$  es holomorfa y distinta de cero en el campo que se obtiene privando al plano de los puntos del eje real que tienen abscisa  $\leq -1$ . Tal campo contiene al campo circular  $|z| < 1$  y de ahí que la

$\frac{f(x)}{(1+z)^\alpha}$  es holomorfa para  $|z| < 1$ .



$$(1+z)^{-\alpha-1} [(1+z)f'(z) - \alpha f(z)] = 0$$

y entonces la función en examen será, para  $|z| < 1$ , una constante  $C$ ; por otra parte, para  $z = 0$ , tal función vale 1 de donde puede concluirse que  $f(z) = (1+z)^\alpha$  o sea que para  $|z| < 1$  vale la fórmula

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \quad \text{[cfr. con la (12) del n° 6]} \quad (24)$$

Pasemos a considerar la (7). Poniendo, para  $|z| < 1$ ,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k},$$

se encuentra  $f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$ , es decir, [por la (24) escrita con  $\alpha = -1$ ]

$$f'(z) = \frac{1}{(1+z)}.$$

Entonces, la  $f(z)$  tiene la misma derivada de la función  $\log(1+z)$  (logaritmo principal); por lo que la diferencia  $f(z) - \log(1+z)$  es una constante  $C$ , que fácilmente se nota que debe ser nula. Se concluye entonces que, para  $|z| < 1$ , vale la fórmula

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}, \quad \text{[cfr. con la (10) del n° 6]} \quad (25)$$

La (9) tiene una suma que se calcula inmediatamente, recordando la conocida expresión del arco tangente principal  $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}$ . En efecto; si se tiene en cuenta la (25) resulta para  $|z| < 1$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} z &= \frac{1}{2i} \left\{ \left[ iz - \frac{(iz)^2}{2} + \frac{(iz)^3}{3} - \dots \right] - \left[ (-iz) - \frac{(-iz)^2}{2} + \frac{(-iz)^3}{3} - \dots \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ 2iz - 2i \frac{z^3}{3} + 2i \frac{z^5}{5} - \dots \right\} \end{aligned}$$

por lo que puede escribirse para  $|z| < 1$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}; \quad \text{[cfr. con la (16) del n° 6]} \quad (26)$$

Por último, en lo que se refiere a la (10), dejamos al lector la tarea de demostrar, con un razonamiento idéntico al hecho para la serie logarítmica (25) que,



para  $|z| < 1$ , vale la fórmula

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}, \quad \text{[cfr. con la (18) del n}^\circ \underline{6} \text{]} \quad (27)$$

donde el  $\operatorname{arcsen} z$  denota, como de costumbre, el arco seno principal.

## 10 - EL TEOREMA DE ABEL.

En el n<sup>o</sup> precedente hemos dicho que, en general, nada puede afirmarse sobre el comportamiento de una serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (1)$$

sobre la circunferencia  $\gamma$ , definida por  $z - z_0 = r$  (donde  $r$  es el radio del círculo de convergencia, suponiéndose  $0 < r < +\infty$ ). Tomado un punto  $z_1$  de  $\gamma$ , puede suceder que en  $z_1$  la (1) sea o no convergente; en el caso en que converja nos preguntamos, ¿qué relación existe entre la suma de la serie en el punto  $z_1$  y la función holomorfa  $f(z)$  que la (1) define en el interior de  $C$ ? Referente a esta pregunta, nos será muy útil el siguiente teorema de Abel:

I - Si la serie de potencias (1) converge en un punto  $z_1 \neq z_0$ , convergerá uniformemente en el segmento que une el punto  $z_0$  con el punto  $z_1$ . (\*)

Dem. Llamando con  $n, p$  a dos números enteros, pongamos

$$R_{n,p}(z) = a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + a_{n+2} (z - z_0)^{n+2} + \dots + a_{n+p} (z - z_0)^{n+p}.$$

Por hipótesis, la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$  es convergente. Por lo tanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existirá un índice  $\nu$  (dependiente sólo de  $\varepsilon$ ) tal que resulte

$$|R_{n,p}(z_1)| < \varepsilon, \quad \text{para } n > \nu, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Los puntos  $z$  del segmento  $z_0 z_1$  se obtienen todos poniendo  $z - z_0 =$

(\*) El punto  $z_1$  no puede ser exterior a  $C$ . Si es interior, este teorema es consecuencia inmediata del teor. V del n<sup>o</sup> precedente; de ahí que el teorema de Abel introduzca una novedad precisamente en el caso que  $z_1$  pertenezca a la circunferencia  $\gamma$



$= \varphi (z_1 - z_0)$  y haciendo variar el parámetro real  $\varphi$  en el intervalo  $[0, 1]$

Sobre ese segmento se tendrá, en consecuencia,

$$\begin{aligned} |R_{n,p}(z)| &= |a_{n+1} \varphi^{n+1} (z_1 - z_0)^{n+1} + a_{n+2} \varphi^{n+2} (z_1 - z_0)^{n+2} + \dots + a_{n+p} (z_1 - z_0)^{n+p}| = \\ &= |\varphi^{n+1} R_{n,1}(z_1) + \varphi^{n+2} [R_{n,2}(z_1) - R_{n,1}(z_1)] + \dots + \varphi^{n+p} [R_{n,p}(z_1) - R_{n,p-1}(z_1)]| = \\ &= |(\varphi^{n+1} - \varphi^{n+2}) R_{n,1}(z_1) + (\varphi^{n+2} - \varphi^{n+3}) R_{n,2}(z_1) + \dots + (\varphi^{n+p-1} - \varphi^{n+p}) R_{n,p-1}(z_1) + \\ &\quad + \varphi^{n+p} R_{n,p}(z_1)|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la (2) y el hecho que, siendo  $0 \leq \varphi \leq 1$ , las diferencias  $\varphi^{n+1} - \varphi^{n+2}$ ,  $\dots$ ,  $\varphi^{n+p-1} - \varphi^{n+p}$  son todas no negativas, se deduce que para  $n > \nu$  y  $p$  arbitrario, se tiene

$$|R_{n,p}(z)| \leq \varepsilon (\varphi^{n+1} - \varphi^{n+2} + \varphi^{n+2} - \varphi^{n+3} + \dots + \varphi^{n+p-1} - \varphi^{n+p} + \varphi^{n+p}) = \varepsilon \varphi^{n+1} \leq \varepsilon,$$

para cualquier  $z$  del segmento  $z_0 z_1$ , lo que prueba la tesis.

Este teorema de Abel permite responder inmediatamente al problema que nos habíamos planteado al comienzo. En efecto, si en un punto  $z_1$  de la circunferencia  $\gamma$  de  $C$  la serie (1) converge, tal serie convergerá uniformemente sobre todo el segmento  $z_0 z_1$  y entonces (teor. III del n° 4) su suma, sobre dicho segmento, será una función continua de  $z$ . Por otra parte, sobre dicho segmento, (excluido el punto  $z_1$ ) se tiene  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = f(z)$ , por lo que podemos concluir que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k = \lim_{z \rightarrow z_1} f(z) \quad (\text{sobre el segmento } z_0 z_1). \quad (3)$$

Esta fórmula nos permite calcular la suma de una serie de potencias en un punto  $z_1$  de la circunferencia  $\gamma$  de su círculo de convergencia, en el caso en que sea convergente en dicho punto, apenas se conozca la suma  $f(z)$  de tal serie en el interior de  $C$ .

Apliquemos, por ejemplo, este resultado al estudio de la serie logarítmica (25)



del n° precedente, sobre la circunferencia  $|z| = 1$ . Tal serie  $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$  puede suponerse obtenida a partir de la  $z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots$  multiplicando sus términos por los números positivos  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ , respectivamente, números éstos que forman una sucesión decreciente e infinitésima. Por otra parte para  $|z| = 1$  ( $z \neq -1$ ) la serie  $z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots$  tiene sus sumas parciales acotadas puesto que resulta

$$|z - z^2 + z^3 - \dots + (-1)^{n-1} z^n| = \left| z \frac{1 - (-z)^n}{1+z} \right| \leq \frac{2}{|1+z|}.$$

Se puede entonces aplicar el teor. I del Cap. V, n° 5 y concluir que a excepción del punto  $z = 1$ , en todo punto de la circunferencia  $|z| = 1$  la serie logarítmica converge. Para  $|z| < 1$  la suma de tal serie vale  $\log(1+z)$  y por lo tanto, aplicando la (3), se tendrá que, fijado sobre la circunferencia  $|z| = 1$  un punto  $z \neq -1$ , resulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z_1^k}{k} = \lim_{z \rightarrow z_1} \log(1+z) \quad (\text{sobre el segmento } Oz_1).$$

Pero, siendo la función  $\log(1+z)$  continua en todo el plano (salvo en los puntos del eje real con abscisa  $\leq -1$ ), será sin duda continua en dicho punto  $z_1$  y el límite indicado valdrá, entonces,  $\log(1+z_1)$ . En definitiva tendremos (cfr. teor. VI del n° 6):

II - En todos los puntos del círculo  $|z| \leq 1$ , excluido el punto  $-1$ , se tiene

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}.$$

Si en esta fórmula, en lugar de  $z$  se escribe  $iz$  (o también  $-iz$ ) se obtendrá una nueva fórmula válida para  $|z| \leq 1$  excluido el punto  $i$  (o el  $-i$ ), y entonces, recordando lo que se ha dicho en el n° precedente para llegar a la (26) se concluye que:

III - En todos los puntos del círculo  $|z| \leq 1$ , excluidos los pun



tos  $i$ ,  $-i$ , se tiene

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)}$$

Un estudio análogo podría realizarse para las series (24), (27) del n<sup>o</sup> precedente; pero, por brevedad, lo omitiremos.

## 11 - SERIE DE FOURIER.

Sea  $f(x)$  una función definida en el intervalo  $[-\infty, +\infty]$ ; diremos que tal  $f(x)$  es periódica, de período  $T$ , si para todo valor de  $x$  resulta  $f(x) = f(x + T)$ . En virtud de esta relación es evidente que la  $f(x)$  queda completamente determinada sobre todo el eje real apenas se conozcan sus valores en un intervalo  $[x_0, x_0 + T)$ , donde  $x_0$  denota un punto fijado arbitrariamente. Los gráficos de la  $f(x)$  en los intervalos  $[x_0 + T, x_0 + 2T)$ ,  $[x_0 + 2T, x_0 + 3T)$ , ...,  $[x_0 - T, x_0)$ ,  $[x_0 - 2T, x_0 - T)$ , ..., se obtienen del relativo al intervalo  $[x_0, x_0 + T)$  mediante traslaciones según la dirección del eje  $x$ , en un sentido o en el otro, de amplitud igual o múltiplo del período  $T$ . Es por otra parte evidente que, si la  $f(x)$  es periódica de período  $T$ , también tendrá por período a  $kT$ , donde  $k$  es un número entero arbitrario, positivo o negativo.

Llamaremos funciones periódicas simples, relativas al período  $T$ , a las funciones  $1$  (periódica de período arbitrario);  $\cos \frac{2\pi x}{T}$ ,  $\sin \frac{2\pi x}{T}$  (periódicas de período  $T$ );  $\cos \frac{4\pi x}{T}$ ,  $\sin \frac{4\pi x}{T}$  (periódicas de período  $\frac{T}{2}$ );  $\cos \frac{6\pi x}{T}$ ,  $\sin \frac{6\pi x}{T}$  (periódicas de período  $\frac{T}{3}$ ); ....; en general,  $\cos \frac{2\pi nx}{T}$ ,  $\sin \frac{2\pi nx}{T}$ , con  $n$  entero positivo (periódicas de período  $\frac{T}{n}$ ). Todas estas infinitas funciones tienen  $T$  como período común;

por eso, cualquier combinación lineal de un número finito de ellas, con coeficientes constantes, representa una función periódica de período  $T$ . Tal combinación lineal puede indicarse con  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos \frac{2k\pi x}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{T})$  y recibe el



nombre de un polinomio trigonométrico de orden  $n$ . Por extensión podemos también considerar lo que se llama una serie trigonométrica, es decir, una serie del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2k\pi x}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{T} \right) ;$$

si esta resulta convergente en un intervalo  $[x_0, x_0 + T)$ , lo será sobre todo el eje  $x$  y definirá una función periódica de período  $T$ .

En numerosas cuestiones de física matemática es de fundamental importancia el siguiente problema: dada una función  $f(x)$ , periódica de período  $T$ , ¿es posible representarla como una suma de una serie trigonométrica (eventualmente reducida a un polinomio trigonométrico)?, es decir, dada la  $f(x)$  ¿es posible determinar las constantes  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  de modo que se tenga

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2k\pi x}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{T} \right) ? \quad (1)$$

Si esto fuese posible, el primer término de la serie (prescindiendo del término constante  $\frac{a_0}{2}$ ), o sea,  $a_1 \cos \frac{2\pi x}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi x}{T}$  se denomina la primera armónica o la armónica fundamental de la  $f(x)$ ; los términos sucesivos,  $a_2 \cos \frac{4\pi x}{T} + b_2 \sin \frac{4\pi x}{T}$ ,  $a_3 \cos \frac{6\pi x}{T} + b_3 \sin \frac{6\pi x}{T}$ , ..., se denominan la segunda, tercera, ... armónica de la  $f(x)$ , respectivamente. Su cálculo constituye lo que se llama el análisis armónico de la  $f(x)$ .

Para estudiar el problema así puesto, comencemos observando que puede suponerse  $T = 2\pi$ . En efecto; para reducirse a ese caso bastará efectuar un cambio de variables, poniendo  $x = \frac{T}{2\pi} \xi$ , siendo  $\xi$  la nueva variable.

Suponiendo, entonces, que la  $f(x)$  tenga período  $2\pi$  (siendo suficiente considerarla, por ejemplo, en el intervalo  $[0, 2\pi]$ ), la (1) se escribe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (2)$$



Demostremos el siguiente teorema:

I - Si se supone que valga, para la función  $f(x)$  periódica de período  $2\pi$ , el desarrollo en serie (2) y que la serie sea uniformemente convergente en el intervalo  $[0, 2\pi]^{(*)}$ , los coeficientes  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  estarán necesariamente dados por las fórmulas

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)^{(**)} \quad (3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

De  $m$ . Fijemos un entero  $m$ , no negativo y multipliquemos ambos miembros de la (2) por  $\cos mx$ ; obtendremos

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \cos mx + b_k \operatorname{sen} kx \cos mx).$$

La serie aquí escrita resulta, como la (2) uniformemente convergente en  $[0, 2\pi]^{(***)}$  y, por lo tanto, puede ser integrada término por término (nº 4, teorema V). Se obtiene así

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos mx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx \, dx + b_k \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kx \cos mx \, dx);$$

pero como se tiene

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m = 0 \end{cases}, \quad \int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m \\ \pi & \text{si } k = m \end{cases},$$

(\*) Esto implica la continuidad de  $f(x)$  en  $(0, 2\pi) \setminus \{n\pi\}$ , teor. III y, por lo tanto, tienen sentido las integrales que figuran en las (3), (4).

(\*\*) En la (3) se pone en evidencia lo oportuno que resulta haber indicado con  $\frac{a_0}{2}$  al término constante de la serie (2); si se hubiera escrito  $a_0$ , habríamos debido indicar por separado la fórmula  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$ . Es además fácil ver que, si en lugar de considerar el

período  $2\pi$ , nos hubiéramos referido a cualquier período  $T$ , las (3), (4) deberían sustituirse por las  $a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2k\pi x}{T} \, dx$ ,  $b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen} \frac{2k\pi x}{T} \, dx$

(\*\*\*) Basta observar que  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k \cos kx \cos mx + b_k \operatorname{sen} kx \cos mx) \right| \leq$



$$y \int_0^{2\pi} \sin kx \cos mx \, dx = 0$$

la fórmula precedente se reduce a la  $\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \pi a_n$ , de donde

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Así queda probada la (3), y de modo totalmente análogo, multiplicando ambos miembros de (2) por  $\sin mx$  ( $m=1, 2, \dots$ ) e integrando se prueba la (4), que es lo que queríamos demostrar.

Es necesario observar que este teor. I no resuelve el problema de desarrollar una función periódica en una serie trigonométrica, porque, en esencia, lo supone ya resuelto, e inclusive, en condiciones más restrictivas que aquellas indicadas poco antes (ya que se admite la convergencia uniforme de la serie y, en consecuencia, como ya se observara, la continuidad de la  $f(x)$ ). Tal teorema tiene sin embargo, el mérito de fijar nuestra atención sobre los números  $a_k, b_k$ , definidos por las (3), (4) y sobre la serie trigonométrica que los tiene por coeficientes. Los citados números  $a_k, b_k$  están completamente determinados por la función  $f(x)$  y tendrían sentido también con la única hipótesis de que la  $f(x)$  sea generalmente continua y sumable en  $(0, 2\pi)$ ; tales números se denominan los coeficientes o las coordenadas de Fourier de la  $f(x)$  y la serie trigonométrica que los tiene por coeficientes se llama serie de Fourier relativa a dicha  $f(x)$ .

Podemos entonces decir: dada en el intervalo  $[-\infty, \infty]$  una función generalmente continua  $f(x)$ , periódica de período  $2\pi$ , sumable en  $[0, 2\pi]$  (y, por ende, en todo intervalo del tipo  $[x_0, x_0 + 2\pi]$ ), se llama serie de Fourier relativa a dicha  $f(x)$  a la serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5)$$

-----

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \text{ y recordar el teor. I del n}^\circ 4.$$



escrita dando a los coeficientes  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) ,  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) los valores proporcionados por las fórmulas

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad , \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (*) \quad (6)$$

Naturalmente, de todo lo que se acaba de decir no resulta que esto implique que la serie de Fourier de la  $f(x)$  converja y tenga por suma la  $f(x)$  . Más aún; en general, tal cosa no es cierta. Sin embargo, bajo condiciones bastante amplias, puede decirse que la serie de Fourier representa la función de la que proviene y resuelve, entonces, el problema del análisis armónico de dicha  $f(x)$  .-

Sin introducirnos en este estudio nos limitaremos, para comodidad del lector, a enunciar, sin demostración, un teorema que es en gran medida suficiente para las aplicaciones más comunes.

Antepongamos algunas nociones. Recordemos, primeramente, del Cap. VII, n<sup>o</sup> 3 , que si  $x_0$  es un punto singular de la  $f(x)$ , se lo considera como una discontinuidad de 1<sup>a</sup> especie cuando existen finitos los límites  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$   $\left[ \right]$  límite a la izquierda, que simbolizamos con  $f(x_0 -) \left[ \right]$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$   $\left[ \right]$  límite a la derecha, que simbolizamos con  $f(x_0 +) \left[ \right]$  , y éstos son distintos entre sí (véase fig. 62).

Recordemos además, del Cap. VIII , n<sup>o</sup> 2 que, si  $x_0$  es un punto de continuidad, se dice que en  $x_0$  la  $f(x)$  es derivable a la izquierda  $\left[ \right]$  o a la derecha  $\left[ \right]$  si existe el límite  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  [o el  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ] (ver fig. 63) ; si estos dos límites coinciden, la  $f(x)$  es derivable en el punto  $x_0$  .

Por último, si  $x_0$  es un punto de discontinuidad de 1<sup>a</sup> especie , diremos que en  $x_0$  la  $f(x)$  es derivable a la izquierda  $\left[ \right]$  o a la derecha  $\left[ \right]$  si

-----

(\*) En virtud de la periodicidad de la  $f(x)$  , estas fórmulas pueden también escribirse con las integrales extendidas a cualquier intervalo del tipo  $[x, x + 2\pi]$ ; por ejemplo, al intervalo  $[-\pi, \pi]$  .



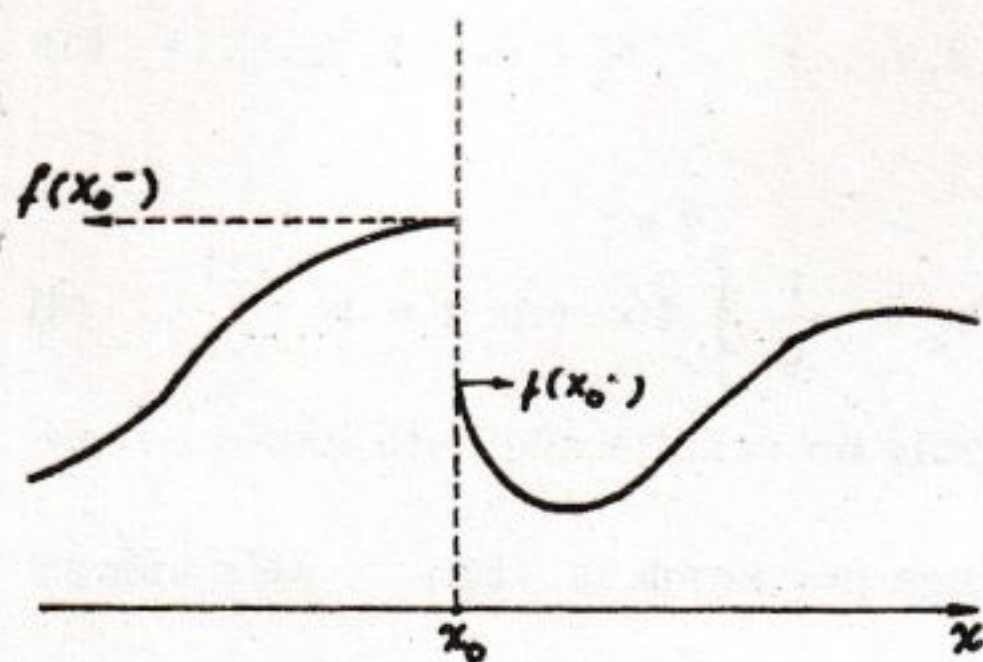


Fig. 62

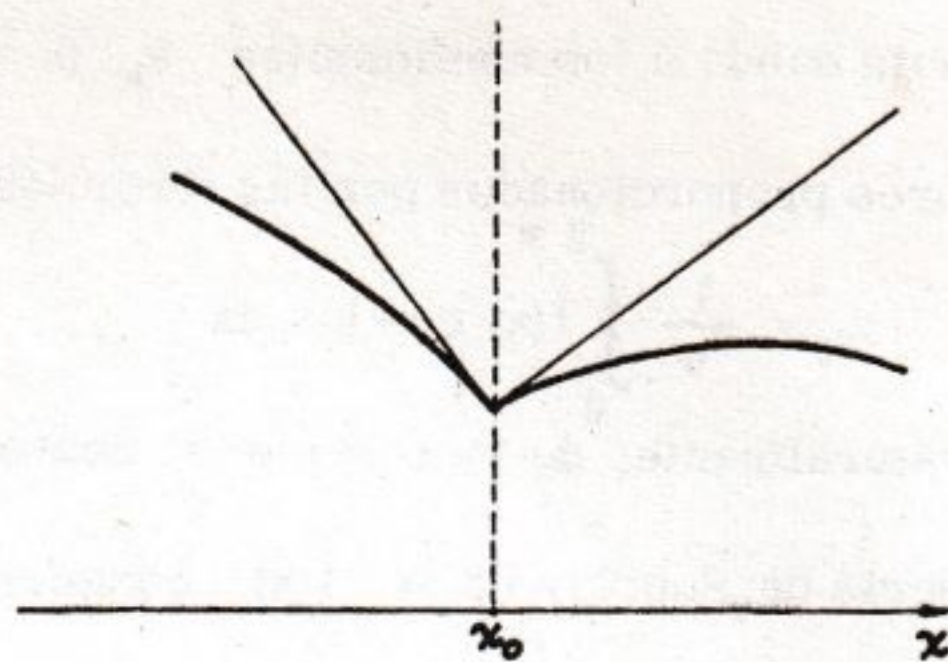


Fig. 63

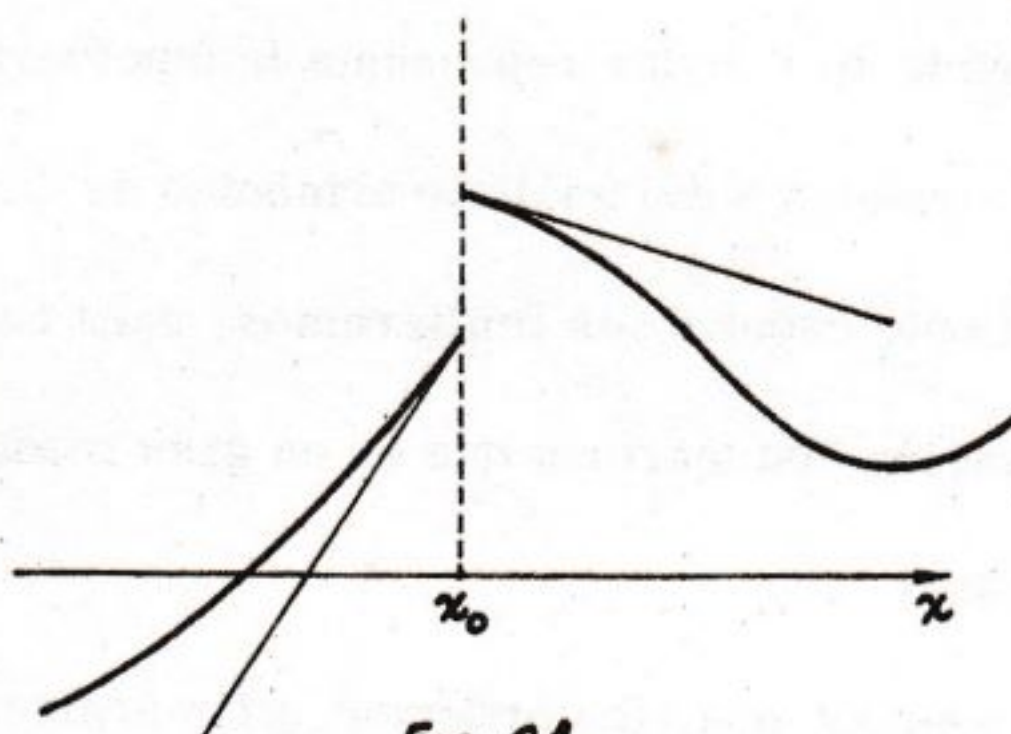


Fig. 64

existe finito el  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0}$   $\leq$  o el  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0}$  (ver fig. 64.) .

Señalado esto, enunciamos el teorema a que hicimos referencia:

II - Si la  $f(x)$ , periódica de período  $2\pi$ , es generalmente continua y sumable en  $[0, 2\pi]$ , se tiene: 1<sup>o</sup>) en todo punto  $x_0$  en el que  $f(x)$  sea continua y admita derivadas a la izquierda y a la derecha (en particular: que sea derivable), la serie de Fourier relativa a la  $f(x)$  converge y tiene por suma  $f(x_0)$ ; 2<sup>o</sup>) en todo punto  $x_0$  de discontinuidad de 1<sup>a</sup> especie en el que existan tanto la derivada a la izquierda como la derivada a la derecha de la  $f(x)$ , la serie de Fourier relativa a dicha  $f(x)$  converge y tiene por suma  $\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$



Ilustraremos este teorema con algún ejemplo; pero previamente señalemos dos notables casos particulares de series de Fourier.

Supongamos que la función  $f(x)$ , periódica de período  $2\pi$ , sea una función par es decir, tal que resulte  $f(-x) = f(x)$ , por lo que su diagrama resulta simétrico respecto del eje  $y$ . En ese caso, escribiendo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin kx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

y realizando en las integrales entre  $-\pi$  y  $0$  la sustitución  $x = -\xi$ , se ve inmediatamente que resulta

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Análogamente, si  $f(x)$  es una función impar, es decir si  $f(-x) = -f(x)$  (diagrama simétrico respecto del origen), valen las fórmulas:

$$a_k = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Podemos entonces enunciar:

III - Si la función periódica  $f(x)$  (de período  $2\pi$ ) es una función par, su serie de Fourier es una serie solamente de cosenos, que se escribe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \text{con} \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx; \quad (7)$$

si es una función impar, su serie de Fourier es una serie solamente de senos, que se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad \text{con} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (8)$$

En los dos casos particulares contemplados por este teorema basta evidentemente dar la función  $f(x)$  en el intervalo  $[0, \pi]$ , ya que una  $f(x)$  allí defini-



da puede prolongarse siempre sobre todo el eje real de modo que resulte periódica de período  $2\pi$  y, al mismo tiempo, función par o función impar. Sigue que toda función  $f(x)$ , definida en  $[0, \pi]$ , que verifique las condiciones del teor. II, puede ser desarrollada en serie trigonométrica de solamente cosenos o de solamente senos.

Consideremos, por ejemplo, la función  $y = x$  en  $[0, \pi]$  y prolonguémola de modo que resulte una función impar, periódica de período  $2\pi$  (fig. 65).

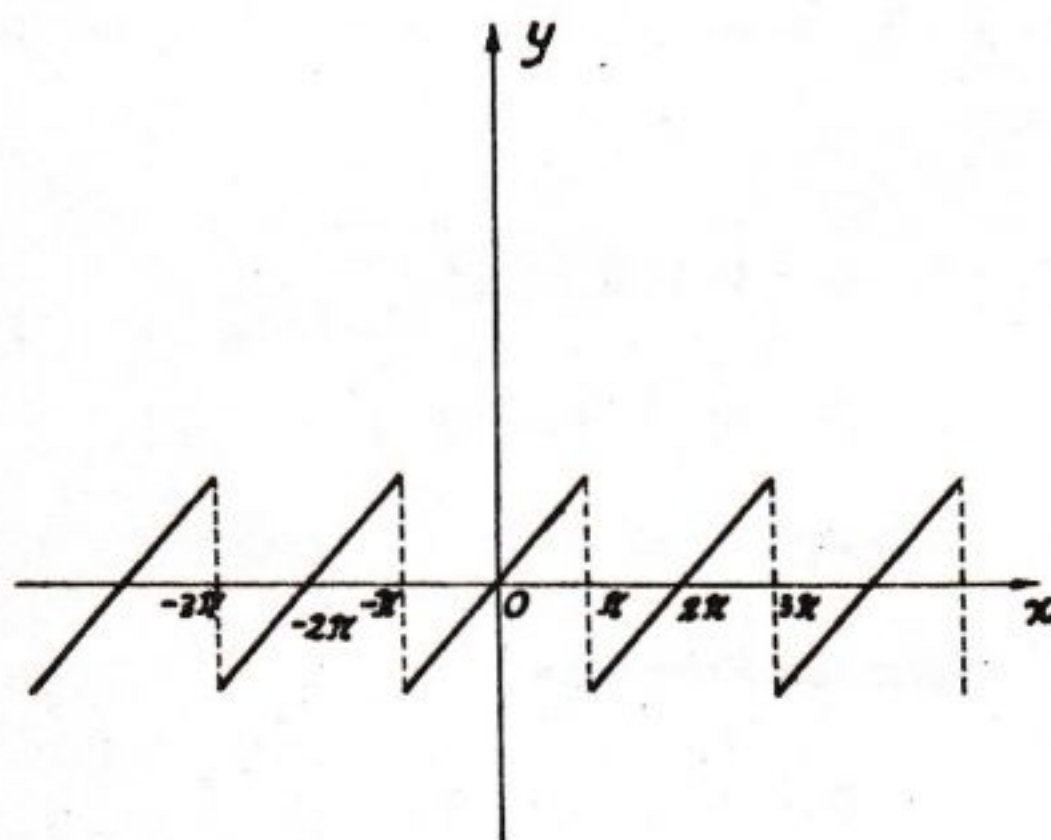


Fig. 65

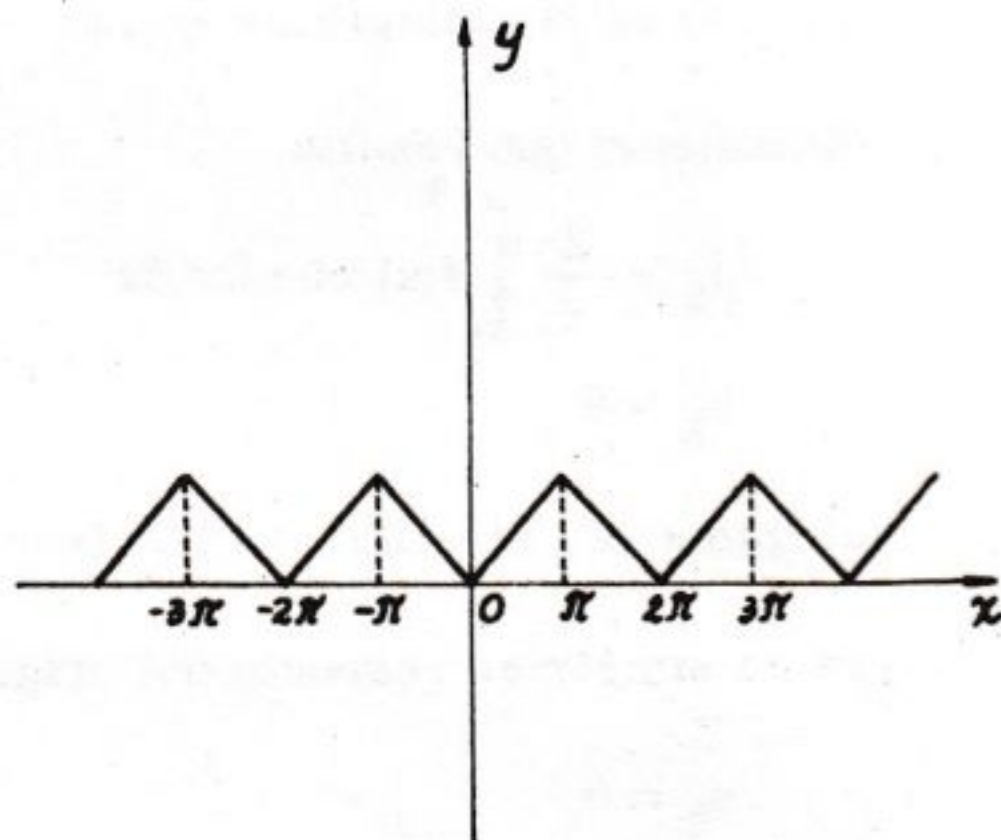


Fig. 66

La serie de Fourier de la función así obtenida es una serie sólo de senos con los coeficientes  $b_k$  proporcionados por  $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = (-1)^k \frac{2}{k}$ , por lo que tal serie se escribe

$$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots\right) \quad (9)$$

Por el teor. II la suma de esta serie en todos los puntos interiores del intervalo  $[-\pi, \pi]$  (que son, precisamente, los puntos donde la función considerada es derivable) vale  $x$ ; en los extremos  $-\pi, \pi$  (que son puntos de discontinuidad de 1ª especie, y existen las derivadas a la izquierda y a la derecha) tal suma vale cero.

Efectuemos ahora la prolongación de la  $y=x$  de modo de lograr una función par, periódica de período  $2\pi$  (fig. 66). La serie de Fourier de la función así



obtenida es una serie sólo de cosenos, con los coeficientes  $a_k$  dados por

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k = 2, 4, 6, \dots \\ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2} & \text{si } k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

por lo que tal serie se escribe

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

Por el teor. II la suma de esta serie, en todos los puntos del intervalo  $[-\pi, \pi]$

(que son todos puntos de continuidad donde existen o la derivada o las derivadas a la izquierda y a la derecha) resulta igual a  $|x|$ .

Conviene aquí indicar otro modo de escribir la serie de Fourier de una función  $f(x)$ , ya que es muy usado tanto en teoría como en las aplicaciones. Si en la serie (5) se expresan las funciones  $\cos kx$ ,  $\sin kx$  por medio de las fórmulas de Euler, surge que tal serie puede también escribirse

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \\ & = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k - i b_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + i b_k}{2} e^{-ikx} \right), \end{aligned}$$

o también

$$C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{ikx} + C_{-k} e^{-ikx}) \quad (10)$$

donde

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_k = \frac{a_k - i b_k}{2}, \quad C_{-k} = \frac{a_k + i b_k}{2} \quad (11)$$

Se conviene además en escribir la (10) bajo la siguiente forma

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} C_h e^{ihx} = \dots + C_{-2} e^{-2ix} + C_{-1} e^{-ix} + C_0 + C_1 e^{ix} + C_2 e^{2ix} + \dots, \quad (12)$$

es decir, bajo forma de serie bilátera, pero con la convención de que las sucesivas sumas parciales de esta última deben ser formadas de modo simé-



trico como lo indicamos a continuación

$$\dots + C_{-2} e^{-2ix} + C_{-1} e^{-ix} + \underbrace{C_0 + C_1}_{\text{}} e^{ix} + C_2 e^{2ix} + \dots,$$

ya que solamente con tal ley de formación se obtienen las mismas sumas parciales que las de la (10), que es, en la que en realidad pensamos cuando escribimos la (12).

Nótese además que de la (11) sigue, recordando las expresiones de  $a_k, b_k$  dadas por las (6):

$$C_{\pm k} = \frac{a_k \mp i b_k}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \mp i \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \right] = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{\mp i k x} \, dx$$

y que esta fórmula vale también para  $k=0$ . Por lo tanto cuando nos referimos a la forma (12) de la serie de Fourier de  $f(x)$ , puede decirse que los coeficientes  $C_h$  están dados por la fórmula

$$C_h = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ihx} \, dx, \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (13)$$

En conclusión: la serie de Fourier de una función puede ser escrita bajo la denominada forma exponencial  $\sum_{h=-\infty}^{+\infty} C_h e^{ihx}$ , con el significado antes aclarado y con los coeficientes  $C_h$  dados por la (13).

Hagamos por último una breve referencia a la relación existente entre las series de potencias en el campo complejo y las series trigonométricas. Dada una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (14)$$

sea  $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$  un punto en la que ella converge (y, por ende, es necesariamente  $\rho < r$ , donde  $r$  denota el radio de convergencia de la serie). Poniendo también  $a = \alpha_k + i\beta_k$ , la (14) toma la forma



$$f(z_0 + \varrho e^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k) \varrho^k e^{ik\varphi} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k (\alpha_k \cos k\varphi - \beta_k \sin k\varphi) + i \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k (\beta_k \cos k\varphi + \alpha_k \sin k\varphi).$$

Supongamos, ahora, tener fijo  $\varrho < r$ ; entonces las dos últimas series escritas son series trigonométricas que (nº 9, teor. V) convergen uniformemente al variar  $\varphi$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y tienen por suma a la parte real  $U(\varphi)$  y al coeficiente  $V(\varphi)$  de la parte imaginaria, respectivamente, de  $f(z_0 + \varrho e^{i\varphi})$ ; además, por el teor. I, dichas series son las series de Fourier de las dos funciones  $U(\varphi)$ ,  $V(\varphi)$ .

En muchos casos esta propiedad continúa valiendo si  $\varrho = r$ . Consideremos, por ejemplo, la conocida fórmula  $\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}$  que sabemos (nº 10, teor. II) válida en todos los puntos de la circunferencia  $|z|=1$  del círculo de convergencia, excluido el punto  $z = -1$ . Por lo tanto, para  $z = re^{i\varphi}$ , con  $-\pi < \varphi < \pi$  puede escribirse

$$\log(1 + e^{i\varphi}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{ik\varphi}}{k}. \quad (15)$$

Pero, como se tiene

$$|1 + e^{i\varphi}| = \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = 2 \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \arg(1 + e^{i\varphi}) = \frac{\varphi}{2}$$

será  $\log(1 + e^{i\varphi}) = \log(2 \cos \frac{\varphi}{2}) + i \frac{\varphi}{2}$ , y entonces de la (15) sigue que, para  $-\pi < \varphi < \pi$  valen las fórmulas

$$\log(2 \cos \frac{\varphi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\varphi}{k} = \frac{\cos \varphi}{1} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 3\varphi}{3} - \dots \quad (16)$$

$$\frac{\varphi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\varphi}{k} = \frac{\sin \varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \dots \quad (17)$$

La (17), ya era conocida [cfr. con la (9)] por nosotros y sabemos que el segundo miembro es, efectivamente, la serie de Fourier de la función  $\frac{\varphi}{2}$ .



También el segundo miembro de la (16) es la serie de Fourier de la función par  $\log (2 \cos \frac{\varphi}{2})$ ; para probarlo basta demostrar que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \log (2 \cos \frac{\varphi}{2}) d\varphi = 0, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \log (2 \cos \frac{\varphi}{2}) \cos k\varphi d\varphi = \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

La primera de las (18) se demuestra con el siguiente artificio debido a Euler:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \log (2 \cos \frac{\varphi}{2}) d\varphi &= \int_0^{\pi} \log \frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin \varphi d\varphi - \\ &\quad - \int_0^{\pi} \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi; \end{aligned}$$

si en la penúltima integral realizamos la sustitución  $\varphi = \pi - \psi$  y en la última la

$\varphi = 2\psi$ , se obtiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \psi d\psi - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \psi d\psi = 0.$$

La segunda de las (18) se reduce, tras una integración por partes, a la

$$\int_0^{\pi} \sin k\varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} d\varphi = (-1)^{k-1} \pi$$

que descende inmediatamente de la fórmula

$$\begin{aligned} \sin k\varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} &= (-1)^{k-1} [1 - 2 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi - 2 \cos 3\varphi + \dots + (-1)^{k-1} 2 \cos(k-1)\varphi + \\ &\quad + (-1)^k \cos k\varphi], \end{aligned}$$

que dejamos demostrar al lector, utilizando la  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ .



## CAPITULO XXVII

### Funciones Implícitas

#### 1 - LA ECUACION $f(x,y) = 0$ Y EL CONCEPTO DE FUNCION IMPLICITA.

Hasta ahora, hablando de funciones (reales)

$$y = y(x) \quad (1)$$

de una variable (real), se ha siempre supuesto que ha sido dada explícitamente la ley según la cual  $y$  depende de  $x$ . Pero esto no sucede siempre; en muchos casos lo que se da es solamente una ecuación

$$f(x, y) = 0 \quad (2)$$

que vincula entre sí las variables  $x, y$  y que no es de 1<sup>er</sup> grado respecto de la  $y$ , como la (1). Se dice, entonces, que la  $y$  es una función implícita de la variable  $x$ , o también que la (2) define implícitamente la  $y$  como función de  $x$ .

En algunos casos es fácil pasar a la forma explícita (1) resolviendo la (2) respecto de la incógnita  $y$  (por ejemplo, de la  $e^y - x^2 = 0$  sigue inmediatamente  $y = 2 \log |x|$ ); pero lo más frecuente es que tal resolución no se sepa realizar. Incluso es necesario observar que aun en los casos en que se logre resolver la (2) respecto de la  $y$ , pocas veces se obtiene una función (1) con el sentido que siempre se le ha dado a la palabra función, es decir, una función uniforme. Por ejemplo, de la ecuación  $x^2 + y^2 - 2y = 0$  queda definida la función a dos valores  $y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$ , o sea que en esencia quedan definidas las dos fun



ciones  $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$  ,  $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$  . Cuando se presentan estos casos se suele comúnmente llegar, imponiendo oportunas limitaciones a los valores de  $x$  y de  $y$  , a definir una función uniforme [así, en el ejemplo precedente, las condiciones  $-1 < x < 1$  ,  $y > 1$  nos permiten descartar la segunda función].

Todas estas consideraciones inducen a estudiar el problema de analizar bajo qué condiciones para la función  $f$  y bajo qué limitaciones para  $x$  y para  $y$  , la ecuación (2) es capaz de definir, en cierto conjunto  $E$  de puntos del eje  $x$  , una función uniforme  $y = y(x)$ .

Es evidente entretanto que, para que la ecuación (2) pueda definir funciones del tipo (1) , es necesario que tal ecuación sea compatible<sup>(\*)</sup>, vale decir que, en el plano  $xy$  exista por lo menos un punto  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$  cuyas coordenadas verifican la (2) o, como también se dice, que exista por lo menos un punto solución de la (2) .

Observemos además que si, bajo ciertas condiciones, la ecuación (2) define efectivamente, en un cierto conjunto  $E$  del eje  $x$  , una función como la (1) ésta será tal de lograr que subsista en  $E$  la identidad

$$f[x, y(x)] \equiv 0 \quad (3)$$

Señalado esto, supongamos que la función  $f(x, y)$  que figura en el primer miembro de la ecuación (2) esté definida en un determinado campo (conjunto abierto)  $A$  del plano  $xy$  . Fijado en  $A$  un punto solución  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$  de la ecuación (2) , indiquemos con  $R$  un intervalo, del plano  $xy$  , que contenga  $\bar{P}$  en su interior y esté totalmente contenido en el campo  $A$  . Tal intervalo estará definido por acotaciones del tipo

$$\bar{x} - h \leq x \leq \bar{x} + k \quad , \quad \bar{y} - m \leq y \leq \bar{y} + n \quad (4)$$

(\*) Por ejemplo, la ecuación  $e^{x+y} = 0$  es incompatible, porque no existe ningún par de valores  $x, y$  que la satisfaga.



donde  $h, k, m, n$  designan números positivos. Es de notar que, una vez fijado  $R$  en el plano  $xy$ , quedan determinados los intervalos lineales que son proyecciones de  $R$  sobre los dos ejes coordenados, es decir, el intervalo  $R_x \equiv [\bar{x} - h, \bar{x} + k]$  del eje  $x$  y el intervalo  $R_y \equiv [\bar{y} - m, \bar{y} + n]$  del eje  $y$ .

Se dirá que la ecuación (2) admite solución única (ó también que es unívocamente resoluble) respecto de la  $y$ , en un entorno de su punto solución  $\bar{P}$  (fijado), si es posible encontrar un intervalo  $R$  del tipo antedicho tal que, para todo punto  $x \in R_x$ , exista uno y solamente un punto  $y \in R_y$  que, junto a  $x$ , proporcione una solución  $(x, y)$  de la ecuación (2).

Si esto sucede, resulta claro que el valor  $y \in R_y$  que corresponde unívocamente al valor  $x \in R_x$ , no es sino una bien determinada función (uniforme), definida en  $R_x$ , de la variable  $x$ . Nace así en  $R_x$  una función  $y = y(x)$  que verifica la (3), es decir, que está definida implícitamente por la ecuación (2). Tal función es evidentemente tal de resultar

$$y(\bar{x}) = \bar{y} \quad (5)$$

También puede decirse que, si nos limitamos a considerar la ecuación  $f(x, y) = 0$  en los puntos  $(x, y) \in R$ , la misma resulta equivalente a la  $y = y(x)$ .

Queda por lo tanto establecido que la ecuación (2) permite definir implícitamente  $y$  en función de  $x$  toda vez que, fijado un punto solución  $\bar{P}$  se reconoce que la (2) es unívocamente resoluble en un entorno de  $\bar{P}$ .

Es precisamente estudiando la resolubilidad unívoca de la (2) en los entornos de un punto solución (o, como también se dice, la resolubilidad en pequeño o local) que resulta mucho más simple el problema que nos hemos propuesto.

Vale, en efecto, el siguiente fundamental teorema de Dini:



I - Considerada la ecuación  $f(x, y) = 0$  en la incógnita  $y$ , supongamos que la función  $f(x, y)$  sea continua junto con sus derivadas parciales primeras en cierto campo  $A$  del plano  $xy$ . Supongamos además que, fijado en  $A$  un punto solución  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ , resulta en dicho punto distinta de cero la derivada parcial de  $f(x, y)$  respecto de la incógnita  $y$ :

$$f_y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0.$$

En estas hipótesis la ecuación  $f(x, y) = 0$  resulta unívocamente resoluble, con respecto a  $y$ , en un entorno del punto  $\bar{P}$  y puede fijarse tal entorno  $R$  de modo que en todos sus puntos  $(x, y)$  resulte  $f_y(x, y) \neq 0$ . La función  $y = y(x)$  que de tal modo resulta definida en el entorno  $R_x$  del punto  $\bar{x}$ , será continua, junto con su derivada primera, en dicho entorno.

Dem. Fijado el punto solución  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$  se tiene, por hipótesis,  $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ ,  $f_y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ ; supongamos, por ejemplo, que sea  $f_y(\bar{x}, \bar{y}) > 0$ .

Como la  $f_y$  es continua en el campo  $A$ , por el teorema de la permanencia del signo podemos construir un intervalo  $R' (\bar{x} - h' \leq x \leq \bar{x} + h', \bar{y} - k \leq y \leq \bar{y} + k)$  de centro  $\bar{P}$ , contenido en  $A$  y tal que en todos los puntos del mismo sea todavía  $f_y(x, y) > 0$ .

Considerando entonces la función  $f(\bar{x}, y)$ , [solamente de la variable  $y$ ] ésta resultará creciente en el intervalo  $[\bar{y} - k, \bar{y} + k]$  y (como se anula para  $y = \bar{y}$ ) negativa para  $y = \bar{y} - k$ , positiva para  $y = \bar{y} + k$ . Es decir, con las notaciones de fig. 67, se tendrá  $f(P_1) < 0$ ,  $f(P_2) > 0$ .

Como la  $f$  es continua en  $R'$ , aplicando nuevamente el teorema de la permanencia del signo, podremos determinar un número  $h$ , positivo y no superior



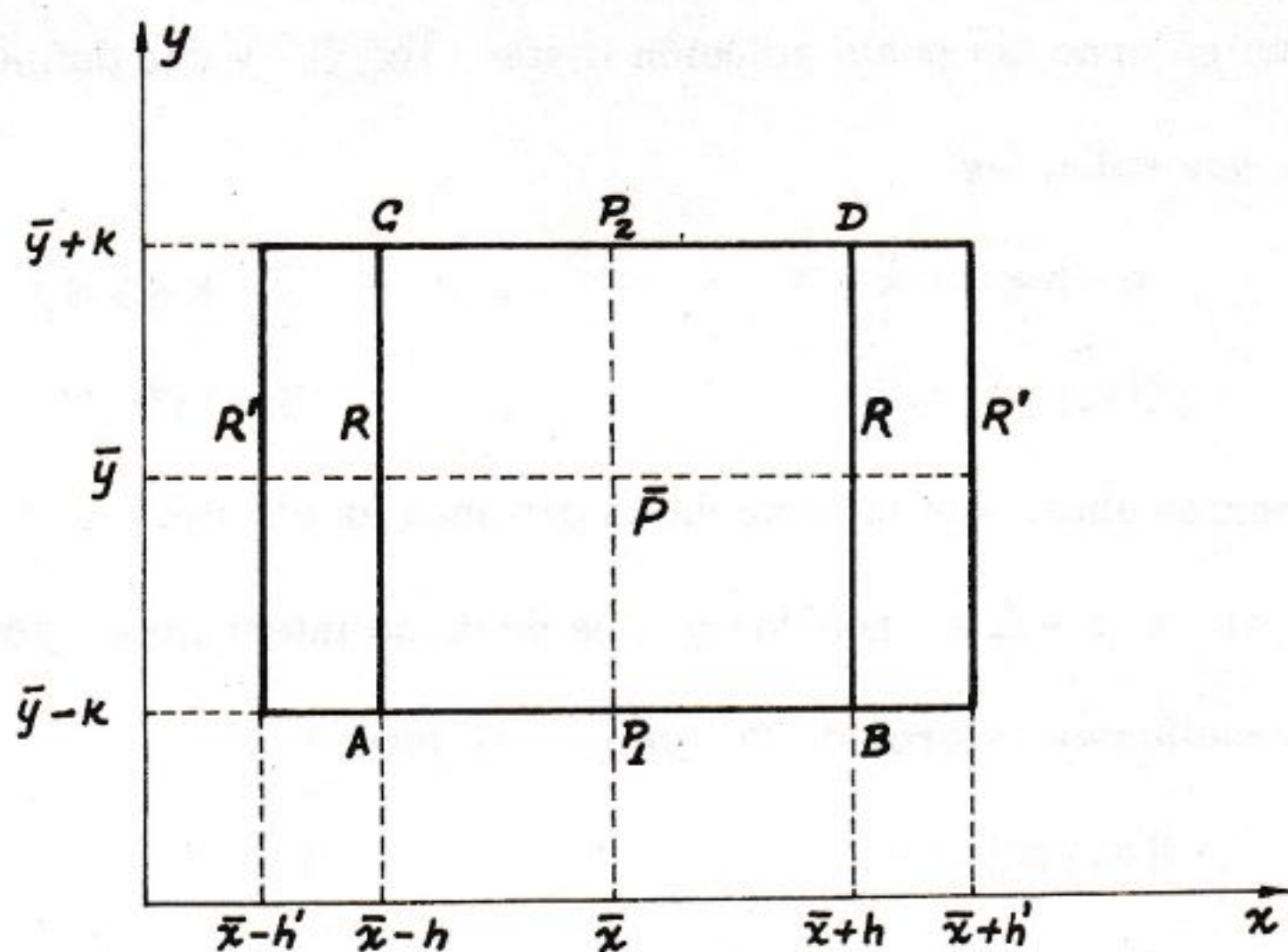


Fig. 67

a  $h'$  tal que, llamando con  $R$  al intervalo  $(\bar{x} - h \leq x \leq \bar{x} + h, \bar{y} - k \leq y \leq \bar{y} + k)$  que está contenido en  $R'$  (véase fig. 67), se tendrá en todos los puntos del lado inferior  $AB$  de  $R$ ,  $f < 0$  y, en cambio, será  $f > 0$  en todos los puntos del lado superior  $CD$ .

Fijando ahora cualquier punto  $X$  del intervalo  $[\bar{x} - h, \bar{x} + h]$ , la  $f(X, y)$  viene a ser una función de  $y$  que en el intervalo  $[y - k, y + k]$  es creciente [pues  $f_y(x, y) > 0$ ] y asume un valor negativo para  $y = \bar{y} - k$  y un valor positivo para  $y = \bar{y} + k$ .

Sigue que, en dicho intervalo, la  $f(X, y)$  se anula para un y solamente un valor  $Y$  de  $y$ .

Hemos logrado entonces construir un intervalo  $R$  [en el que se tiene  $f_y(x, y) > 0$ ] tal que, para todo punto  $X$  de su proyección  $[\bar{x} - h, \bar{x} + h]$  sobre el eje  $x$  existe un y solamente un punto  $Y$  de la proyección  $[\bar{y} - k, \bar{y} + k]$  sobre el eje  $y$  que, junto a  $X$ , proporciona una solución  $(X, Y)$  de la ecuación



$f(x, y) = 0$  . Queda así probado que ésta es unívocamente resoluble con respecto a  $y$  en un entorno del punto solución fijado  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$  y que define una función  $y = y(x)$  para la que valen las

$$\begin{aligned} \bar{x} - h \leq x \leq \bar{x} + h & , & \bar{y} - k \leq y \leq \bar{y} + k & , \\ f[x, y(x)] = 0 & , & \bar{y} = y(\bar{x}) & . \end{aligned}$$

Probemos ahora que tal función es continua en el intervalo  $[\bar{x} - h, \bar{x} + h]$  . En efecto; si  $x, x + \Delta x$  son dos puntos de dicho intervalo e  $y(x), y(x) + \Delta y$  los correspondientes valores de la  $y(x)$  , se tendrá

$$f[x, y(x)] = 0 , \quad f[x + \Delta x, y(x) + \Delta y] = 0 ;$$

por otra parte, aplicando el teorema de Lagrange relativo a funciones de dos variables [véase la (8) del Cap. XVI, N° 7], puede escribirse

$$f[x + \Delta x, y(x) + \Delta y] - f(x, y) = f_x(\xi, \eta) \Delta x + f_y(\xi, \eta) \Delta y,$$

con  $(\xi, \eta)$  punto interior del segmento que une los dos puntos  $[x, y(x)]$  ,  $[x + \Delta x, y(x) + \Delta y]$  . De todo lo dicho sigue

$$f_x(\xi, \eta) \Delta x + f_y(\xi, \eta) \Delta y = 0,$$

de donde, siendo  $f_y(\xi, \eta) > 0$  [puesto que  $(\xi, \eta)$  es punto de  $R$ ]:

$$\Delta y = -\frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)} \Delta x . \quad (7)$$

En  $R$  , por hipótesis,  $f(x)$  es continua y  $f(y)$  continua y positiva; existen entonces, dos constantes positivas  $a, b$  tales que resulta, para todo punto de  $R$ .

$$|f_x| \leq a , \quad f_y \geq b .$$

De la (7) sigue, por lo tanto,

$$|\Delta y| \leq \frac{a}{b} |\Delta x|,$$

por lo que  $\Delta y$  es un infinitésimo para  $\Delta x \rightarrow 0$  , probándose de este modo la continuidad de la  $y(x)$ .

Probemos, por último, que la  $y(x)$  admite derivada en  $[\bar{x} - h, \bar{x} + h]$  y que esta derivada resulta continua.



De la (7) obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)}; \quad (8)$$

además, por la demostración anterior se sabe que para  $\Delta x \rightarrow 0$  se tiene  $\Delta y \rightarrow 0$  y, por lo tanto,  $\xi \rightarrow x$ ,  $\eta \rightarrow y(x)$ . Por la continuidad de las  $f_x$ ,  $f_y$  y el carácter positivo de la  $f_y$  en  $R$ , sigue de la (8) que existe el límite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

que valdrá

$$- \frac{f_x[x, y(x)]}{f_y[x, y(x)]}. \quad (9)$$

Esta es una función de  $x$  continua en el intervalo  $[x-h, x+h]$  y de ahí que quede completamente probada la tesis.

Con las hipótesis del teorema recién demostrado, no sólo queda asegurada la existencia de la función  $y = y(x)$  definida implícitamente por la ecuación  $f(x, y) = 0$  bajo la condición  $y(\bar{x}) = \bar{y}$  sino que también se afirma que tal función es derivable, con derivada continua, y que se tiene  $\int$  véase la (9)  $\int$ :

$$y'(x) = - \frac{f_x[x, y(x)]}{f_y[x, y(x)]}. \quad (10)$$

Si se supiera a priori que la  $y'(x)$  existe y es continua, la (10) podría haberse obtenido con el siguiente razonamiento. Como se tiene  $f[x, y(x)] \equiv 0$  será  $\frac{d}{dx} f[x, y(x)] \equiv 0$ ; calculando esta derivada con la regla de derivación de las funciones compuestas se obtiene

$$f_x[x, y(x)] + f_y[x, y(x)] \cdot y'(x) \equiv 0; \quad (11)$$

entonces, si se resuelve respecto de  $y'(x)$ , se obtendrá la (10).

También de la (10) se ve que, si la  $f(x)$  admite derivadas segundas continuas, existirá seguramente la  $y''(x)$  continua. Para su cálculo es mejor partir de la (11) que, derivada respecto de la  $x$  proporciona la

$$\left\{ f_{xx}[x, y(x)] + f_{xy}[x, y(x)] \cdot y'(x) \right\} + \left\{ f_{yx}[x, y(x)] + f_{yy}[x, y(x)] \cdot y'(x) \right\} y'(x) + f_y[x, y(x)] \cdot y''(x) \equiv 0$$

o sea,



$$f_{xx}[x, y(x)] + 2f_{xy}[x, y(x)] y'(x) + f_{yy}[x, y(x)] y'^2(x) + f_y[x, y(x)] y''(x) \equiv 0 ;$$

de aquí, dado que la  $y'(x)$  ya es conocida por la (10), se puede obtener la  $y''(x)$ .

Y así puede proseguirse para el cálculo de las derivadas sucesivas, bajo la hipótesis que la  $f$  admita derivadas parciales continuas hasta un cierto orden.

## 2 - EXTENSION AL CASO DE LA ECUACION $f(x_1, x_2, \dots, x_r, y) = 0$ .

Las consideraciones precedentes relativas a la ecuación  $f(x, y) = 0$  pueden fácilmente extenderse al caso de la ecuación

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r, y) = 0 \quad (1)$$

con el objeto de establecer si ésta define implícitamente a la  $y$  como función de las  $r$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_r$ .

Suponiendo que la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_r, y)$  esté definida en un campo  $A$  del espacio  $S_{r+1}$ , y fijado en  $A$  un punto solución  $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r, \bar{y})$ , indiquemos con  $R$  un intervalo de  $S_{r+1}$  que contenga  $\bar{P}$  en su interior y esté contenido en  $A$ , con  $R_x$  al intervalo de  $r$  dimensiones que es proyección de  $R$  sobre el espacio  $S_r$  de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_r$  y con  $R_y$  al intervalo de una dimensión que es proyección de  $R$  sobre el eje  $y$ .

Diremos que la (1) es unívocamente resoluble, respecto de la  $y$ , en un entorno de su punto solución  $\bar{P}$ , si es posible encontrar un intervalo  $R$  del tipo antedicho tal que, para todo punto  $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in R_x$  exista un y solamente un punto  $y \in R_y$  que, junto a  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  proporcione una solución  $(x_1, x_2, \dots, x_r, y)$  de la ecuación (1).

En este caso el teorema de Dini se enuncia:

I - Considerada la ecuación (1) en la incógnita  $y$ , supongamos que la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_r, y)$  sea continua



junto con sus derivadas parciales primeras, en un cierto campo  $A$  del espacio  $S_{r+1}$ . Supongamos, además, que fijado en  $A$  un punto solución  $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r, \bar{y})$ , resulta en este punto distinta de cero la derivada parcial de  $f(x_1, x_2, \dots, x_r, y)$  respecto de la incógnita  $y$ :

$$f_y(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r, \bar{y}) \neq 0. \quad (2)$$

Bajo esta hipótesis la (1) resultará unívocamente resoluble respecto de la  $y$  en un entorno de su punto  $\bar{P}$  y se puede fijar tal entorno  $R$  de modo que en todos sus puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_r, y)$  resulte  $f_y(x_1, x_2, \dots, x_r, y) \neq 0$ .

Además, la función  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_r)$ , que de tal modo queda definida en el entorno  $R_x$  del punto  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$ , resulta continua, junto con sus derivadas parciales de 1<sup>er</sup> orden, en dicho entorno.

Omitiremos la demostración que es análoga a la del teorema I del n<sup>o</sup> precedente. Observemos que, llamando con  $x_i$  a una cualquiera de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , el cálculo de la derivada parcial  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ , de la que el teorema precedente asegura la existencia y continuidad en  $R_x$ , puede efectuarse con el mismo procedimiento indicado al final del n<sup>o</sup> precedente. Precisamente, de la identidad

$$f[x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r)] \equiv 0$$

sigue

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f[x_1, x_2, \dots, x_r, y(x_1, x_2, \dots, x_r)] \equiv 0$$

y, por lo tanto, aplicando la regla de derivación de las funciones compuestas

$$f_{x_i}[x_1, x_2, \dots, x_r, y(x_1, x_2, \dots, x_r)] + f_y[x_1, x_2, \dots, x_r, y(x_1, x_2, \dots, x_r)] \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$







$(x_1, x_2, \dots, x_r)$ , un grupo de  $p$  funciones uniformes como las (1).

Estudiaremos ahora detalladamente el caso particular  $r = 1$ ,  $p = 2$ , es decir el caso de un sistema del tipo

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

en las dos funciones incógnitas  $y, z$  de la variable  $x$ . Sucesivamente haremos mención del caso general (2).

Supongamos que las funciones  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  que figuran en los primeros miembros de las ecuaciones (3) estén definidas en un campo determinado  $A$  del espacio  $xyz$ . Fijado en  $A$  un punto solución  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  del sistema (3) [es decir, un punto tal de tenerse  $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$ ,  $g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$ ], indiquemos con  $R$  un intervalo, del espacio  $xyz$ , que contenga  $\bar{P}$  en su interior y esté contenido en el campo  $A$ ; indiquemos, además, con  $R_x$  y  $R_{yz}$  las proyecciones de  $R$  sobre el eje  $x$  y el plano  $yz$ , respectivamente.

Diremos que el sistema (3) es unívocamente resoluble respecto de  $y$  y  $z$ , en un entorno de su punto solución  $\bar{P}$  fijado, si es posible encontrar un intervalo  $R$  del citado tipo tal que, para todo punto  $x \in R_x$  exista un y solamente un punto  $(y, z) \in R_{yz}$  que, junto con  $x$ , proporcione una solución  $(x, y, z)$  del sistema (3).

En este caso el teorema de Dini tiene el siguiente enunciado:

I - Considerado el sistema (3) en las incógnitas  $y, z$ , supongamos que las funciones  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  sean continuas junto con sus derivadas parciales primeras, en cierto campo  $A$  del espacio  $xyz$ . Supongamos además que, fijado en  $A$  un punto solución  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , en tal punto resulte distinto de



cero el jacobiano (\*)  $J(x, y, z)$  de las dos funciones  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  con respecto a las dos incógnitas  $y, z$ :

$$J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{vmatrix} f_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & f_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ g_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & g_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

Demostremos que, bajo estas hipótesis, el sistema (3) es unívocamente resoluble respecto de las  $y$  y  $z$  en un entorno del punto  $\bar{P}$ , y que se puede fijar tal entorno  $R$  de modo que en todo punto del mismo resulte  $J(x, y, z) \neq 0$ .

Las funciones  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  que de tal modo quedan definidas en el entorno  $R_x$  del punto  $\bar{x}$ , resultarán continuas en  $R_x$  junto con sus derivadas primeras.

Dem. De la hipótesis (4) sigue que las cuatro derivadas parciales  $f_y, f_z, g_y, g_z$  no pueden ser simultáneamente nulas en el punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ; supongamos, por ejemplo, que sea  $g_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$ . Entonces, por el teor. I del n° precedente, la ecuación  $g(x, y, z) = 0$  es unívocamente resoluble respecto de  $z$  en un entorno de  $\bar{P}$ : Existe, por lo tanto, en el espacio  $xyz$ , un intervalo  $R^*$  (contenido en  $A$ , que contiene a  $\bar{P}$  como punto interior y en el que siempre es  $g_z \neq 0$ ) tal que, llamando con  $R^*_{xy}$  su proyección sobre el plano  $xy$  y  $R_z$  la proyección sobre el eje  $z$ , a todo punto  $(x, y) \in R^*_{xy}$  le corresponde un y solamente un punto  $z \in R_z$  que, junto con  $(x, y)$ , proporciona una solución de la ecuación  $g(x, y, z) = 0$ . Queda así definida en  $R^*_{xy}$  una función  $z = z(x, y)$  y si nos limitamos a considerar el sistema (3) para los puntos  $(x, y, z) \in R^*$ , podemos sustituir la segunda ecuación  $g(x, y, z) = 0$  por la ecuación equivalente  $z = z(x, y)$  y considerar, por lo tanto, el sistema (3) bajo la forma

-----

(\*) Para la definición de Jacobiano véase el Cap. XXII, n° 9.



$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ z = z(x, y) \end{cases} \quad \text{con } (x, y, z) \in R^*$$

o, mejor aún, bajo esta otra

$$\begin{cases} f[x, y, z(x, y)] = 0 \\ z = z(x, y) \end{cases} \quad \text{con } (x, y, z) \in R^* \quad (5)$$

Podemos también suponer, restringiendo eventualmente el intervalo  $R^*$ , que en todo punto de  $R^*$  resulte

$$J(x, y, z) \neq 0 \quad (6)$$

Si tenemos presente que  $z = z(x, y)$  es la función definida implícitamente, en el entorno  $R^*$  del punto solución  $\bar{P}$ , por la ecuación  $g(x, y, z) = 0$ , podremos asegurar (teor. I del n° precedente) que la  $z(x, y)$  es continua en  $R^*_{xy}$  junto con sus derivadas parciales  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  y que se tiene

$$z(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{g_y[x, y, z(x, y)]}{g_z[x, y, z(x, y)]} \quad (8)$$

Poniendo

$$f[x, y, z(x, y)] = \varphi(x, y) \quad (9)$$

el sistema (5) toma la forma

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = z(x, y) \end{cases} \quad \text{con } (x, y, z) \in R^*, \quad (10)$$

donde, por las hipótesis del teorema y por las observaciones hechas sobre la función  $z = z(x, y)$ , la  $\varphi(x, y)$  es continua, junto con  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  en  $R^*_{xy}$ .

Observemos que, debido a la (9) se tiene

$$\varphi_y = f_y + f_z \frac{\partial z}{\partial y}$$

y entonces, por la (8),

$$\varphi_y = f_y - f_z \frac{g_y}{g_z} = \frac{1}{g_z} \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} = \frac{J}{g_z}, \quad (11)$$



quedando sobreentendido que en cada una de las funciones escritas los argumentos son  $x, y, z(x, y)$ .

Sigue, recordando la (6), que para todo punto de  $R^*$  (y en particular en el punto  $\bar{P}$ ) se tiene  $\varphi_y \neq 0$ . Por lo tanto, por el teor. I del n° 1, la ecuación  $\varphi(x, y) = 0$  es unívocamente resoluble respecto de  $y$  en un entorno del punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Es decir, existe en el plano  $xy$ , un entorno  $R_{xy}$  [contenido en  $R^*_{xy}$  que contiene a  $(\bar{x}, \bar{y})$  como punto interior y en el que  $\varphi_y \neq 0$ ] tal que, llamando  $R_x$  y  $R_y$  a sus proyecciones sobre los ejes  $x$  e  $y$ , sabremos que para todo punto  $x \in R_x$  corresponderá un y solamente un punto  $y \in R_y$  que, junto a  $x$ , proporciona un punto  $(x, y)$  solución de  $\varphi(x, y) = 0$ . Queda así definida en  $R_x$  una función  $y = y(x)$  tal que se tendrá  $\varphi[x, y(x)] = 0$ ,  $y(\bar{x}) = \bar{y}$ ,  $y(x) \in R_y$  siendo dicha función, junto con su derivada  $y'(x)$ , continua en  $R_x$ .

Designando con  $R \subseteq R^*$  al intervalo del espacio  $xyz$  cuyas proyecciones sobre los tres ejes son  $R_x, R_y, R_z$ , podemos decir que, para  $(x, y, z) \in R$  se tiene  $J(x, y, z) \neq 0$  y que el sistema (10) equivale a este otro

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x, y) \end{cases} \quad \text{con } (x, y, z) \in R,$$

el que a su vez equivale al

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z[x, y(x)] \end{cases} \quad \text{con } (x, y, z) \in R.$$

Indicando simplemente con  $z(x)$  a la función compuesta  $z[x, y(x)]$ , es obvio que constituye una función continua, junto con su derivada  $z'(x)$ , en  $R_x$ .

Podemos concluir, entonces, que para  $(x, y, z) \in R$  nuestro sistema (3) equivale al sistema  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ , donde estas dos funciones son continuas en  $R_x$ , con derivadas primeras continuas. Con esto el teorema queda demostrado.



Agreguemos que para el cálculo de las derivadas  $y'(x)$ ,  $z'(x)$  se puede usar un procedimiento análogo al indicado en los n<sup>os</sup> 1 y 2. Partiendo [admitida la existencia de  $y(x)$ ,  $z(x)$ ] de las dos identidades

$$f[x, y(x), z(x)] \equiv 0, \quad g[x, y(x), z(x)] \equiv 0,$$

se deduce

$$\frac{d}{dx} f[x, y(x), z(x)] \equiv 0, \quad \frac{d}{dx} g[x, y(x), z(x)] \equiv 0,$$

o sea, por el teorema de derivación de las funciones compuestas,

$$\begin{cases} f_x[x, y(x), z(x)] + f_y[x, y(x), z(x)] y'(x) + f_z[x, y(x), z(x)] z'(x) \equiv 0 \\ g_x[x, y(x), z(x)] + g_y[x, y(x), z(x)] y'(x) + g_z[x, y(x), z(x)] z'(x) \equiv 0 \end{cases} \quad (12)$$

Se tienen así dos ecuaciones lineales, en las dos incógnitas  $y'(x)$ ,  $z'(x)$ , con el determinante de los coeficientes  $J[x, y(x), z(x)] \neq 0$ . Resolviendo con la regla de Cramer se obtiene

$$y'(x) = \frac{\begin{vmatrix} -f_x & f_z \\ -g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}}, \quad z'(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_y & -f_x \\ g_y & -g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}}. \quad (13)$$

Si para el Jacobiano de  $n$  funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  respecto de ciertas variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

se adopta la notación

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (14)$$

las (13) pueden escribirse del siguiente modo



$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial (f,g)}{\partial (x,z)}}{\frac{\partial (f,g)}{\partial (y,z)}}, \quad z'(x) = - \frac{\frac{\partial (f,g)}{\partial (y,x)}}{\frac{\partial (f,g)}{\partial (y,z)}}. \quad (13')$$

Si las funciones  $f, g$  admiten derivadas parciales segundas, terceras, ... continuas, derivando sucesivamente las (12) con respecto a  $x$  se obtendrán sistemas de dos ecuaciones lineales de los que se podrán calcular  $y''(x)$  y  $z''(x)$ ,  $y'''(x)$  y  $z'''(x)$ , ... .

Examinemos ahora el caso general del sistema (2). A las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_p$  que figuran en los primeros miembros de las ecuaciones (2) las supondremos definidas en un determinado campo  $A$  del espacio  $S_{r+p}$  de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, \dots, y_p$ . Fijado en  $A$  un punto solución  $\bar{P}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p)$  del sistema (2), indiquemos con  $R$  un intervalo del citado espacio  $S_{r+p}$  que contenga  $\bar{P}$  como punto interior y que esté contenido en el campo  $A$ ; indiquemos, además, con  $R_{x_1 \dots x_r}$  y  $R_{y_1 \dots y_p}$  a las proyecciones de  $R$  sobre el espacio  $S_r$  de las  $x_1, \dots, x_r$  y sobre el espacio  $S_p$  de las  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , respectivamente.

Diremos que el sistema (2) es unívocamente resoluble, respecto de  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , en un entorno del punto solución  $\bar{P}$  fijado, si es posible encontrar un intervalo  $R$  del tipo antedicho tal que para todo punto  $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in R_{x_1, x_2, \dots, x_r}$  exista un y solamente un punto  $(y_1, y_2, \dots, y_p) \in R_{y_1, y_2, \dots, y_p}$  que, junto a  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ , proporcione una solución  $(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_p)$  del sistema (2).

En este caso general, el teorema de Dini tiene el siguiente enunciado (que comprende a los tres teoremas dados precedentemente) (\*):

-----

(\*) Nótese que en los dos teoremas dados en los n<sup>os</sup> 1, 2 se tiene  $p = 1$ ; por lo tanto, el



II - Considerando el sistema (2) con las incógnitas  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , supongamos que las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_p$  sean, junto con sus derivadas parciales primeras, continuas en cierto campo  $A$  del espacio  $S_{r+p}$ . Supongamos, además, que fijado en  $A$  un punto solución  $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_p)$  resulte, en dicho punto, distinto de cero el jacobiano  $J(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_p)$  de las  $p$  funciones  $f_1, f_2, \dots, f_p$  respecto de las  $p$  incógnitas  $y_1, y_2, \dots, y_p$ :

$$J(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_p) = \begin{vmatrix} f_{1y_1}(\bar{P}) & f_{1y_2}(\bar{P}) & \dots & f_{1y_p}(\bar{P}) \\ f_{2y_1}(\bar{P}) & f_{2y_2}(\bar{P}) & \dots & f_{2y_p}(\bar{P}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{py_1}(\bar{P}) & f_{py_2}(\bar{P}) & \dots & f_{py_p}(\bar{P}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bajo estas hipótesis el sistema (2) será unívocamente resoluble respecto de  $y_1, y_2, \dots, y_p$  en un entorno del punto  $\bar{P}$  y puede fijarse tal entorno  $R$  de modo que en todos sus puntos resulte  $J(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_p) \neq 0$ . Las  $p$  funciones  $y_i = y_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$ , ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) que de tal modo quedan definidas en el entorno  $R_{x_1, x_2, \dots, x_r}$  del punto  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$  resultarán continuas junto con sus derivadas parciales primeras, en dicho  $R_{x_1, x_2, \dots, x_r}$ .

No expondremos en detalle la demostración de este teorema. Nos limitaremos a decir que, siendo ya conocido el teorema para el caso  $p = 1$  ( $n^o 2$ , teor. I) tal demostración puede desarrollarse por el método de inducción, vale decir, admitien-

-----

jacobiano de que se habla en el actual enunciado se reduce a un determinante de orden 1, es decir, a la derivada parcial  $f_y$  que, precisamente, figura en tales teoremas.



do como cierto el teorema para los sistemas de  $p-1$  ecuaciones y probando que, como consecuencia de tal admisión, será también cierto para los de  $p$  ecuaciones. El razonamiento al que se recurre es análogo al ya realizado en la demostración del teor. I, en la que hemos pasado del caso  $p=1$  al caso  $p=2$ .

Como en los casos particulares antes analizados, podemos dar las fórmulas para el cálculo de las derivadas parciales de las funciones (1) definidas implícitamente por el sistema (2). Basta partir de las  $p$  identidades

$$f_i[x_1, x_2, \dots, x_r, y_1(x_1, \dots, x_r), \dots, y_p(x_1, x_2, \dots, x_r)] \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (15)$$

y observar que, designando con  $x_k$  a una cualquiera de las variables  $x_1, \dots, x_r$ , sigue de la (15)

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f_i[x_1, \dots, x_k, \dots, x_r, y_1(x_1, \dots, x_k, \dots, x_r), \dots, y_p(x_1, \dots, x_k, \dots, x_r)] \equiv 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Expresando la derivada recién indicada, con el teorema de derivación de las funciones compuestas, se obtienen las

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial x_k} \equiv 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (16)$$

que constituyen un sistema de  $p$  ecuaciones lineales en las  $p$  incógnitas  $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial y_p}{\partial x_k}$  cuyo determinante de los coeficientes es igual al jacobiano  $J \neq 0$ .

Resolviendo tal sistema con la regla de Cramer se encuentra, por ejemplo,

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_k} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_k} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial f_p}{\partial x_k} & \frac{\partial f_p}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \frac{\partial f_p}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{vmatrix}},$$

o también, adoptando para los jacobianos la notación (14)

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (x_k, y_2, \dots, y_p)}}{\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_p)}}$$



Análogamente para las otras derivadas  $\frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial y_p}{\partial x_k}$ , de modo que, en definitiva, se tienen las siguientes fórmulas de derivación de las funciones (1) definidas implícitamente por el sistema (2) :

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (x_k, y_2, \dots, y_p)}}{\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_p)}}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (y_1, x_k, \dots, y_p)}}{\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_p)}}, \dots,$$

$$\frac{\partial y_p}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (y_1, y_2, \dots, x_k)}}{\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_p)}}. \quad (17)$$

Estas fórmulas comprenden la (10) del n° 1, la (4) del n° 2 y las (13').

Si las funciones  $f_i$  admiten derivadas parciales segundas, terceras, ..., continuas, mediante sucesivas derivaciones de la (16) respecto a una de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , se obtienen sistemas de  $p$  ecuaciones lineales de los que se pueden calcular las derivadas segundas  $\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_h \partial x_p}$ , o las derivadas terceras  $\frac{\partial^3 y_i}{\partial x_h \partial x_p \partial x_l}$ , etc., etc.

#### 4 - TANGENTES A CURVAS DEL PLANO Y DEL ESPACIO; PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE.

Sea  $f(x, y)$  una función continua, junto con sus derivadas parciales primeras y consideremos la ecuación

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

Supongamos que la misma admita puntos solución y que sea  $(\bar{x}, \bar{y})$  una de ellas. Supongamos, además, que en tal punto no sean nulas ambas derivadas parciales  $f_x, f_y$ . Para fijar las ideas, sea  $f_y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ . Bajo estas hipótesis sabemos (n° 1) que la ecuación (1) es, en un entorno  $R$  del punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , unívocamente resoluble respecto de la  $y$ . Esto significa que los puntos  $(x, y)$  soluciones de la (1) que caen en  $R$  son todos (y solamente aquéllos) del gráfico de la fun-



ción  $y = y(x)$  definida implícitamente por la (1), siendo tal función derivable con derivada primera continua; puede entonces decirse que los puntos  $(x, y)$  cuyas coordenadas verifican la (1) y caen en  $R$  constituyen una curva regular.

Entonces, el lugar  $C$  de todos los puntos  $(x, y)$  cuyas coordenadas verifican la (1) se compone de curvas regulares, pudiendo tal regularidad desaparecer solamente en los eventuales puntos  $(x, y)$  de  $C$  en los que se tenga

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \quad (2)$$

Por esta razón se dice que el lugar  $C$  es una curva plana de ecuación  $f(x, y) = 0$ . Los puntos de  $C$  donde valen las (2) se llaman puntos singulares de la curva, los otros se llaman puntos simples.

Todo punto simple  $(\bar{x}, \bar{y})$  forma parte de una de las curvas regulares  $y = y(x)^{(*)}$  de que se compone  $C$  y en consecuencia existe en tal punto una recta tangente a  $C$ . Su ecuación es, como sabemos

$$y - \bar{y} = y'(\bar{x}) (x - \bar{x})$$

donde la derivada  $y'(\bar{x})$  se calcula con la fórmula (10) del n° 1, cuando se ponga  $x = \bar{x}$  y, por lo tanto,  $y(\bar{x}) = \bar{y}$ . La ecuación precedente toma entonces la forma

$$y - \bar{y} = - \frac{f_x(\bar{x}, \bar{y})}{f_y(\bar{x}, \bar{y})} (x - \bar{x})$$

o sea

$$f_x(\bar{x}, \bar{y}) (x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y}) (y - \bar{y}) = 0 \quad (3)$$

Se tiene así la fórmula para escribir la ecuación de la tangente a una curva que ha sido dada por una ecuación implícita como la (1), en un punto simple  $(\bar{x}, \bar{y})$   
 - - - - -

(\*) O también  $x = x(y)$ , si fuese  $f_y(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  y, por lo tanto,  $f_x(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ . En este caso la (1) es unívocamente resoluble respecto de la  $x$ , en un entorno de  $(\bar{x}, \bar{y})$ . También en este caso se llega a la ecuación (3).



de la misma.

Sea  $f(x, y, z)$  una función continua, en un campo  $A$  del espacio  $xyz$ , junto con sus derivadas parciales primeras, y consideremos la ecuación

$$f(x, y, z) = 0 \quad (4)$$

Supongamos que ésta admita puntos solución, y sea  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  uno de tales puntos. Supongamos, además, que en dicho punto no sean simultáneamente nulas las tres derivadas parciales  $f_x, f_y, f_z$ ; sea, por ejemplo,  $f_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$ . Entonces, por el teor. I del n° 2, en un entorno  $R$  del punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , la ecuación (4) resulta unívocamente resoluble con respecto a  $z$ . Por lo tanto, como en el caso precedente, se ve que, llamando con  $S$  al lugar de los puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación (4), la parte de  $S$  que cae en  $R$  consta de todos y solamente los puntos del diagrama de la función  $z = z(x, y)$  definida implícitamente por la (4) y es, entonces, una superficie regular [puesto que la  $z(x, y)$  resulta continua y admite derivadas parciales primeras continuas]. Entonces el citado lugar  $S$  se compone de superficies regulares, pudiendo faltar la regularidad solamente en los puntos  $(x, y, z)$  de  $S$  donde eventualmente se tenga

$$f_x(x, y, z) = f_y(x, y, z) = f_z(x, y, z) = 0 \quad (5)$$

De ahí que se diga que  $S$  es una superficie de ecuación  $f(x, y, z) = 0$ . Los puntos de  $S$  donde valen las (5) se llaman puntos singulares de la superficie; lo otros, puntos simples.

Todo punto simple  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  forma parte de una de las superficies regulares  $z = z(x, y)$  [o  $x = x(y, z)$ , o  $y = y(x, z)$ ] de las que se compone  $S$  y, por lo tanto, en tal punto existirá un plano tangente a  $S$  cuya ecuación se escribe, como es sabido

$$z - \bar{z} = z_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + z_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}).$$



Las derivadas  $z_x(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $z_y(\bar{x}, \bar{y})$  se calculan con las fórmulas (4) del n° 2 [escritas con  $r = 2$ ;  $x$  e  $y$  en lugar de  $x_1, x_2$ ;  $z(x, y)$  en lugar de  $y(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ] en las que se pone  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$  y, por lo tanto,  $z(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}$ . La ecuación precedente se escribe, entonces,

$$z - \bar{z} = - \frac{f_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{f_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} (x - \bar{x}) - \frac{f_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{f_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} (y - \bar{y}) ,$$

vale decir

$$f_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) (x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) (y - \bar{y}) + f_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) (z - \bar{z}) = 0 . \quad (6)$$

Sean  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  dos funciones continuas, en un campo  $A$  del espacio  $xyz$ , junto con sus derivadas parciales primeras. Considerado el sistema

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 , \\ g(x, y, z) = 0 , \end{cases} \quad (7)$$

supongamos que el mismo tenga puntos solución, y sea  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  uno de ellos. Supongamos, además, que en tal punto no sean simultáneamente nulos los tres jacobianos

$$J_1(x, y, z) = \frac{\partial (f, g)}{\partial (y, z)} , \quad J_2(x, y, z) = \frac{\partial (f, g)}{\partial (z, x)} , \\ J_3(x, y, z) = \frac{\partial (f, g)}{\partial (x, y)} ;$$

sea por ejemplo,  $J_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$ . Entonces, por el teor. I del n° 3, en un entorno  $R$  del punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , el sistema (7) resulta unívocamente resoluble con respecto a  $y, z$ . Por lo tanto, llamando con  $C$  al lugar de los puntos cuyas coordenadas verifican las (7), la parte de  $C$  que cae en  $R$  consta de todos y solamente los puntos proporcionados por las ecuaciones paramétricas  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ , donde  $y(x)$ ,  $z(x)$  son las funciones definidas implícitamente por el sistema (7).

Puesto que estas funciones son derivables (con derivada continua), la citada parte de  $C$  es una curva regular del espacio. Entonces, el lugar  $C$  se compone



de curvas regulares, pudiendo faltar dicha regularidad solamente en los puntos de  $C$  donde se tiene

$$J_1(x, y, z) = J_2(x, y, z) = J_3(x, y, z) = 0 \quad (8)$$

Por eso es que todavía se dice que  $C$  es una curva del espacio, representada por el sistema (7). Los puntos de  $C$  donde valen las (8) se denominan los puntos singulares de la curva; los otros son llamados puntos simples.

Todo punto simple  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  forma parte de una de las curvas regulares  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$   $\vee$   $x = x(y)$ ,  $z = z(y)$ , o  $x = x(z)$ ,  $y = y(z)$  de que se compone  $C$  y de ahí que en tal punto exista una recta tangente a  $C$ . Las ecuaciones de la misma son, como es sabido:

$$y - \bar{y} = y'(\bar{x}) (x - \bar{x}),$$

$$z - \bar{z} = z'(\bar{x}) (x - \bar{x}),$$

donde las derivadas  $y'(\bar{x})$ ,  $z'(\bar{x})$  se calculan con las fórmulas (13') del n° 3 donde se pone  $x = \bar{x}$  y, por ende,  $y(\bar{x}) = \bar{y}$ ,  $z(\bar{x}) = \bar{z}$ . Las anteriores ecuaciones pueden entonces escribirse

$$y - \bar{y} = \frac{J_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{J_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} (x - \bar{x}), \quad z - \bar{z} = \frac{J_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{J_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} (x - \bar{x})$$

o sea

$$\frac{x - \bar{x}}{J_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \frac{y - \bar{y}}{J_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \frac{z - \bar{z}}{J_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad (9)$$

Obsérvese que el sistema (7) define la curva  $C$  como intersección de las superficies  $S'$ ,  $S''$ , que tienen por ecuaciones respectivas a  $f(x, y, z) = 0$ ,  $g(x, y, z) = 0$ .

Si  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  es un punto simple de  $C$ , también resultará simple para ambas superficies  $S'$ ,  $S''$  (en efecto, si en tal punto se tuviera, por ejemplo  $f_x = f_y = f_z = 0$ , se tendría como consecuencia  $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ , lo que estaría contra la hipótesis).



Entonces, en el punto indicado existen los planos tangentes a las superficies  $S'$ ,  $S''$  y sus ecuaciones son, según la (6):

$$f_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(y - \bar{y}) + f_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(z - \bar{z}) = 0 ,$$

$$g_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x - \bar{x}) + g_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(y - \bar{y}) + g_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(z - \bar{z}) = 0 .$$

Es bien fácil reconocer que el sistema por éstas formado equivale a la (9), con lo que se constata que la recta tangente en un punto simple  $\bar{P}$  de la curva  $C$ , intersección de las dos superficies  $S'$ ,  $S''$ , coincide con la recta común a los planos tangentes en  $\bar{P}$  a las dos superficies precitadas. Por otra parte, lo recién dicho es una consecuencia inmediata de la definición de plano tangente a una superficie.

---

Sea  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  un punto simple de la superficie  $S$  de ecuación  $f(x, y, z) = 0$  y consideremos la curva  $C$  intersección de dicha superficie con el plano tangente a la misma en el punto  $\bar{P}$ . Tal curva  $C$  está representada por el sistema

$$f(x, y, z) = 0 ,$$

$$f_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(y - \bar{y}) + f_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})(z - \bar{z}) = 0 ,$$

que origina, para los jacobianos, las expresiones

$$J_1(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_y(x, y, z) & f_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ f_z(x, y, z) & f_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{vmatrix} \quad \text{y análogas.}$$

Sigue que, en el punto  $\bar{P}$ , resulta  $J_1 = J_2 = J_3 = 0$  por lo que  $\bar{P}$  es punto singular de  $C$ . Puede entonces decirse: la curva  $C$ , intersección de una superficie  $S$  con el plano tangente a la misma en un punto simple  $\bar{P}$ , presenta un punto singular en dicho punto  $\bar{P}$ .

Para el estudio de los puntos singulares de las curvas y de las superficies nos remitimos a los cursos de Geometría Analítica y de Geometría Descriptiva.



## 5 - MAXIMOS Y MINIMOS VINCULADOS; METODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

Sea

$$u = f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad (1)$$

una función de  $r$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_r$  y supongamos que éstas no sean todas independientes sino que estén ligadas por un cierto número  $n$  de ecuaciones (con  $n < r$ ):

$$\varphi_k(P) = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Hagamos la hipótesis que las funciones  $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  sean continuas junto con sus derivadas parciales primeras en cierto campo  $A$  del espacio  $S_r$ .

Supongamos, además, que existan en  $A$  puntos  $P(x_1, x_2, \dots, x_r)$  que solucionen el sistema (2) y designemos con  $S$  al conjunto formado por ellos. En estas condiciones puede decirse que consideraremos a la función (1) no en todos los puntos  $P$  de  $A$  sino, exclusivamente en los puntos  $P$  del citado conjunto  $S$ .

Nos proponemos estudiar los máximos y mínimos relativos o absolutos de la  $u = f(P)$ , cuando  $P$  varía en  $S$ . Para recordar que el punto  $P$  está mediante los vínculos (2) restringido a moverse en  $S$ , hablaremos precisamente de máximos y de mínimos vinculados (\*). Es prácticamente superfluo señalar que un punto  $\bar{P}$  de  $S$  será, por ejemplo, de máximo relativo vinculado si existe un entorno  $R$  de  $\bar{P}$ , contenido en  $A$ , tal que, para todos los puntos  $P$  pertenecientes a  $S \cap R$  resulte  $f(P) \leq f(\bar{P})$ ; el punto  $\bar{P}$  será, en cambio, un máximo absoluto vinculado si para todos los puntos  $P$  de  $S$  se tiene  $f(P) \leq f(\bar{P})$ .

-----

(\*) Por contraposición, cuando las variables no están ligadas por ninguna relación, se habla de máximos y mínimos libres.



Deseamos determinar las condiciones necesarias para que un punto  $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$  de  $S$  sea un punto de máximo o de mínimo relativo vinculado para la  $u = f(P)$ , agregando la hipótesis de que la matriz jacobiana de las funciones  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  (\*) tenga característica igual a  $n$  en todo  $A$ . Entonces, en tal matriz existirá por lo menos un menor de orden  $n$  que en el punto  $\bar{P}$  tenga un valor no nulo; sin pérdida de generalidad podemos suponer que sea distinto de cero el jacobiano de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  respecto de las primeras  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0 \quad (\text{en } \bar{P}) \quad (3)$$

Entonces, por el teorema de Dini, en un entorno  $R$  de  $\bar{P}$  contenido en  $\bar{A}$ , y que podemos suponer definido por las limitaciones del tipo  $|x_h - \bar{x}_h| < \sigma$ , ( $h = 1, 2, \dots, r$ ), puede resolverse el sistema (2) respecto de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , es decir sustituir a dicho sistema con uno equivalente del tipo

$$x_1 = \psi_1(x_{n+1}, \dots, x_r), \quad x_2 = \psi_2(x_{n+1}, \dots, x_r), \quad \dots, \quad x_n = \psi_n(x_{n+1}, \dots, x_r).$$

Por lo tanto, cuando se calcula la función  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_r)$  en los puntos de  $S \cap R$ , resulta

$$u = f[\psi_1(x_{n+1}, \dots, x_r), \psi_2(x_{n+1}, \dots, x_r), \dots, \psi_n(x_{n+1}, \dots, x_r), x_{n+1}, \dots, x_r] \quad (4)$$

es decir,  $u$  resulta una función de las  $r - n$  variables  $x_{n+1}, \dots, x_r$ :

(\*) Se da el nombre de matriz jacobiana de las  $n$  funciones  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  respecto de las  $r$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_r$  a la matriz  $n \times r$  cuyos elementos son las derivadas parciales de tales funciones, vale decir a la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_r} \end{pmatrix}$$

Si  $r = n$  tal matriz es cuadrada y su determinante es el jacobiano de las  $n$  funciones. Cada menor de una matriz jacobiana es el jacobiano de ciertas funciones entre las dadas respecto de ciertas variables. En el caso aquí considerado se tiene  $n < r$  y la matriz jacobiana es rectangular.



$$u = \Phi(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r), \quad (5)$$

definida cuando el punto  $Q(x_{n+1}, \dots, x_r)$  varía libremente en el campo  $|x_l - \bar{x}_l| < \sigma$ ,  $(l = n+1, \dots, r)$ . Entonces, si  $\bar{P}$  es punto de máximo o de mínimo relativo vinculado para la  $f(P)$ , el punto  $\bar{Q}(\bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_r)$  es punto de máximo o de mínimo relativo libre para las funciones (5) y entonces, en tal punto  $Q$  debe ser  $\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = 0$ ,  $(l = n+1, \dots, r)$  o sea, recordando que  $\Phi$  no es sino el segundo miembro de la (4):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l} + \frac{\partial f}{\partial x_l} = 0, \quad (6)$$

$$(l = n+1, \dots, r).$$

Pero, por la regla de derivación de las funciones implícitas se tiene (véanse las

(17) del n° 3):

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} = - \frac{\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}}{\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}}, \dots, \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l} = - \frac{\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}}{\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}} \quad (7)$$

por lo que, sustituyendo en las (6), se encuentran  $r - n$  ecuaciones en las  $r$  incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_r$ . Uniendo tales ecuaciones a las  $n$  ecuaciones (2) se tienen en total  $r$  ecuaciones a las que deben necesariamente satisfacer las  $r$  coordenadas  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$  del punto  $\bar{P}$ , de máximo o de mínimo relativo vinculado.

Se puede evitar el uso de las fórmulas (7), que comúnmente llevan a cálculos complicados, recordando (véase n° 3) que ellas provienen, para cada  $l$  fijo, de la resolución del sistema de ecuaciones lineales [cfr. con las (16) del n° 3]:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \frac{\partial \psi_n}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = 0, \quad (8)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

obtenidas derivando con respecto a  $x_l$ , la identidad

$$\varphi_k[\psi_1(x_{n+1}, \dots, x_r), \psi_2(x_{n+1}, \dots, x_r), \dots, \psi_n(x_{n+1}, \dots, x_r), x_{n+1}, \dots, x_r] \equiv 0.$$



Sumando a las (6) las  $n$  ecuaciones (8) multiplicadas respectivamente por los parámetros (llamados multiplicadores)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  se obtiene

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \dots +$$

$$+ \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \right) \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} \right) = 0,$$

$$(l = n+1, \dots, r) \quad (9)$$

Ahora, teniendo en cuenta la (3), que se puede suponer válida en el entorno  $R$  de  $\bar{P}$ , es posible determinar, con la regla de Cramer, los parámetros  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de modo que sea

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0$$

con lo que las (9) se reducen a las

$$\frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = 0, \quad (l = n+1, \dots, r) \quad (11)$$

Reuniendo las (10) y (11) podemos entonces decir que las  $r$  coordenadas del punto  $\bar{P}$  y los  $n$  multiplicadores deben verificar las  $r$  ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, r) \quad (12)$$

y si a éstas se agregan las  $n$  ecuaciones (2) se tienen en total  $r + n$  ecuaciones en las  $r + n$  incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_r, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Este segundo método (llamado de los multiplicadores de Lagrange) es particularmente fácil de ser recordado porque las (12) coinciden con el sistema de ecuaciones que se escribirían si se buscasen los máximos y mínimos libres (y por lo tanto se igualasen a cero las derivadas parciales primeras) de las funciones  $f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_n \varphi_n$ , de las  $r$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , considerando a los multiplicadores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  como constantes.



Demos un simplísimo ejemplo de aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange. Se desean los puntos de máximo y de mínimo vinculados de la función  $z = x + y$  con la condición  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Bastará considerar la función  $x + y + \lambda (x^2 + y^2 - 1)$  e igualar a cero sus derivadas parciales respecto de  $x$  y de  $y$ , pensando que  $\lambda$  es una constante. Encontraremos así las dos ecuaciones  $1 + 2\lambda x = 0$ ,  $1 + 2\lambda y = 0$  que, junto a la  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , proporcionan un sistema de tres ecuaciones con las tres incógnitas  $x$ ,  $y$ ,  $\lambda$ .

Se obtienen inmediatamente las dos soluciones  $(x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}})$ ;  $(x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}})$  a las que corresponden para  $z$  los valores  $-\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}$  respectivamente; es después fácil reconocer que la primera nos lleva a un punto de mínimo y la segunda a un punto de máximo (inclusive absoluto).

#### 6 - ENVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE CURVAS PLANAS.

Sea  $\Phi$  una familia de curvas planas dependientes de un parámetro  $t$ ; tales curvas podrán, entonces, representarse con una ecuación del tipo

$$f(x, y, t) = 0 \quad (1)$$

Para un valor fijo de  $t$  esta ecuación representa una curva  $C_t$  de la familia; variando  $t$  tal curva varía describiendo la familia  $\Phi$ . Admitiremos, además, que cada curva  $C_t$  de la familia provenga de un solo valor de  $t$ , vale decir, que haya correspondencia biunívoca entre las curvas  $C_t$  y los valores del parámetro  $t$  (en un cierto intervalo). Supongamos que exista una curva regular  $\Gamma$  tal que por cada punto  $P$  de la misma pase una (y solamente una) curva  $C_t$  de la familia  $\Phi$ , que resulte tangente<sup>(\*)</sup> en  $P$  a la curva  $\Gamma$ . En ese caso se dice que la curva  $\Gamma$  constituye una envolvente para la familia  $\Phi$ . Deseamos ocupar-

-----

(\*) Esto significa que la recta tangente en  $P$  a  $C_t$  coincide con la recta tangente a  $\Gamma$  en  $P$ .



nos de la determinación de la misma.

Hagamos la hipótesis que, en el plano  $xy$  exista un campo  $A$  que contenga a  $\nabla$  y tal que, al variar en él el punto  $(x, y)$  y al variar el parámetro  $t$  en cierto intervalo  $I$ , la función  $f(x, y, t)$  resulta continua junto con sus derivadas parciales primeras  $f_x, f_y, f_t$  entre las que las primeras dos no se anulan simultáneamente (es decir,  $f_x^2 + f_y^2 > 0$ ). Esta última condición asegura que ninguna de las curvas  $C_t$  tiene puntos singulares en  $A$ .

Representemos la envolvente  $\nabla$  con ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t), \quad (2)$$

asumiendo como valor del parámetro  $t$ , en un punto  $P$  cualquiera de  $\nabla$ , el mismo  $t$  que le corresponde a la curva  $C_t$  que en  $P$  resulta tangente a  $\nabla$ .

Las dos funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  deben verificar dos condiciones. La primera traduce el hecho de que el punto  $P[x(t), y(t)]$  de  $\nabla$  debe también estar sobre la curva  $C_t$ , por lo que sus coordenadas  $x(t)$ ,  $y(t)$  deben verificar la ecuación (1); todo esto conduce a la

$$f[x(t), y(t)] = 0, \quad (3)$$

que debe valer para todos los  $t$  del intervalo  $I$ . La segunda expresa que en  $P$  las tangentes a  $\nabla$  y a  $C_t$  deben coincidir y como tales tangentes tienen por ecuaciones a

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)},$$

$$f_x[x(t), y(t), t](x - x(t)) + f_y[x(t), y(t), t](y - y(t)) = 0$$

respectivamente, se deduce que debe ser

$$f_x[x(t), y(t), t]x'(t) + f_y[x(t), y(t), t]y'(t) = 0. \quad (4)$$

Conviene sustituir la (4) con una consecuencia de las dos ecuaciones escritas, observando que de la (3) sigue, por derivación respecto de  $t$ ,

$$f_x[x(t), y(t), t]x'(t) + f_y[x(t), y(t), t]y'(t) + f_t[x(t), y(t), t] = 0,$$



por lo que, restando de ésta la (4), queda

$$f_t[x(t), y(t), t] = 0 \quad . \quad (5)$$

Podemos decir, entonces, que si existe la envolvente  $\mathcal{V}$ , con las hipótesis hechas, las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  que proporcionan la representación paramétrica (2) deben necesariamente verificar el sistema constituido por las (3) y la (5).

Este resultado conduce, entonces, a tomar en consideración, para la determinación de la envolvente  $\mathcal{V}$ , las dos ecuaciones

$$f(x, y, t) = 0 \quad , \quad f_t(x, y, t) = 0 \quad , \quad (6)$$

y examinar si ellas definen implícitamente  $x$ ,  $y$  en función de  $t$ , y verificar si las funciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  que resultan dan efectivamente las ecuaciones paramétricas de una curva regular que sea una envolvente para la familia  $\Phi$ .

Ahora bien; todo esto puede asegurarse si, admitido que el sistema (6) sea compatible y llamando  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$  a una solución del mismo, agregamos a las hipótesis hechas la siguiente: que en un entorno  $R$  del punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$  existan y sean continuas también las derivadas parciales segundas  $f_{xt}$ ,  $f_{yt}$ ,  $f_{tt}$ , resultando en  $R$

$$\frac{\partial (f, f_t)}{\partial (x, y)} \neq 0 \quad , \quad (7)$$

$$f_{tt} \neq 0 \quad . \quad (8)$$

Y, en efecto, por el teorema de Dini, la (7) asegura el carácter de resoluble del sistema (6) en un entorno de  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ ; quedan entonces definidas dos funciones

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad (9)$$

continuas junto con sus derivadas primeras, tales que  $x(\bar{t}) = \bar{x}$ ,  $y(\bar{t}) = \bar{y}$ .

Siendo idénticamente  $f_t[x(t), y(t), t] = 0$  se deduce, derivando con respecto a  $t$ ,

$$f_{xt}[x(t), y(t), t] x'(t) + f_{yt}[x(t), y(t), t] y'(t) + f_{tt}[x(t), y(t), t] = 0 \quad ,$$

y, teniendo en cuenta la (8), queda excluida la posibilidad de que las derivadas



$x'(t)$ ,  $y'(t)$  sean contemporáneamente nulas. De la (8) sigue también, siempre por el teorema de Dini, que la segunda de las (6) define a  $t$  como una función unívoca de  $x$ ,  $y$ , con lo que cada punto  $(x, y)$  proporcionado por la (9) no puede sino provenir de un solo valor de  $t$ . Quedan así satisfechas todas las condiciones que permiten afirmar que las (9) representan una curva regular  $\gamma$ .

Queda por hacer ver que esta curva  $\gamma$  resulta efectivamente una envolvente para la familia considerada. Como primer cosa por todo punto  $P[x(t), y(t)]$  de  $\gamma$  pasa una y solamente una curva  $C_t$  [puesto que, como ya ha sido dicho, la segunda de las (6) define  $t$  como función unívoca de  $x$ ,  $y$ ]; además, de las identidades  $f[x(t), y(t), t] = 0$ ,  $f_t[x(t), y(t), t] = 0$ , derivando la primera con respecto a  $t$  y restándole la segunda, sigue la (4), que expresa precisamente la coincidencia de las tangentes en el punto  $P$  a las curvas  $\gamma$ ,  $C_t$ .

Se tiene entonces la siguiente regla práctica para la búsqueda de la envolvente de una familia de curvas planas: dada la ecuación  $f(x, y, t) = 0$  de la familia, agréguesele la ecuación  $f_t(x, y, t) = 0$  y resuélvase el sistema así obtenido respecto de  $x$ ,  $y$ ; se hallará así una solución del tipo  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  la que da las ecuaciones paramétricas de la envolvente  $\gamma$  buscada (si se verifican las hipótesis precitadas).

Se puede también proceder de otro modo, teniendo en cuenta que un punto  $(x, y)$  de  $\gamma$  pertenece a la curva  $C_t$  que corresponde a aquel valor del parámetro  $t$  que, en función de  $x$  y de  $y$ , está unívocamente definido por la  $f_t(x, y, t) = 0$ . Por lo tanto, si de esta ecuación se obtiene  $t = t(x, y)$ , un punto  $(x, y)$  de  $\gamma$  debe verificar la ecuación de la  $C_{t(x, y)}$ , vale decir, la  $f[x, y, t(x, y)] = 0$ ; esta es, por lo tanto, la ecuación cartesiana de la envolvente  $\gamma$ . Se puede decir breve-



mente que la ecuación cartesiana de la envolvente se encuentra eliminando el parámetro  $t$  entre las dos ecuaciones  $f(x, y, t) = 0$  ,  $f_t(x, y, t) = 0$  .

Por ejemplo, para encontrar la envolvente de la familia de rectas  $x + ty + t^2 = 0$ , basta eliminar  $t$  entre esta ecuación y la  $y + 2t = 0$  ; se encuentra así que la envolvente buscada es la parábola  $y^2 = 4x$  .

Como complemento de lo que precede es necesario advertir que, inclusive en los casos más comunes, no siempre se verifican las hipótesis  $f_x^2 + f_y^2 > 0$  ,  $\frac{\partial (f, f_t)}{\partial (x, y)} \neq 0$  ,  $f_{tt} \neq 0$  que nos han permitido asegurar la existencia de una curva regular  $\gamma$  , envolvente de la familia  $\Phi$  . Limitándonos a considerar la continuidad de  $f, f_x, f_y, f_t$  , podemos en cada caso considerar el sistema (6) en las dos incógnitas  $x, y$  y preguntarnos qué representan para las curvas de la familia  $\Phi$  los puntos  $(x, y)$  que tal sistema define.

Observemos, ante todo, que si existe un punto  $(x_0, y_0)$  que pertenezca a todas las curvas  $C_t$  de la familia  $\Phi$  [es decir, como comúnmente se expresa un punto base de  $\Phi$ ], tal punto verifica seguramente el sistema (6), cualquiera sea  $t$  . En efecto; puesto que  $(x_0, y_0)$  pertenece a todas las curvas  $C_t$  se tiene  $f(x_0, y_0, t) = 0$  idénticamente respecto de  $t$  y, por lo tanto, también será  $f_t(x_0, y_0, t) = 0$  . Entonces, si la familia  $\Phi$  tiene puntos base , éstos estarán incluidos en las soluciones del sistema (6) .

Dejadas de lado estas eventuales soluciones  $x = x_0$  ,  $y = y_0$  (independientes de  $t$ ) , supongamos que dicho sistema tenga una o varias soluciones  $x = x(t)$  ,  $y = y(t)$  con  $x(t)$  ,  $y(t)$  dotadas de derivadas primeras continuas, no simultáneamente nulas. Considerada la curva  $\gamma$  con las ecuaciones paramétricas  $x = x(t)$  ,  $y = y(t)$  , se podrá solamente decir que cada punto  $P[x(t), y(t)]$  de la misma



es, o punto de tangencia entre  $\gamma$  y la curva  $C_t$ , o un punto singular de  $C_t$ . En efecto; de las (6) sigue, como ya se ha visto, la

$$f_x[x(t), y(t), t] x'(t) + f_y[x(t), y(t), t] y'(t) = 0$$

y, dado que hemos excluido la posibilidad  $x'(t) = y'(t) = 0$ , quedando dos casos por considerar:

1<sup>o</sup>) es  $f_x[x(t), y(t), t] = f_y[x(t), y(t), t] = 0$ , y entonces  $P$  es un punto singular de  $C_t$ ; 2<sup>o</sup>) tales derivadas no son ambas nulas y entonces ya sabemos que se tiene la tangencia antes indicada.

Como ejemplo, para la familia de círculos  $x^2 + y^2 - 2t^2x - 4ty + 2t^2 - 1 = 0$ , el sistema (6) consta de la ecuación recién escrita y de la  $-4tx - 4y + 4t = 0$  y se encuentra inmediatamente que el mismo tiene dos soluciones  $(x = 1, y = 0)$ ,  $(x = -1, y = 2t)$ . A la primera corresponde un punto base; a la segunda la recta  $x = -1$  que es una envolvente.

Como otro ejemplo consideremos la familia de parábolas  $(x - y)^2 - 2t(x + y) + t^2 = 0$  para la que el sistema (6) se obtiene agregando a la escrita, la ecuación  $-2(x + y) + 2t = 0$ . Se encuentran las dos soluciones  $(x = t, y = 0)$ ,  $(x = 0, y = t)$ , la primera de las cuales define el eje  $x$ , la segunda el eje  $y$ . Considerado, por ejemplo, el eje  $x$ , por cada punto  $P(t, 0)$  del mismo con  $t \neq 0$ , pasa una y solamente una parábola de la familia que resulta en él tangente a dicho eje; pero para  $t = 0$  se tiene el origen  $O$  por el que pasa la parábola degenerada  $(x - y)^2 = 0$  y que tiene (en todos sus puntos y por ende también) en  $O$  su punto singular.

Naturalmente no se excluye que el sistema (6) defina solamente curvas, cuyos puntos sean todos puntos singulares para la curva  $C_t$ , en cuyo caso no



se tiene envolvente. Por ejemplo, para la familia de semicúbicas  $y^3 - (x - t)^2 = 0$  se tiene el sistema formado por la ecuación escrita y la  $2(x - t) = 0$ , cuya única solución es  $x = t$ ,  $y = 0$  (eje  $x$ ). Pero cada punto  $(t, 0)$  del eje  $x$  es un punto singular (cúspide) para la semicúbica pasante por él.



## CAPITULO XXVIII

### Aplicaciones geométricas

#### 1 - PUNTOS DE CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXION DE LAS CURVAS.

Consideremos en el plano  $xy$  una curva regular  $\gamma$ , definida por las ecuaciones paramétricas  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , con  $t$  variando en un intervalo base  $A$ . Un punto de  $\gamma$  será indicado con una notación del tipo  $P(t)$ , donde  $t$  es el valor del parámetro que le corresponde. Supondremos que las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  admitan siempre derivada segunda.

Fijemos un punto  $P(t_0)$  en  $\gamma$ , y llamemos  $\tau_0$  a la recta tangente en él a  $\gamma$ . Diremos que  $P_0$  es un punto de curvatura para la curva  $\gamma$  si, en el intervalo  $A$ , se puede encontrar un entorno  $I$  del punto  $t_0$  tal que los puntos  $P$  de  $\gamma$  provenientes de los valores  $t \neq t_0$  de tal entorno queden todos de una misma parte de la recta tangente  $\tau_0$ ; en el caso contrario diremos que  $P_0$  es un punto de inflexión<sup>(\*)</sup>.

Como es sabido, la ecuación de  $\tau_0$  se escribe  $(x - x_0)y'_0 - (y - y_0)x'_0 = 0$ <sup>(\*\*)</sup>; por lo tanto la distancia (con signo) de un punto  $(x, y)$  a la tangente  $\tau_0$  está dada, salvo un factor constante, por la expresión  $(x - x_0)y'_0 - (y - y_0)x'_0$ . Tendre

--- --

(\*) En el caso particular de un diagrama cartesiano  $y = f(x)$ , esta definición de punto de inflexión coincide con la ya dada en el Cap. X, n° 1.

(\*\*) Se ha indicado  $x(t_0) = x_0$ ,  $x'(t_0) = x'_0$ , etc; notaciones similares se usarán en lo que sigue.



mos, entonces, que  $P_0$  será punto de curvatura si y sólo si la función  $\varphi(t) = [x(t) - x_0]y'_0 - [y(t) - y_0]x'_0$ , que es nula para  $t = t_0$ , se mantiene siempre positiva o siempre negativa para todos los  $t \neq t_0$  de un entorno  $I$  del punto  $t_0$ , vale decir, cuando la  $\varphi(t)$  tiene en  $t_0$  un punto de mínimo o de máximo propio. Siendo  $\varphi'(t) = x'(t)y'_0 - y'(t)x'_0$ ,  $\varphi''(t) = x''(t)y'_0 - y''(t)x'_0$ , será  $\varphi'(t_0) = 0$ ,  $\varphi''(t_0) = -(x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0)$  y entonces tendremos que

I - Condición suficiente para que un punto  $P_0$  de  $\gamma$  sea punto de curvatura es que resulte  $x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0 \neq 0$ ; condición necesaria para que sea un punto de inflexión es que sea  $x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0 = 0$ .

Observemos que si en todos los puntos de  $\gamma$  resulta  $x'y'' - x''y' = 0$ , la curva  $\gamma$  será una recta. En efecto; si  $x' \equiv 0$ , será  $x = c$  (con  $c$  constante) y la tesis quedaría probada; si no fuera  $x'$  idénticamente nula, existiría un punto  $t_0$  donde  $x' \neq 0$ , manteniéndose esta desigualdad en todos los puntos de un entorno  $I$  de  $t_0$ . En tales puntos se tendría  $\frac{x'y'' - x''y'}{y'^2} = 0$  o sea,  $\left(\frac{y'}{x'}\right)' = 0$ , de la que sigue  $\frac{y'}{x'} = c$ ,  $y' = cx'$ . De aquí,  $y = cx + c_1$  debiendo notarse que  $I$  coincide con  $A$ , ya que si supiéramos que en los extremos de  $I$  tenemos  $x' = 0$ , resultaría también  $y' = 0$ , contradiciendo la hipótesis de que  $\gamma$  sea una curva regular.

---

Pasemos a considerar una curva regular  $\gamma$  del espacio  $xyz$ , en las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (1)$$

con el parámetro  $t$  variando en un intervalo base  $A$ , y supongamos también en este caso que las tres funciones (1) posean derivada segunda. Sea  $P_0$  un punto de  $\gamma$  determinado en correspondencia a un valor fijado  $t_0$ ; diremos que  $P_0$



es punto de curvatura para  $\gamma$  si se puede encontrar por lo menos un plano tal que la curva plana  $\bar{\gamma}$ , proyección ortogonal de  $\gamma$  sobre tal plano tenga, en el punto  $\bar{P}_0$  proyección de  $P_0$ , un punto de curvatura; en el caso contrario diremos que  $P_0$  es un punto de inflexión. Demostraremos que:

II - Condición suficiente para que un punto  $P_0$  de  $\gamma$  sea punto de curvatura es que la matriz

$$\begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

tenga característica igual a 2; condición necesaria para que tenga un punto de inflexión es que tal matriz tenga característica uno (\*).

Dem. Si la (2) tiene característica igual a 2, existe un menor de 2º orden en la misma distinto de cero. Sea, por ejemplo,  $x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0 \neq 0$ ; entonces por el teor. I la curva plana  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  (que es la proyección ortogonal de  $\gamma$  sobre el plano  $xy$ ) tiene en el punto  $\bar{P}(x_0, y_0)$  un punto de curvatura, de lo que sigue la tesis.

Notemos que si en todos los puntos de  $\gamma$  la matriz  $\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}$  tiene característica uno, la curva  $\gamma$  será una recta. En efecto resultan ser rectas sus proyecciones sobre los planos coordenados.

## 2 - PLANO OSCULADOR Y CIRCULO OSCULADOR.

Consideremos en el espacio  $xyz$  la curva  $\gamma$  definida por las

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1)$$

y fijemos sobre la misma un punto  $P_0$  correspondiente al valor  $t_0$  del parámetro

(\*) No es posible que la (2) tenga característica cero porque, por definición de curva regular, es  $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$ .



tro, tal que la matriz

$$\begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

tenga característica dos (excluimos, por lo tanto, que  $\gamma$  sea una recta).

Entonces  $P_0$  es un punto de curvatura y existirá ciertamente un entorno  $I$  de  $t_0$  tal que cada punto  $P(t)$  de  $\gamma$ , proveniente de un  $t \neq t_0$  de dicho entorno, no resulta situado sobre la tangente  $\tau_0$  a  $\gamma$  en  $P_0$ . Para cada punto  $P(t)$  a que hemos hecho referencia resulta bien determinado el plano  $\omega(t)$  que pasa por  $\tau_0$  y por el mismo punto. La ecuación de tal plano puede escribirse:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x(t) - x_0 & y(t) - y_0 & z(t) - z_0 \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

ya que ésta se verifica en todos los puntos  $(x, y, z)$  de  $\tau_0$  (en los que los elementos de la 1ª fila resultan proporcionales a los de la 2ª) y también en el punto  $P(t)$  (donde la primera fila resulta idéntica a la 3ª).

Cuando  $P(t)$  varía sobre  $\gamma$ , el plano  $\omega(t)$  varía en el haz de planos de eje  $\tau_0$ ; demostraremos que, con las hipótesis hechas, cuando  $P(t)$  tiende al punto  $P_0$  (es decir, cuando  $t \rightarrow t_0$ ) tal plano tiende a un bien determinado plano límite  $\omega_0$ , que llamaremos el plano osculador a la curva  $\gamma$  en el punto  $P_0$ . Con ese objeto, transformemos la ecuación (3) sustrayendo de la 3ª fila, la 2ª multiplicada por  $t - t_0$  y después dividamos por  $\frac{(t - t_0)^2}{2}$  la nueva 3ª fila así obtenida; encontramos de tal modo la

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ \frac{x(t) - x_0 - (t - t_0)x'_0}{\frac{1}{2}(t - t_0)^2} & \frac{y(t) - y_0 - (t - t_0)y'_0}{\frac{1}{2}(t - t_0)^2} & \frac{z(t) - z_0 - (t - t_0)z'_0}{\frac{1}{2}(t - t_0)^2} \end{vmatrix} = 0$$



Si sobre ésta pasamos el límite para  $t \rightarrow t_0$  se obtiene, con una aplicación del teorema de De L'Hospital, la ecuación límite

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

que es una efectiva ecuación (y no una identidad  $0 = 0$ ) gracias a las hipótesis hechas sobre la matriz (2). Existe, entonces, el plano  $\omega_0$  límite para  $t \rightarrow t_0$  del plano variable  $\omega(t)$  y la (4) nos proporciona la ecuación del mismo.

Concluyendo, podemos enunciar: dada en el espacio una curva regular  $\gamma$  (que no sea una recta), llámase plano osculador a  $\gamma$  en un punto  $P_0$  de dicha curva, al plano límite de los individualizados por la tangente  $\tau_0$  en  $P_0$  y otro punto  $P$  de  $\gamma$ , cuando  $P$  tiende a  $P_0$ . El plano osculador existe seguramente en todo punto  $P_0$  donde la matriz (2) tenga característica dos y, en tal caso, su ecuación está proporcionada por la (4).

Observemos que, si la curva  $\gamma$  es plana, el plano osculador en cada punto de la misma coincide, evidentemente, con el plano de la curva.

---

Consideremos ahora el círculo  $\gamma(t)$  que pasando por  $P_0$  es en tal punto tangente a la recta  $\tau_0$ , y que pasa, además, por el punto  $P(t)$ . Demostraremos que, al tender  $P(t)$  a  $P_0$  (es decir, para  $t \rightarrow t_0$ ) tal círculo  $\gamma(t)$  tiende a un determinado círculo límite  $\gamma_0$  que será denominado el círculo osculador a la curva  $\gamma$  en el punto  $P_0$ . Con tal motivo observemos que el círculo  $\gamma(t)$  está evidentemente contenido en el plano  $\omega(t)$  que tiene a (3) por ecuación. Su centro  $C(t)$  surge como intersección de este plano (3) con otros dos



planos así definidos: el primero es el plano que pasa por  $P_0$  y es perpendicular a la recta  $\tau$ , es decir, de ecuación

$$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0 \quad ; \quad (5)$$

el segundo es el plano que, pasando por el punto medio entre  $P_0$  y  $P(t)$ , es perpendicular a la recta que une dichos puntos, vale decir, el plano de ecuación

$$[x(t) - x_0] \left(x - \frac{x(t) + x_0}{2}\right) + [y(t) - y_0] \left(y - \frac{y(t) + y_0}{2}\right) + [z(t) - z_0] \left(z - \frac{z(t) + z_0}{2}\right) = 0,$$

o sea,

$$[x(t) - x_0](x - x_0) + [y(t) - y_0](y - y_0) + [z(t) - z_0](z - z_0) - \frac{1}{2}[x(t) - x_0]^2 - \frac{1}{2}[y(t) - y_0]^2 - \frac{1}{2}[z(t) - z_0]^2 = 0$$

Por último, el radio  $R(t)$  está definido como distancia de  $C(t)$  al punto  $P_0$ .

Debemos hacer ver que el plano  $\omega(t)$ , el centro  $C(t)$  y el radio  $R(t)$  admiten límite para  $t \rightarrow t_0$ .

En lo que respecta al plano  $\omega(t)$ , ya sabemos que tiende al plano osculador (4).

El centro  $C(t)$  queda individualizado como intersección de los tres planos (3),

(5) y (6); si de la (6) restamos la (5) multiplicada por  $t \rightarrow t_0$  y después di-

vidimos la ecuación obtenida por  $\frac{(t - t_0)^2}{2}$ , podemos también decir que  $C(t)$

queda individualizado por las ecuaciones (3), (5) y la

$$\begin{aligned} & \frac{x(t) - x_0 - (t - t_0)x'_0}{\frac{1}{2}(t - t_0)^2} (x - x_0) + \frac{y(t) - y_0 - (t - t_0)y'_0}{\frac{1}{2}(t - t_0)^2} (y - y_0) + \\ & + \frac{z(t) - z_0 - (t - t_0)z'_0}{\frac{1}{2}(t - t_0)^2} (z - z_0) - \frac{[x(t) - x_0]^2}{(t - t_0)^2} - \frac{[y(t) - y_0]^2}{(t - t_0)^2} - \\ & - \frac{[z(t) - z_0]^2}{(t - t_0)^2} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Para  $t \rightarrow t_0$  el plano (3) tiende a la posición límite (4), el plano (5) está fijo, mientras que con una fácil aplicación del teorema de De L'Hospital se encuentra que el plano (7) tiende al plano límite de ecuación

$$x''_0(x - x_0) + y''_0(y - y_0) + z''_0(z - z_0) - (x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0) = 0 \quad (8)$$

Los tres planos límites (4), (5), (8) así obtenidos tienen en común un (y so-



lamente un) punto  $C_0$ , ya que inmediatamente se ve que el determinante de los coeficientes de  $x, y, z$  en sus ecuaciones es igual a la suma de los cuadrados de los tres determinantes

$$A_0 = \begin{vmatrix} y'_0 & z'_0 \\ y''_0 & z''_0 \end{vmatrix}, \quad B_0 = \begin{vmatrix} z'_0 & x'_0 \\ z''_0 & x''_0 \end{vmatrix}, \quad C_0 = \begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 \\ x''_0 & y''_0 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

de los que al menos uno es, por hipótesis, distinto de cero. Tal punto  $C_0$  da la posición límite del centro  $C(t)$  de  $\gamma(t)$  y para sus coordenadas, que indicaremos con  $X_0, Y_0, Z_0$ , se encuentra las expresiones

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 + (x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2) \frac{B_0 z'_0 - C_0 y'_0}{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}, \\ Y_0 &= y_0 + (x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2) \frac{C_0 x'_0 - A_0 z'_0}{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}, \\ Z_0 &= z_0 + (x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2) \frac{A_0 y'_0 - B_0 x'_0}{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

Por último el radio  $R(t)$ , que es la distancia de  $C(t)$  a  $P_0$ , tiende a la distancia  $R_0 = \sqrt{(X_0 - x_0)^2 + (Y_0 - y_0)^2 + (Z_0 - z_0)^2}$  del punto  $C_0$ , recién de terminado, al punto  $P_0$ ; de las (10) sigue entonces<sup>(\*)</sup>

$$R_0 = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2)^{3/2}}{(A_0^2 + B_0^2 + C_0^2)^{1/2}}. \quad (11)$$

Concluyendo podemos enunciar: dada en el espacio una curva regular  $\gamma$  (que no sea una recta) y fijado sobre la misma un punto  $P_0$ , llámase círculo osculador a  $\gamma$  en el punto  $P_0$  al círculo límite de los círculos que pasan por  $P_0$  con la mis-

-----

(\*) Téngase en cuenta que

$$\begin{aligned} (B_0 z'_0 - C_0 y'_0)^2 + (C_0 x'_0 - A_0 z'_0)^2 + (A_0 y'_0 - B_0 x'_0)^2 &= \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & C_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \end{pmatrix}^2 = \\ &= \begin{vmatrix} A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 & 0 \\ 0 & x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 \end{vmatrix} \quad \text{ya que } A_0 x'_0 + B_0 y'_0 + C_0 z'_0 = 0. \end{aligned}$$



ma tangente  $\tau_0$  a  $\gamma$ , y por otro punto  $P$  de  $\gamma$ , cuando  $P$  tiende a  $P_0$ .

El círculo osculador existe seguramente en todo punto  $P_0$  en el que la matriz (2) tenga característica dos; está contenido en el plano osculador a  $\gamma$  en  $P_0$ , su centro  $C_0$  tiene las coordenadas proporcionadas por las (10) y su radio  $R_0$  está dado por la (11).

Las fórmulas (10), (11) se simplifican notablemente si como parámetro sobre la curva se asume la abscisa curvilínea (o arco)  $s$ . Representando  $\gamma$  con las ecuaciones paramétricas

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \quad (12)$$

e indicando con un ápice las derivaciones respecto de  $s$ , sabemos que en todo punto resulta  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$  y, por ende, derivando,  $x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$ .

Resulta así

$$A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 = \begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{pmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x''_0^2 + y''_0^2 + z''_0^2 \end{vmatrix} = x''_0^2 + y''_0^2 + z''_0^2,$$

$$\begin{aligned} B_0 z'_0 + C_0 y'_0 &= (z'_0 x''_0 - z''_0 x'_0) z'_0 - (x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0) y'_0 = \\ &= x''_0 (y'_0^2 + z'_0^2) - x'_0 (y'_0 y''_0 + z'_0 z''_0) = x''_0 (1 - x'_0^2) + x'_0 x'_0 x''_0 = x''_0, \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$C_0 x'_0 - A_0 z'_0 = y''_0, \quad A_0 y'_0 - B_0 x'_0 = z''_0.$$

Por lo tanto, se se adopta la representación paramétrica (12), las (10) y (11) se transforman en

$$X_0 = x''_0 + \frac{x''_0}{x''_0^2 + y''_0^2 + z''_0^2}, \quad Y_0 = y''_0 + \frac{y''_0}{x''_0^2 + y''_0^2 + z''_0^2}, \quad (13)$$

$$Z_0 = z''_0 + \frac{z''_0}{x''_0^2 + y''_0^2 + z''_0^2},$$

$$R_0 = \frac{1}{(x''_0^2 + y''_0^2 + z''_0^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$



En el caso de una curva plana

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad (15)$$

el círculo osculador en un punto  $P_0$  de la misma yace siempre en el plano de la curva y, de las (10) , (11) [donde se ponga  $z_0 = z'_0 = z''_0 = 0$  y, por ende

$A_0 = B_0 = 0$ ] resulta que el centro de tal círculo tiene las coordenadas

$$X_0 = x_0 - y'_0 \frac{x'^2_0 + y'^2_0}{x'_0 y''_0 - z''_0 y'_0} \quad , \quad Y_0 = y_0 + x'_0 \frac{x'^2_0 + y'^2_0}{x'_0 y''_0 - z''_0 y'_0} \quad (16)$$

mientras su radio vale

$$R_0 = \frac{(x'^2_0 + y'^2_0)^{3/2}}{|x'_0 y''_0 - z''_0 y'_0|} \quad . \quad (17)$$

En particular, si  $\gamma$  es un diagrama cartesiano  $y = f(x)$  , resultará  $x'_0 = 1$  ,  $x''_0 = 0$  y las (16) , (17) toman la forma

$$X_0 = x_0 - f'(x_0) \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)} \quad , \quad Y_0 = f(x_0) + \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)} \quad (18)$$

$$R_0 = \frac{[1 + f'^2(x_0)]^{3/2}}{|f''(x_0)|} \quad .$$

### 3 - TRIEDRO PRINCIPAL, FORMULAS DE FRENET.

Consideremos en el espacio  $xyz$  una curva regular  $\gamma$  . En este  $n^\circ$  se supondrá siempre que los puntos de  $\gamma$  están referidos al arco  $s$  ; es decir, adoptaremos las ecuaciones paramétricas (12) del  $n^\circ$  precedente admitiendo, además, la existencia de las derivadas terceras de las funciones  $x(s)$  ,  $y(s)$  ,  $z(s)$  .

En cada punto  $P$  de  $\gamma$  existirá una determinada tangente  $\tau$  que supondremos orientada de modo concorde al sentido positivo de  $\gamma$  (es decir, de los arcos crecientes). Existe también<sup>(\*)</sup> en  $P$  un plano osculador  $\omega$  y un círculo osculador  $\Gamma$  contenido en  $\omega$  , de centro  $C$  y radio  $R$  (que resulta tangente a la recta  $\tau$  en el punto  $P$ ) . En general todos estos elementos son variables cuando  $P$

-----

(\*) Supuesto genérico, en el sentido que en él la matriz de costumbre  $\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}$  tenga característica dos.



varía sobre  $\gamma$ .

Llamaremos *normal principal* en el punto  $P$  a la recta  $n$  que une  $P$  con el centro  $C$  del círculo osculador y la supondremos orientada de  $P$  hacia  $C$ . Tal recta  $n$  resulta perpendicular en  $P$  a la tangente  $\tau$  y yace sobre el plano osculador; se puede, por lo tanto, decir también que la normal principal es, entre las infinitas perpendiculares a la tangente  $\tau$  en el punto  $P$  aquella que está contenida en el plano osculador.

Llamaremos *binormal* en el punto  $P$  a la recta  $b$  que, pasando por  $P$ , sea perpendicular a las dos rectas  $\tau$  y  $n$ , y esté orientada de modo que la terna  $\tau n b$  resulte superponible a la terna  $xyz$  de los ejes coordenados. Se puede también decir que la binormal es, entre las infinitas perpendiculares a la tangente  $\tau$  en  $P$ , aquella que es perpendicular al plano osculador.

Las tres rectas  $\tau, n, b$  forman un triedro trirrectángulo de vértice  $P$ , que se denomina el *triedro principal* de la curva  $\gamma$  en el punto  $P$ . Las caras de este triedro son: el *plano osculador*, que contiene a  $\tau$  y  $n$ ; el *plano normal*, que contiene a  $n$  y  $b$  y el *plano rectificante*, que contiene a  $b$  y  $\tau$ .

Al variar el punto  $P$  sobre  $\gamma$ , las aristas  $\tau, n, b$  del triedro principal, varían, en general, de orientación; en otras palabras, sus cosenos directores son funciones del arco  $s$ . Indicaremos con  $\alpha, \beta, \gamma$  a los cosenos directores de la tangente  $\tau$ ; con  $\xi, \eta, \zeta$  a los de la normal principal  $n$ ; con  $\lambda, \mu, \nu$  a los de la binormal  $b$ . Si tenemos presente (como lo sabemos de la Geometría Analítica) que resulta

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$$



y que cada elemento del determinante recién escrito es igual a su complemento algebraico (de modo que, por ejemplo,

$$\alpha = \eta \gamma - \xi \mu, \quad \xi = \mu \gamma - \gamma \beta, \quad \lambda = \beta \xi - \gamma \eta), \quad (1)$$

obtendremos las denominadas fórmulas de Frenet, que tienen el objeto de expresar las derivadas respecto del arco  $s$  de los nueve cosenos directores recién introducidos<sup>(\*)</sup>, por medio de dichos cosenos directores y otras dos magnitudes que introduciremos: la curvatura y la torsión.

Continuaremos indicando con ápicos las derivaciones con respecto a  $s$  y utilizaremos las fórmulas del n<sup>o</sup> precedente, sin poner más el índice cero a las distintas magnitudes en consideración.

Comencemos estableciendo el primer grupo de fórmulas que proporcionan las derivadas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de los cosenos directores de la tangente  $\tau$ . Sabemos que  $\alpha = x'$ ,  $\beta = y'$ ,  $\gamma = z'$ ; de ahí que

$$\alpha' = x'', \quad \beta' = y'', \quad \gamma' = z''. \quad (2)$$

Transformemos estas fórmulas teniendo en cuenta que, de la (14) del n<sup>o</sup> precedente obtenemos

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{1}{R^2}, \quad (3)$$

lo que permite escribir las (13) del n<sup>o</sup> precedente del siguiente modo:

$$X - x = R^2 x'', \quad Y - y = R^2 y'', \quad Z - z = R^2 z''$$

$$\text{y, por lo tanto, deducir } x'' = \frac{1}{R} \frac{X - x}{R}, \quad y'' = \frac{1}{R} \frac{Y - y}{R}, \quad z'' = \frac{1}{R} \frac{Z - z}{R}.$$

Tras esto recordemos que la normal principal  $n$  une los puntos  $P(x, y, z)$ ,  $C(X, Y, Z)$  que tienen distancia  $R$ , por lo que sus cosenos directores valen, respectivamente  $\frac{X - x}{R}$ ,  $\frac{Y - y}{R}$ ,  $\frac{Z - z}{R}$ . Se puede, entonces, escribir

(\*) Tales derivadas existen, en virtud de la hipótesis que  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  sean derivables tres veces.



$x'' = \frac{1}{R} \xi$ ,  $y'' = \frac{1}{R} \eta$ ,  $z'' = \frac{1}{R} \zeta$  y, sustituyendo en la (2), se obtiene el primer grupo de fórmulas de Frenet

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R} \xi, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{R} \eta, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{R} \zeta. \quad (4)$$

Recordemos que el factor  $\frac{1}{R}$  que interviene en las (4) es el recíproco del radio del círculo osculador; por una razón que veremos en el número sucesivo,  $R$  se llama también radio de curvatura y su recíproco,  $\frac{1}{R}$ , la curvatura de  $\gamma$  en el punto  $P$ .

Pasemos a deducir el segundo grupo de fórmulas que proporcionan las derivadas  $\lambda'$ ,  $\mu'$ ,  $\nu'$  de los cosenos directores de la binormal  $b$ . Con ese objeto comencemos observando que, siendo  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ , obtenemos derivando:

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0. \quad (5)$$

En segundo lugar tengamos en cuenta que, siendo  $\zeta$ ,  $b$  rectas perpendiculares, se tiene  $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$  con lo que, derivando, resulta  $\alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu + \alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' = 0$ . Si en esta fórmula sustituimos  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  por las expresiones dadas en (4) obtenemos  $\frac{1}{R}(\xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu) + \alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' = 0$ , y como la suma indicada entre paréntesis vale cero (pues  $n$  y  $b$  son rectas perpendiculares entre sí), se deduce que

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' = 0. \quad (6)$$

Las (5) y (6) muestran que  $\lambda'$ ,  $\mu'$ ,  $\nu'$  pueden considerarse números proporcionales a los cosenos directores de una recta que sea normal tanto a la binormal  $b$  como a la tangente  $\zeta$ , es decir, de una recta paralela a la normal  $n$ .

Sigue que  $\lambda'$ ,  $\mu'$ ,  $\nu'$  son, necesariamente, proporcionales a  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ; indicando con  $\frac{1}{\rho}$  al factor de proporcionalidad (positivo, nulo o negativo; variable, naturalmente, con  $P$ , es decir, función de  $s$ ), llegamos al segundo grupo de fórmulas de Frenet:



$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{T} \xi, \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{1}{T} \eta, \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{1}{T} \zeta. \quad (7)$$

Veremos en el n<sup>o</sup> sucesivo, el significado geométrico del factor  $\frac{1}{T}$ , que se denomina torsión de la curva  $\gamma$  en el punto  $P$ .

Obtengamos, por último, el grupo de fórmulas que expresan las derivadas  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ , de los cosenos directores de la normal principal  $n$ . Por la (1) se tiene  $\xi = \mu \gamma - \nu \beta$  y entonces, derivando y teniendo en cuenta las (4), (7) y (1):

$$\begin{aligned} \xi' &= \mu \gamma' - \nu \beta' + \mu' \gamma - \nu' \beta = -\frac{1}{R} (\eta \nu - \zeta \mu) - \frac{1}{T} (\beta \zeta - \gamma \eta) = \\ &= -\frac{1}{R} \alpha - \frac{1}{T} \lambda. \end{aligned}$$

Un cálculo análogo puede hacerse para  $\eta'$ ,  $\zeta'$  lográndose así el tercer grupo de fórmulas de Frenet:

$$\frac{d\xi}{ds} = -\frac{1}{R} \alpha - \frac{1}{T} \gamma, \quad \frac{d\eta}{ds} = -\frac{1}{R} \beta - \frac{1}{T} \mu, \quad \frac{d\zeta}{ds} = -\frac{1}{R} \gamma - \frac{1}{T} \nu. \quad (8)$$

Las fórmulas de Frenet encuentran muchas aplicaciones en cuestiones geométricas y mecánicas.

#### 4 - CURVATURA Y TORSION.

Consideremos la habitual curva  $\gamma$  con las ecuaciones paramétricas  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$ , con las mismas hipótesis del n<sup>o</sup> precedente.

Deseamos definir en cada punto  $P(s)$  un número que nos indique cuánto se aparta la curva de un comportamiento rectilíneo, en la proximidades de  $P$ . Consideremos otro punto  $P_1(s + \Delta s)$  de  $\gamma$ , las rectas  $\tau$ ,  $\tau_1$  tangentes a  $\gamma$  en los puntos  $P$ ,  $P_1$  respectivamente, y llamemos (con  $0 \leq \theta \leq \pi$ ) al ángulo de estas dos rectas. Evidentemente, si  $\gamma$  fuese una recta, resultaría siempre  $\theta = 0$ ; por lo tanto, cuanto mayor sea  $\theta$ , a igualdad de longitud del arco comprendido entre los dos puntos  $P$ ,  $P_1$ , tanto más po-



drá retenerse que tal arco se aleje de un comportamiento rectilíneo, o sea, tanto más debe considerarse que se ha encurvado.

Esta consideración nos induce a medir la curvatura del arco  $PP_1$  mediante la relación entre el ángulo  $\theta$  y la longitud  $\Delta s$  del arco  $PP_1$  y a asumir como curvatura de  $\gamma$  en el punto  $P$  el límite de tal cociente al tender  $P_1$  al punto  $P$  (es decir, para  $\Delta s \rightarrow 0$ ).

Mostraremos ahora que tal límite existe y es finito. Observemos, entretanto, que  $\theta$  es un infinitésimo con  $\Delta s$  y que, poniendo  $\text{sen } \theta = \sigma$ , también  $\sigma$  es un infinitésimo con  $\Delta s$ . Se tiene  $\theta = \text{arc sen } \sigma$  y, recordando el desarrollo en serie de la función arco seno, tendremos  $\theta = \sigma(1 + \epsilon)$  donde  $\epsilon$  señala un infinitésimo con  $\sigma$ , es decir con  $\Delta s$ . Sigue que  $\frac{\theta}{\Delta s} = \frac{\sigma}{\Delta s}(1 + \epsilon)$  por lo que el límite  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta s}$  (si existe) debe coincidir con  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\Delta s}$ .

Ahora bien, la recta  $\zeta$  tiene  $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$  por cosenos directores y la  $\zeta_1$  a  $\alpha(s + \Delta s), \beta(s + \Delta s), \gamma(s + \Delta s)$ ; de ahí que, por una conocida fórmula de geometría analítica, pueda escribirse

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \sqrt{\begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) & \gamma(s) \\ \alpha(s + \Delta s) & \beta(s + \Delta s) & \gamma(s + \Delta s) \end{pmatrix}^2} = \\ &= \sqrt{\begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) & \gamma(s) \\ \alpha(s + \Delta s) - \alpha(s) & \beta(s + \Delta s) - \beta(s) & \gamma(s + \Delta s) - \gamma(s) \end{pmatrix}^2} \end{aligned}$$

y, en consecuencia

$$\frac{\text{sen } \theta}{\Delta s} = \sqrt{\begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) & \gamma(s) \\ \frac{\alpha(s + \Delta s) - \alpha(s)}{\Delta s} & \frac{\beta(s + \Delta s) - \beta(s)}{\Delta s} & \frac{\gamma(s + \Delta s) - \gamma(s)}{\Delta s} \end{pmatrix}^2}$$

Se deduce así que existe el límite del cociente  $\frac{\text{sen } \theta}{\Delta s}$  para  $\Delta s \rightarrow 0$  y que

resulta

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\Delta s} = \sqrt{\begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) & \gamma(s) \\ \alpha'(s) & \beta'(s) & \gamma'(s) \end{pmatrix}^2}.$$



Calculando el cuadrado de la matriz, y teniendo en cuenta que  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  y por ende  $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$ , se obtiene

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\Delta s} \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 \end{vmatrix}} = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2},$$

o también, recordando que  $\alpha = x'$ ,  $\beta = y'$ ,  $\gamma = z'$  y la fórmula (3) del n<sup>o</sup> precedente:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\Delta s} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = \frac{1}{R}.$$

Concluimos entonces que: definida en cada punto  $P$  de  $\gamma$  la curvatura como límite  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta s}$ , donde  $\theta$  es el ángulo formado por la tangente  $\zeta$  en  $P$  y la tangente  $\zeta_1$  en otro punto  $P_1$  de  $\gamma$ , y  $\Delta s$  es la longitud del arco  $PP_1$ , tal curvatura resulta igual al recíproco del radio del círculo osculador.

Propongámonos ahora definir en cada punto  $P(s)$  de  $\gamma$  un número que indique cuánto (en las proximidades de  $P$ ) se aparta la curva de un comportamiento plano. Consideremos otro punto  $P_1(s + \Delta s)$  de  $\gamma$ , los planos osculadores  $\omega$ ,  $\omega_1$  en los puntos  $P$ ,  $P_1$  y llamemos  $\varphi$  (con  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) al ángulo formado por estos dos planos. Es de notar que el ángulo  $\varphi$  es también el ángulo de las binormales  $b$ ,  $b_1$  en los dos puntos considerados. Evidentemente, si  $\gamma$  fuese una curva plana, resultaría siempre  $\varphi = 0$  y entonces, con consideraciones análogas a las desarrolladas en el caso precedente, se presenta natural medir, en el punto  $P$ , el alejamiento de  $\gamma$  de un comportamiento plano  $\int_0$ , como se dice, la torsión en el punto  $P$ , mediante el límite  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s}$ . Evidentemente la demostración de la existencia de este límite y su cálculo se realiza de idéntica manera a la seguida poco más arriba: basta sustituir  $\theta$  con  $\varphi$  y  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  con los cosenos directores  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  de la binormal



Se encuentra así que la torsión está dada por una fórmula análoga a la (1), es decir que está expresada por

$$\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \gamma'^2}. \quad \text{Si retomamos las fórmulas de Frenet (7) del n}^\circ$$

precedente y se las suma tras haberlas elevado al cuadrado, se obtiene  $\lambda'^2 +$

$$\mu'^2 + \gamma'^2 = \frac{1}{T^2}, \quad \text{de modo que la torsión resulta igual a } \left| \frac{1}{T} \right|.$$

Podemos entonces decir que: el factor  $\frac{1}{T}$  que interviene en la (7) del n<sup>o</sup> precedente es, en valor absoluto, igual a la torsión de la curva  $\gamma$  en el punto  $P$ , definida como  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s}$  donde  $\varphi$  es el ángulo formado por la binormal  $b$  en  $P$  y la binormal  $b_1$  en otro punto  $P_1$  de  $\gamma$  y  $\Delta s$  es la longitud del arco  $PP_1$ .

Este límite, que es un número positivo o nulo, se llama con mayor propiedad torsión absoluta, reservándose el nombre de torsión al factor, con signo,  $\frac{1}{T}$ , que interviene en la (7) del n<sup>o</sup> precedente.

## 5 - EVOLUTA Y EVOLVENTE DE UNA CURVA PLANA.

Consideremos el caso particular de una curva plana  $\gamma$ , situada en el plano  $xy$ , con las ecuaciones paramétricas

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (1)$$

siendo  $s$  el arco de  $\gamma$ . Para tal curva no tiene ninguna importancia la consideración del plano osculador (que es el plano  $xy$  de la curva), de la binormal (que es siempre perpendicular al plano  $xy$ ) y de la torsión  $\frac{1}{T}$  (que vale siempre cero). Quedan por considerar, en cada punto  $P(x, y)$  de  $\gamma$  la tangente  $\zeta$ ; la normal principal  $n$ , que se llama simplemente la normal, que es la perpendicular en  $P$  a la tangente  $\zeta$  trazada en el plano de la curva; el círculo osculador  $\Gamma$ , de centro  $C(X, Y)$ , situado sobre la normal  $n$ , y de radio  $R = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}$ . Los cosenos directores de la tangente son  $\alpha = x'$



$\beta = y'$  ; los de la normal  $n$  son  $\xi = \frac{X-x}{R}$  ,  $\eta = \frac{Y-y}{R}$  . Las fórmulas de Frenet (4) y (8) del n° 3 se reducen a las  $\alpha' = \frac{1}{R} \xi$  ,  $\beta' = \frac{1}{R} \eta$  ,  $\xi' = -\frac{1}{R} \alpha$  ,  $\eta' = -\frac{1}{R} \beta$  . Al variar el punto  $P$  sobre  $\gamma$  , el centro  $C$  del círculo osculador, llamado también centro de curvatura , cuyas coordenadas son

$$X = x + R \xi \quad , \quad Y = y + R \eta \quad , \quad (2)$$

varía en general, describiendo cierta curva  $\gamma^*$  que se llama la evoluta de  $\gamma$  . Puede entonces decirse que la evoluta de una curva  $\gamma$  es el lugar de sus centros de curvatura. Sus ecuaciones paramétricas están dadas por las mismas (2) , con el parámetro  $s$  , del que son función las  $x, y, \xi, \eta, R$  . Téngase bien presente que  $s$  es el arco sobre la curva dada  $\gamma$  ; pero en general, no lo es sobre la evoluta.

Demostremos dos notables propiedades de la evoluta .

I - La recta  $\zeta^*$  , tangente en un punto  $C$  de la evoluta  $\gamma^*$  coincide con la normal  $n$  a la curva  $\gamma$  en el punto correspondiente  $P$  .

Dem. De las (2) sigue que los cosenos directores de la tangente  $\zeta^*$  son proporcionales a

$$\begin{cases} X' = x' + R \xi' + R' \xi = \alpha - R \frac{1}{R} \alpha + R' \xi = R' \xi \\ Y' = y' + R \eta' + R' \eta = \beta - R \frac{1}{R} \beta + R' \eta = R' \eta \end{cases} , \quad (3)$$

es decir, son proporcionales a  $\xi, \eta$  . Esto muestra que  $\zeta^*$  es paralela a la normal  $n$  y como ambas rectas pasan por  $C$  , coincidirán, que es lo que queríamos demostrar.

II - La longitud del arco evoluta comprendido entre dos puntos  $C, C_1$  de ésta es igual a la diferencia entre los radios de curvatura  $R, R_1$  de la curva dada  $\gamma$  en los puntos correspondientes  $P, P_1$  .



Dem. Si designamos con  $s^*$  al arco sobre la evoluta  $\gamma^*$  se tendrá  $\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = X'^2 + Y'^2$  y, por lo tanto, gracias a la (3),  $\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = R'^2$ . Sigue  $\frac{ds^*}{ds} = \pm \frac{dR}{ds}$ ,  $s^* = \pm R + c$  (con  $c$  constante). Escribiendo la relación análoga para el punto  $P_1$ ,  $s^* = \pm R_1 + c$  y restándola de la precedente se obtiene  $|s^* - s_1^*| = |R - R_1|$ , que es lo que queríamos demostrar.

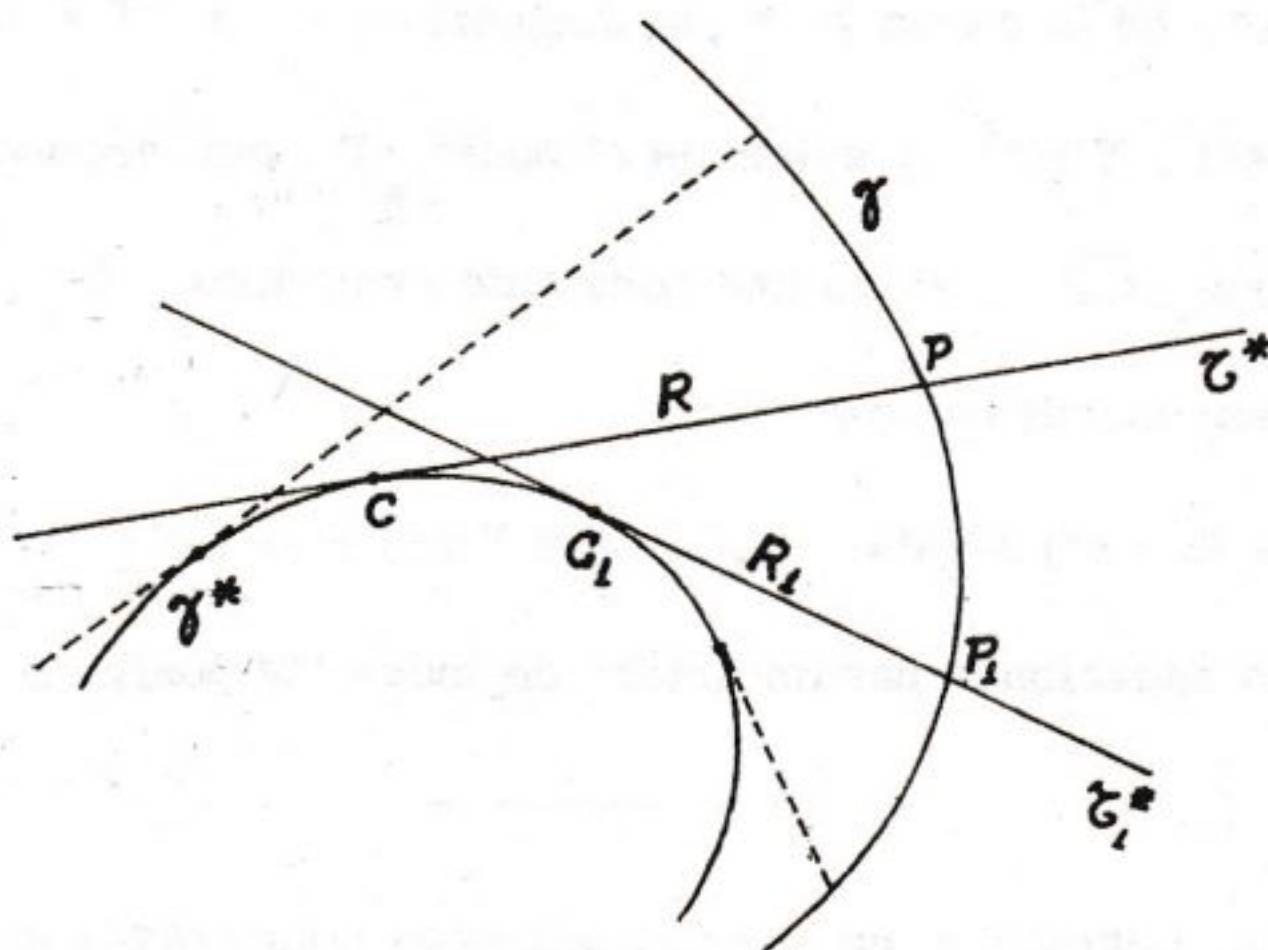


Fig. 68

Como consecuencia del teor. I se tiene que la evoluta  $\gamma^*$  de una curva  $\gamma$  es la evolvente de las normales de  $\gamma$ . Esta es la propiedad que más frecuentemente se aplica para determinar efectivamente la evoluta de una curva dada (teniendo en cuenta lo que se ha dicho en el Cap. XXVII, n° 6)

El teor. II nos permite resolver inmediatamente el problema inverso: dada una curva  $\gamma^*$ , hallar las curvas que la tienen por evoluta, que se llaman las evolventes de  $\gamma^*$ . Resulta claro que el teorema puede interpretarse así (ver fig. 68): si un hilo de longitud fija, superpuesto sobre una parte de  $\gamma^*$ , se separa de tal curva de modo que la parte separada permanezca tensa (según la tangente en aquel punto  $C$  donde el hilo se aleja de  $\gamma^*$ ), el extremo libre  $P$  del hilo describe la evolvente  $\gamma$ . Esto permite que intuitivamente se justifique el hecho que



una curva  $\gamma^*$  tenga infinitas evolventes, las que se obtendrán en su totalidad va  
riando el punto  $C_0$  de  $\gamma^*$  del que se comienza a separar el hilo. La separación  
puede realizarse en uno u otro sentido; se obtienen así, partiendo de  $C_0$ , dos  
ramas de una misma evolvente.

Analíticamente, si  $X = X(s^*)$ ,  $Y = Y(s^*)$  son las ecuaciones paramétricas re-  
feridas al arco  $s^*$  de la curva  $\gamma^*$ , la tangente en  $C$  a  $\gamma^*$  tiene por cosenos  
directores a  $X'(s^*)$ ,  $Y'(s^*)$  y entonces el punto  $P$  correspondiente de la evol-  
vente  $\gamma$  [dado que  $\overline{CP}$ , salvo una constante arbitraria  $C$ , debe ser igual  
a  $-s^*$ ] tiene por coordenadas a

$$x = X(s^*) + (c - s^*) X'(s^*) \quad , \quad y = Y(s^*) + (c - s^*) Y'(s^*) \quad .$$

Se tienen así las ecuaciones paramétricas de todas las posibles evolventes.

En este curso de Lecciones no nos detendremos sobre otras aplicaciones geo-  
métricas (estudio de los puntos singulares de las curvas, propiedades diferencia-  
les de las superficies, etc.) que serán estudiadas en los cursos paralelos de Geo-  
metría.



## CAPITULO XXIX

### Ecuaciones diferenciales ordinarias

#### 1 - GENERALIDADES.

Se llama ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  una ecuación en la que figure como incógnita una función  $y = y(x)$  de una variable  $x$  y que establezca un vínculo entre la variable  $x$ , la función  $y(x)$  y las primeras  $n$  derivadas  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  de ésta<sup>(\*)</sup>. Tal ecuación es, entonces, del tipo

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

siendo la  $f$  una determinada función definida en cierto campo del espacio, de  $n + 2$  dimensiones, de las variables  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ . Naturalmente, alguna de éstas puede no aparecer efectivamente en la ecuación dada; sin embargo, la  $y^{(n)}$  debe siempre figurar explícitamente si se desea que la (1) sea precisamente de orden  $n$  y no de orden más bajo.

Toda función  $y(x)$  que, en cierto intervalo  $I$  del eje  $x$ , sea derivable  $n$  veces y haga que resulte  $f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] \equiv 0$ , idénticamente en

-----

(\*) El adjetivo ordinaria tiene por objeto recordar que la función incógnita  $y$  depende de una sola variable  $x$ . Se pueden naturalmente considerar también ecuaciones diferenciales en las que la incógnita sea función de dos o varias variables y que establezcan un vínculo entre estas variables, la función incógnita y sus derivadas parciales hasta un cierto orden  $n$ . Tales ecuaciones se denominan ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y hablaremos de las mismas en el Cap. sucesivo. En el Cap. actual diremos simplemente ecuación diferencial en lugar de ecuación diferencial ordinaria.



I, llámase una solución o mejor, una integral de la ecuación (1). Su gráfico se denomina una curva integral de dicha ecuación (1). Resolver o integrar la ecuación dada significa determinar todas sus integrales.

Se dice que una ecuación diferencial de orden  $n$  es de forma normal cuando viene dada bajo la forma

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad , \quad (2)$$

vale decir, cuando se presenta resuelta respecto de la derivada  $y^{(n)}$  de mayor orden.

Advirtamos que, hasta expreso aviso en contrario, la variable y las funciones serán supuestas reales.

---

Para irnos haciendo una idea de cómo está constituida la totalidad de las integrales de una ecuación diferencial de orden  $n$ , comencemos a considerar algunos ejemplos muy simples.

Ejemplo 1º) Supongamos dada la siguiente ecuación diferencial de primer orden, de forma normal

$$y' = f(x) \quad . \quad (3)$$

donde  $f(x)$  es una función continua, definida en un intervalo  $I$ . Por lo que se dijo en el Cap. IX, nº 6, todas (y solamente) las soluciones de la (3) están dadas por la fórmula

$$y(x) = C + \int_a^x f(t) dt \quad , \quad (4)$$

donde  $a$  es cualquier punto fijado en  $I$  y  $C$  una constante arbitraria.

Entonces, la ecuación de primer orden (3) tiene sus infinitas integrales dadas por la (4), las que dependen de una constante arbitraria. Puede también decirse: la (3) admite una familia  $\infty$  de curvas integrales (dependientes del parámetro  $C$ ).



Ejemplo 2º) Consideremos otra particular ecuación diferencial de 1º orden de forma normal, como la siguiente

$$y' = y \quad (5)$$

Si multiplicamos ambos miembros por  $e^{-x}$  (que es siempre  $> 0$ ), se obtiene la ecuación equivalente  $e^{-x} (y' - y) = 0$  o sea,  $(e^{-x} y)' = 0$ ; de aquí se deduce que necesariamente  $e^{-x} \cdot y = C$  (con  $C$  constante arbitraria), vale decir

$$y = C e^x \quad (6)$$

Viceversa, inmediatamente se verifica que esta función satisface la (5), cualquiera sea el valor de la constante  $C$ . Entonces la ecuación de primer orden (5) tiene sus infinitas integrales dadas por la (6), dependiendo éstas de una constante arbitraria, es decir, admite una familia  $\infty^1$  de curvas integrales.

Ejemplo 3º) Consideremos la siguiente ecuación diferencial de 2º orden, de forma normal

$$y'' = f(x) \quad (7)$$

con  $f(x)$  función continua en un intervalo dado  $I$ . Fijado un punto  $a$  de  $I$ , de la (7) sigue

$$y'(x) = C_1 + \int_a^x f(s) ds$$

(con  $C_1$  constante arbitraria) y, sucesivamente,  $y(x) = C_1 x + C_2 + \int_a^x \left[ \int_a^t f(s) ds \right] dt$ ,

(con  $C_2$  constante arbitraria). Esta última fórmula puede escribirse más simplemente si se realiza en la integral  $\int_a^x \dots dt$  una integración por partes, asu-

miendo  $t-x$  como integral de  $dt$ ; se obtiene así  $y(x) = C_1 x + C_2 +$

$$\left[ \int_a^t f(s) ds \cdot (t-x) \right]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x) f(t) dt, \text{ o sea}$$

$$y(x) = C_1 x + C_2 + \int_a^x (x-t) f(t) dt \quad (8)$$

Viceversa, es bien fácil comprobar que esta  $y(x)$  verifica la (7), cuales -



quiera que sean los valores de las constantes  $C_1, C_2$ . La ecuación de segundo orden (7) tiene, entonces, sus infinitas integrales dadas por la (8), que dependen de dos constantes arbitrarias, es decir, admite una familia  $\infty^2$  de curvas integrales.

---

En base a estos ejemplos puede presumirse que, dada una ecuación diferencial de orden  $n$ , la totalidad de sus integrales deba depender de  $n$  constantes arbitrarias  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , o sea, que sus curvas integrales formen una familia  $\infty^n$ .

Pero, más que de los ejemplos precedentes, nos lleva a tal presunción el hecho que, dada una familia  $\infty^n$  de curvas planas, se puede en general construir una ecuación diferencial de orden  $n$  a la que satisfagan todas las curvas de la familia dada.

Sea, por ejemplo,  $n = 1$  y supongamos que la familia  $\infty^1$  de curvas esté representada por la ecuación

$$\varphi(x, y, C) = 0 \quad (9)$$

Si, para todo  $C$  de un cierto intervalo, esta ecuación define implícitamente la  $y$  como función de  $x$ , derivándola con respecto de  $x$  se tendrá

$$\varphi_x(x, y, C) + \varphi_y(x, y, C) \cdot y' = 0 \quad (10)$$

y entonces, si es posible eliminar el parámetro  $C$  entre las (9) y (10) se obtendrá una ecuación del tipo

$$f(x, y, y') = 0 \quad (11)$$

es decir, una ecuación diferencial del primer orden que tiene, seguramente, entre sus curvas integrales, a todas las curvas de la familia (9).

Un procedimiento análogo vale en el caso  $n = 2$ . Dada una familia  $\infty^2$  de curvas planas mediante la ecuación



$$\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0, \quad (12)$$

se podrán, si para todo punto  $(C_1, C_2)$  de un cierto campo la (12) define implícitamente la  $y$  como función de  $x$ , obtener derivando una o dos veces respecto de  $x$  las dos ecuaciones

$$\varphi_x + \varphi_y \cdot y' = 0, \quad \varphi_{xx} + 2\varphi_{xy} \cdot y' + \varphi_{yy} \cdot y'^2 + \varphi_y \cdot y'' = 0. \quad (13)$$

Si resulta posible eliminar  $C_1$  y  $C_2$  entre la (12) y las (13) se llegará a una ecuación del tipo

$$f(x, y, y', y'') = 0 \quad (14)$$

es decir, a una ecuación diferencial de segundo orden que se satisface para todas las curvas (12).

Resulta claro que el procedimiento recién descrito en los casos  $n=1$  y  $n=2$  se extiende inmediatamente a cualquier valor de  $n$ . Es necesario, sin embargo, advertir ya que la ecuación diferencial a la que se llega, si bien se satisface para todas las curvas de la familia dada, puede muy bien aceptar otras soluciones, es decir, que tal familia no constituya la totalidad de sus curvas integrales.

Mostraremos, sobre tres ejemplos relativos a ecuaciones de 1<sup>er</sup> orden, los distintos casos que pueden presentarse.

Ejemplo 4<sup>o</sup>) Consideremos la familia  $\infty^1$  de curvas definidas por la ecuación

$$y = x - 1 + C e^{-x}; \quad (15)$$

derivando ésta con respecto de  $x$  se obtiene  $y' = 1 - C e^{-x}$  y eliminando  $C$  entre las dos ecuaciones escritas se llega a la ecuación diferencial de 1<sup>er</sup> orden

$$y' + y - x = 0. \quad (16)$$

Esta se satisface con todas las funciones (15) y es fácil ver que no admite otras integrales además de éstas. En efecto; multiplicando la (16) por  $e^{-x}$  se



obtiene  $e^x (y + y') = x e^x$ , o sea,  $(e^x y)' = x e^x$ ; debe de ahí ser, necesariamente,  $e^x y = C + \int x e^x dx = C + (x - 1) e^x$ , de la que sigue la (15).

Ejemplo 5º) Consideremos la familia  $\infty^1$  de curvas (hipérbolas equiláteras) dadas por la ecuación

$$y = \frac{1}{x + C} \quad (17)$$

Derivando con respecto a  $x$  se obtiene  $y' = -\frac{1}{(x+C)^2}$  y, con la eliminación de  $C$ , se llega a la ecuación diferencial

$$y' + y^2 = 0 \quad (18)$$

Todas las curvas (17) satisfacen esta ecuación; pero también queda verificada, evidentemente, por la función  $y = 0$ , que no se puede obtener de la (17) para ningún valor de  $C$ . Sin embargo es de observar que podría obtenerse como límite para  $C \rightarrow \infty$  o sea, como diremos brevemente, dando a  $C$  el valor infinito.

También en este caso podemos fácilmente probar que no se tienen otras integrales fuera de las dadas por la (17) [incluyendo para  $C$  el valor infinito]. En efecto; si  $y(x)$  es una integral de la (18) en cierto intervalo  $I$ , será o idénticamente nula o existirá un intervalo  $I' \subseteq I$  en el que  $y(x) \neq 0$ . En  $I'$  la (18) puede escribirse  $\frac{y'}{y^2} + 1 = 0$ , o sea,  $(\frac{1}{y})' = 1$ , de donde sigue  $\frac{1}{y} = x + C$ , o sea la (17).

Ejemplo 6º) Consideremos la familia de rectas

$$y = 2 C x - C^2 \quad ; \quad (19)$$

eliminando  $C$  entre esta ecuación y la  $y' = 2C$ , se obtiene la ecuación diferencial del primer orden  $4(y - xy') + y'^2 = 0$  (que no es de forma normal). Esta tiene como curvas integrales todas las rectas (19); pero, como se verifica inmediatamente, también queda satisfecha por la función  $y = x^2$ , no pudiendo ésta obtenerse de la (19) para ningún valor de  $C$  (sea éste finito o infinito).



to)(\*) .

En base a cuanto precede podemos presumir que las curvas integrales de una ecuación diferencial de orden  $n$  constituyen comúnmente una familia  $\infty^n$  representable mediante una ecuación del tipo

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad \text{o, más en general,} \quad \varphi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, (20)$$

donde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  son constantes arbitrarias con la advertencia, sin embargo, que pueden existir curvas integrales que se obtienen de la (20) solamente cuando se considere, para algunas o para todas las constantes arbitrarias, valores infinitos, o inclusive, que no se puedan de ninguna manera considerarlas entre las curvas (20). Se puede decir que la (20) define la integral general de la ecuación diferencial dada. Cada curva integral deducida de la (20) dando a las constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  valores numéricos particulares recibe el nombre de integral particular. Por último, toda curva integral que no esté entre las proporcionadas por la integral general, se denomina una integral singular.

Todas estas nociones serán precisadas más adelante; por ahora las hemos introducido para tener una orientación inicial sobre la naturaleza del problema de la integración de las ecuaciones diferenciales.

## 2 - SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Conviene considerar también los sistemas constituidos por un cierto número  $p$  de ecuaciones diferenciales con  $p$  funciones incógnitas  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$ , donde cada una de las  $y_k(x)$ , ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) interviene con sus derivadas hasta las de un cierto orden  $n_k \geq 1$  (que, en general, no será el mismo para todas

(\*) Dejamos al lector la tarea de verificar que la curva  $y = x^2$  es la envolvente de las rectas (19). No profundizaremos aquí el estudio de este ejemplo que cae en un caso (ecuación de Clairaut) sobre el que volveremos más adelante (nº 7)



las incógnitas) . Diremos, en ese caso, que el sistema es de orden  $n_1$  con respecto a  $y_1$  , de orden  $n_2$  con respecto a  $y_2$ , ... , de orden  $n_p$  con respecto a  $y_p$  , y concisamente lo simbolizamos

$$f_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_1^{(n_1)}, \dots, y_p, y_p', \dots, y_p^{(n_p-1)}, y_p^{(n_p)}) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, p). \quad (1)$$

Se dirá, además, que el sistema es de forma normal cuando ha sido dado resuelto respecto de las derivadas parciales de orden máximo  $y_1^{(n_1)}, y_2^{(n_2)}, \dots, y_p^{(n_p)}$  de las funciones incógnitas, o sea es de la forma

$$y_i^{(n_i)} = F_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_p, y_p', \dots, y_p^{(n_p-1)}), \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2)$$

Toda  $n$ -pla de funciones  $[y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)]$  que verifique las (1) o (2) recibe el nombre de una solución o una integral del sistema; a tal  $n$ -pla le corresponde una curva integral en el espacio de  $p+1$  dimensiones (con las coordenadas  $x, y_1, y_2, \dots, y_p$  ).

Un ejemplo clásico de sistema de ecuaciones diferenciales lo proporciona la mecánica racional. Un punto material libre  $P$  , de masa  $m$  , se mueve en el espacio bajo la acción de una fuerza cuyas componentes  $X, Y, Z$  dependen, de un modo conocido, del tiempo  $t$  , de la posición del punto (es decir, de sus coordenadas  $x, y, z$ ) y de su velocidad (o sea, de las derivadas  $x', y', z'$  de las citadas coordenadas respecto del tiempo  $t$ ) . Entonces, la ley fundamental de la dinámica (masa por aceleración = fuerza) proporciona las siguientes tres ecuaciones

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{m} X(t, x, y, z, x', y', z') \\ y'' = \frac{1}{m} Y(t, x, y, z, x', y', z') \\ z'' = \frac{1}{m} Z(t, x, y, z, x', y', z') \end{cases}, \quad (3)$$

que constituyen precisamente un sistema de tres ecuaciones diferenciales en las tres incógnitas  $x(t), y(t), z(t)$  , de  $2^\circ$  orden respecto de cada una de las incógnitas y de forma normal.

Es importante observar que el sistema (1) puede siempre susti —



tuirse por un sistema equivalente de  $n_1 + n_2 + \dots + n_p$  ecuaciones diferenciales con  $n_1 + n_2 + \dots + n_p$  incógnitas, de modo que este último sea de 1<sup>er</sup> orden respecto de todas las incógnitas. Basta, junto a cada una de las  $y_k$  que aparece en el sistema (1), introducir como nuevas incógnitas sus derivadas hasta las de orden  $n_k - 1$ . En efecto; si  $(y_1, y_2, \dots, y_p)$  es una solución de (1), poniendo

$$y_k = y_{k0}, \quad y'_k = y_{k1}, \quad y''_k = y_{k2}, \quad \dots, \quad y_k^{n_k-1} = y_{k, n_k-1}, \quad (k=1, 2, \dots, p),$$

las  $n_1 + n_2 + \dots + n_p$  funciones  $y_{10}, y_{11}, \dots, y_{1, n_1-1}, \dots, y_{p0}, \dots, y_{p, n_p-1}$  constituyen, manifiestamente, una solución de este otro sistema

$$\begin{cases} y'_{k0} = y_{k1}, \quad y'_{k1} = y_{k2}, \quad \dots, \quad y'_{k, n_k-2} = y_{k, n_k-1}, \quad (k=1, 2, \dots, p) \\ f_i(x, y_{10}, y_{11}, \dots, y_{1, n_1-1}, y'_{1, n_1-1}, \dots, y_{p0}, y_{p1}, \dots, y_{p, n_p-1}, y'_{p, n_p-1}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(i=1, 2, \dots, p)

que está formado por  $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_p - 1) + p = n_1 + n_2 + \dots + n_p$  ecuaciones diferenciales, todas de 1<sup>er</sup> orden. Viceversa, si  $(y_{10}, y_{11}, \dots, y_{1, n_1-1}, \dots, y_{p0}, y_{p1}, \dots, y_{p, n_p-1})$  es una solución del sistema (4), las funciones  $y_1 = y_{10}, y_2 = y_{20}, \dots, y_p = y_{p0}$  nos proporcionan una del sistema (1). Entonces las (4), que son de 1<sup>er</sup> orden con respecto a todas las incógnitas, son equivalentes a las (1).

Nótese que partiendo de un sistema de forma normal, el sistema equivalente de ecuaciones de 1<sup>er</sup> orden es también de forma normal, ya que, si en lugar de las (1) hubiéramos considerado las (2), habríamos obtenido, en vez del sistema (4), este otro:

$$\begin{cases} y'_{k0} = y_{k1}, \quad y'_{k1} = y_{k2}, \quad \dots, \quad y'_{k, n_k-1} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, p) \\ y'_{i, n_i-1} = F_i(x, y_{10}, y_{11}, \dots, y_{1, n_1-1}, \dots, y_{p0}, y_{p1}, \dots, y_{p, n_p-1}), \quad (i=1, 2, \dots, p) \end{cases} \quad (5)$$

Por ejemplo, el sistema (3) puede sustituirse por uno de seis ecuaciones diferenciales del 1<sup>er</sup> orden con seis funciones incógnitas, asumiendo como tales, ade-



más de las  $x, y, z$ , también sus derivadas primeras. Poniendo  $x' = u$ ,  $y' = v$ ,  $z' = w$ , el referido sistema equivalente se escribe

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = u, \quad y' = v, \quad z' = w \\ u' = \frac{1}{m} X(t, x, y, z, u, v, w) \\ v' = \frac{1}{m} Y(t, x, y, z, u, v, w) \\ w' = \frac{1}{m} Z(t, x, y, z, u, v, w) \end{array} \right. \quad (6)$$

Es importante hacer notar que esta transformación de un sistema de ecuaciones diferenciales en uno equivalente de ecuaciones todas de 1<sup>er</sup> orden, vale también en el caso  $p=1$ , es decir, en el caso de una sola ecuación diferencial de orden  $n$  en una incógnita  $y(x)$ , como la

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (7)$$

o la

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (8)$$

Tal ecuación equivale a un sistema de  $n$  ecuaciones de 1<sup>er</sup> orden con  $n$  incógnitas. Si introducimos las nuevas incógnitas  $y_0 = y$ ,  $y_1 = y'$ ,  $y_2 = y''$ , ...,  $y_{n-1} = y^{(n-1)}$  tal sistema se escribe, en el caso de la (7)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_0 = y_1, \quad y'_1 = y_2, \quad \dots, \quad y'_{n-2} = y_{n-1}, \\ f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y'_{n-1}) = 0 \end{array} \right. \quad (7')$$

y, en el caso de la (8) (de forma normal):

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_0 = y_1, \quad y'_1 = y_2, \quad \dots, \quad y'_{n-2} = y_{n-1}, \\ y'_{n-1} = F(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}) \end{array} \right. \quad (8')$$

Sin pérdida de generalidad podemos entonces referirnos siempre a sistemas de  $p > 1$  ecuaciones diferenciales, todas de 1<sup>er</sup> orden, con  $p$  funciones incógnitas, es decir, del tipo

$$f_i(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_p, y'_p) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, p), \quad (9)$$

o, si el sistema es de forma normal



$$y_i' = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad . \quad (10)$$

Podemos darnos una idea de como está constituida, en general, la totalidad de las integrales de un sistema de ecuaciones diferenciales, tomando en consideración el caso particular del sistema (7')  $\lfloor \bar{u} \, \S' \rfloor$  de  $n$  ecuaciones diferenciales de 1<sup>er</sup> orden, equivalente a la ecuación diferencial (7)  $\lfloor \bar{u} \, (8) \rfloor$  de orden  $n$ . Por lo que ha sido dicho en el n<sup>o</sup> 1 sucederá comúnmente que este sistema admitirá, además de eventuales integrales singulares, una integral general dependiente de  $n$  constantes arbitrarias.

Se puede presumir que esta propiedad, válida en el caso particular en consideración, se cumpla en general; es decir, que se pueda afirmar que, comúnmente, un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo (9) o (10) admitirá una integral general dependiente de  $p^{(*)}$  constantes arbitrarias (además de, eventualmente, integrales singulares). También esta afirmación será justificada y precisada más adelante.

### 3 - CONDICIONES INICIALES.

En la teoría y en las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, el problema que tiene mayor interés no es el de determinar todas las integrales de una ecuación o de un sistema de ecuaciones diferenciales<sup>(\*\*)</sup>, sino el de determinar aquellas integrales que satisfacen ciertas condiciones prefijadas.

Por ejemplo, tomando nuevamente en consideración el sistema (3) del n<sup>o</sup> pre-

-----

(\*) Si se quiere hacer referencia al primitivo sistema (1)  $\lfloor$  o  $\rfloor$  (2) se puede entonces, decir que su integral general depende de  $n_1 + n_2 + \dots + n_p$  constantes arbitrarias, es decir, tantas como la suma de los órdenes del sistema respecto de las variables.

(\*\*) Por otra parte, salvo en casos muy particulares, este problema presenta dificultades insuperables.



cedente, relacionado con la dinámica del punto, en general no interesa la determinación de todos los posibles movimientos del punto  $P$  bajo la acción de la fuerza dada, sino que interesa, sobre todo, el estudio de aquel particular movimiento en el que el punto  $P$  parte de una determinada posición inicial con una determinada velocidad inicial. Es decir que interesa aquella integral particular  $[x(t), y(t), z(t)]$  para la que, en un determinado instante  $t_0$  (instante inicial), las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  asumen valores asignados a priori  $x_0, y_0, z_0$  (coordenadas de la posición inicial  $P_0$  del punto  $P$ ) y sus derivadas primeras  $x'(t)$ ,  $y'(t)$ ,  $z'(t)$  asumen valores también fijados previamente  $u_0, v_0, w_0$  (componentes de la velocidad inicial). En otras palabras, lo que importa es calcular aquella integral del sistema, que verifica las condiciones  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ ,  $z(t_0) = z_0$ ,  $x'(t_0) = u_0$ ,  $y'(t_0) = v_0$ ,  $z'(t_0) = w_0$ .

Si en vez de referirnos al sistema (3) del  $n^o$  precedente, pensamos en el sistema equivalente de seis ecuaciones de  $1^{er}$  orden [véase la (6) del  $n^o$  precedente], vemos que las condiciones a que recién nos referimos, prefijan los valores que, para  $t = t_0$ , deben asumir las seis incógnitas  $x, y, z, u, v, w$ .

Pasando al caso general del sistema (9) [o (10)] del número precedente, de  $p$  ecuaciones diferenciales de  $1^{er}$  orden con  $p$  funciones incógnitas, podemos entonces prever que, en relación al mismo, tenga interés particular el siguiente problema, llamado problema de valores iniciales o de Cauchy: determinar una integral  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$  de tal sistema de modo que se verifiquen las siguientes  $p$  condiciones

$$y_1(x_0) = u_1, \quad y_2(x_0) = u_2, \quad \dots, \quad y_p(x_0) = u_p, \quad (1)$$

donde  $x_0, u_1, u_2, \dots, u_p$  son números fijados previamente. Las (1) se llaman las condiciones iniciales (\*); geométricamente, tales condiciones

(\*) Naturalmente se pueden también imponer condiciones de otro tipo, originándose así muchos otros problemas, de los que aquí no nos ocuparemos.



significan que se requiere de la curva integral  $y_1 = y_1(x)$ ,  $y_2 = y_2(x)$ , .....  
 $\dots, y_p = y_p(x)$  del espacio  $S_{p+1}$  que pase por un punto asignado  $(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

Se intuye fácilmente que, en general, este problema debe admitir soluciones. Basta pensar, como ya ha sido dicho en el n° 2, que el sistema considerado tiene, comúnmente, una integral general  $y_i = y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_p)$ , ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) que depende de  $p$  constantes arbitrarias  $C_1, C_2, \dots, C_p$ . De ahí que, si se desea una integral particular que verifique las (1), resulta claro que la misma debe obtenerse de la citada integral general eligiendo las constantes arbitrarias de modo que resulte  $y_i(x_0, C_1, C_2, \dots, C_p) = u_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, p$ ). Se tiene así un sistema de  $p$  ecuaciones con  $p$  incógnitas  $C_1, C_2, \dots, C_p$  el que es de presumir tenga, en general, soluciones y, más aún, una sola<sup>(\*)</sup>  $C_1 = \gamma_1$ ,  $C_2 = \gamma_2, \dots, C_p = \gamma_p$ . Entonces, las  $y_i = y_i(x, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ , ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) proporcionan aquella integral particular que verifica las condiciones iniciales (1).

Observemos todavía, refiriéndonos en particular al sistema (7')  $\int u$  (8') del n° precedente, equivalente a la ecuación diferencial de orden  $n$ , (7)  $\int u$  (8) también del n° precedente, en la incógnita  $y(x)$  y teniendo en cuenta que las  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  no son sino las  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ , se obtendrá el enunciado del problema de los valores iniciales o de Cauchy para una ecuación diferencial de orden  $n$ : determinar una integral  $y(x)$  de tal ecuación de modo que se verifiquen las siguientes  $n$  condiciones iniciales

$$y(x_0) = u_0, \quad y'(x_0) = u_1, \quad y''(x_0) = u_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}, \quad (2)$$

donde  $x_0, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  son números fijados a priori. Nótese que, en el -----

(\*\*) Lo que se logra limitando, en caso necesario, los intervalos en que pueden elegirse  $x_0, u_1, u_2, \dots, u_p$  y en los que pueden variar  $c_1, c_2, \dots, c_p$



caso  $n = 1$ , las (2) significan que la curva integral  $y = y(x)$  debe pasar por un punto determinado  $(x_0, u_0)$ . En el caso  $n = 2$  significan que la curva integral, además de pasar por el punto  $(x_0, u_0)$ , debe tener en tal punto una recta tangente también prefijada (de coeficiente angular  $u_1$ ).

#### 4 - INTEGRACION DE ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN, DE FORMA NORMAL.

Ilustraremos ahora las cosas dichas en los  $n^{\text{os}}$  precedentes, estudiando algunos tipos particulares de ecuaciones diferenciales de  $1^{\text{er}}$  orden, de forma normal. Para tales tipos de ecuaciones, lograremos dar la expresión de la integral general bajo forma explícita  $y = y(x, C)$  o, más comúnmente, bajo forma implícita  $\varphi(x, y, C) = 0$ , con las funciones  $y(x, C)$  o  $\varphi(x, y, C)$  expresadas a través de integrales indefinidas de funciones conocidas. Llegaremos, como se acostumbra a decir, a la resolución de las ecuaciones diferenciales consideradas por medio de cuadraturas (o sea, por medio del cálculo de integrales indefinidas).

1º) Ecuaciones con variables separables. Se dice que una ecuación diferencial de primer orden, de forma normal  $y' = f(x, y)$  tiene sus variables separables cuando su segundo miembro  $f(x, y)$  es el producto de una función sólo de  $x$  por una función sólo de  $y$ , es decir, cuando es del tipo

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (*) \quad (1)$$

Supongamos que en ciertos intervalos  $I$  del eje  $x$ ,  $J$  del eje  $y$  sean  $f(x)$ ,  $g(y)$  funciones continuas, respectivamente. Fijado un punto  $x_0$  en  $I$  y un punto  $y_0$  en  $J$  consideremos para la (1) el problema de Cauchy que consiste en buscar las integrales  $y(x)$  que verifiquen la condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

-----

(\*) Entran en esta categoría las ecuaciones (3), (5), (18) del n° 1.



Comencemos observando que si resulta  $g(y_0) = 0$ , una solución la constituye, evidentemente, la función constante  $y = y_0$ .

Supongamos ahora que sea  $g(y_0) \neq 0$ . Existirá, entonces, en el intervalo  $J$  un entorno  $J_0$  de  $y_0$  en el que resulta  $g(y) \neq 0$ . Por lo tanto, admitiendo que haya una integral  $y(x)$  que verifique las (1), (2), se podrá encontrar en  $I$  un entorno  $I_0$  de  $x_0$  tal que, mientras  $x$  varía en él,  $y(x)$  varía en  $J_0$ , resultando, por ende,  $g[y(x)] \neq 0$ . De la (1) sigue, entonces, que para  $x$  variable en  $I_0$  tal integral  $y(x)$  debe verificar la  $\frac{y'(x)}{g[y(x)]} = f(x)$ , de

la que, integrando entre  $x_0$  y  $x$  se obtiene  $\int_{x_0}^x \frac{y'(x)}{g[y(x)]} dx = \int_{x_0}^x f(x) dx$ . Por la regla de integración por sustitución, el primer miembro es igual a  $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)}$

y se tiene, entonces,  $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) dx$ . Si admitimos conocer las primitivas  $G(y)$ ,  $F(x)$  de las funciones  $\frac{1}{g(y)}$ ,  $f(x)$  respectivamente, se tendrá  $G[y(x)] - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$ .

Entonces, si existe una integral de la (1) que verifique la (2), con la hipótesis  $g(y_0) \neq 0$ , la misma debe necesariamente estar definida implícitamente por la ecuación

$$G(y) - F(x) - [G(y_0) - F(x_0)] = 0 \quad (3)$$

Viceversa; considerada esta ecuación  $\square$  que tiene evidentemente  $(x_0, y_0)$  como punto solución  $\square$  dado que la derivada de su primer miembro respecto de  $y$  vale  $\frac{1}{g(y)}$  o sea que  $G'(y_0) = \frac{1}{g(y_0)} \neq 0$ , el teorema de Dini (Cap. XXVII, n° 1) nos asegura que, en el entorno de  $(x_0, y_0)$  la (3) define implícitamente una función derivable  $y = y(x)$  para la que se tiene  $y(x_0) = y_0$  y cuya derivada resulta  $y'(x) = - \frac{F'(x)}{G'(y)} = f(x) g(y)$ . Tal  $y(x)$  verifica, entonces, las (1) y (2).

Podemos en suma enunciar que el problema de Cauchy planteado por las (1) y



(2) admite siempre, al menos, una solución (en un oportuno entorno  $I$  del punto  $x_0$ ) y admite sólo una si  $g(y_0) \neq 0$ .

A los efectos prácticos, para integrar la (1) se procede así. Se consideran primeramente las eventuales soluciones constantes  $y = \alpha$ ,  $y = \beta$ , .... correspondientes a valores de  $y$  que anulan la función  $g(y)$ . Después, dejando aparte esas soluciones, se separan las variables escribiendo la (1) bajo la forma  $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$  y sucesivamente se escribe que las integrales indefinidas de los dos miembros difieren en una constante arbitraria  $c$ :

$$\int \frac{dy}{g(y)} = c + \int f(x) dx.$$

Calculadas las integrales, se llega a la

$$G(y) = c + F(x), \quad (4)$$

que coincide con la (3) cuando se ponga  $c = G(y_0) - F(x_0)$ . La (4) da la integral general de la (1) bajo forma implícita. Si se desea la integral particular que verifica la (2), se determina  $c$  de modo que resulte  $G(y_0) = c + F(x_0)$ , obteniendo así para  $c$  el valor antes indicado. Las eventuales integrales constantes  $y = \alpha$ ,  $y = \beta$ , .... pueden ser integrales particulares o integrales singulares; eso se decidirá caso por caso.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y' = xy^2, \quad (5)$$

que, por el momento, tiene la solución  $y \equiv 0$ . Separando las variables se obtiene

$$\frac{dy}{y^2} = x dx$$

e, integrando,  $-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}(x^2 + c)$ , de donde

$$y = -\frac{2}{x^2 + c} \quad (6)$$

y ésta es la integral general. La integral  $y \equiv 0$  se obtiene dando a  $c$  el va-



lor  $\infty$  ; es, entonces, una integral particular. Si se quiere aquella integral que verifica la condición inicial  $y(1) = -1$  , basta determinar  $c$  de modo que la (6) quede satisfecha para  $x = 1$  obteniéndose una sola integral dada por

$$y = -\frac{2}{x^2 + 1} .$$

Como otro ejemplo consideremos la

$$y' = y^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

También en este caso se tiene la solución  $y \equiv 0$  . Separando las variables se obtiene  $y^{-\frac{2}{3}} dy = dx$  , e integrando  $3y^{\frac{1}{3}} = x + c$  , por lo que se llega a la integral general

$$y = \left( \frac{x + c}{3} \right)^3 . \quad (8)$$

La precedente solución  $y \equiv 0$  no puede en este caso obtenerse de la (8) para ningún valor finito o infinito de  $c$  ; es, entonces, una integral singular. Si se impone la condición inicial  $y(1) = 0$  se obtienen dos soluciones : una es la integral particular  $y = \left( \frac{x - 1}{3} \right)^3$  ; la otra es la integral singular  $y \equiv 0$  .

20) Ecuaciones del tipo  $y' = f(ax + by)$  . Supongamos dada la ecuación diferencial

$$y' = f(ax + by) \quad (9)$$

con  $f$  función continua y  $a, b$  constantes distintas ambas de cero . Tomando como nueva incógnita la función  $u = ax + by$  , se obtiene  $y = \frac{u - ax}{b}$  ,  $y' = \frac{u' - a}{b}$  por lo que la (9) se transforma en la  $\frac{u' - a}{b} = f(u)$  , es decir,

$$u' = a + b f(u) ,$$

que tiene sus variables separables. A toda integral  $u(x)$  de ésta corresponde la integral  $y(x) = \frac{u(x) - ax}{b}$  de la (9) .

Por ejemplo, dada la  $y' = (x + y)^2$  , poniendo  $u = x + y$  , se encuentra para  $u$  la ecuación  $u' = u^2 + 1$  . Separando las variables se obtiene  $\frac{du}{1 + u^2} = dx$  ,  $\text{arc tg } u = x + c$  ,  $u = \text{tg}(x + c)$  . La ecuación propuesta tiene, entonces, la inte-



gral general

$$y = \operatorname{tg}(x + c) - x$$

3º) Ecuaciones homogéneas. Son las del tipo

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (10)$$

es decir, con el segundo miembro función continua homogénea de grado cero.

Asumiendo como nueva incógnita la función  $u = \frac{y}{x}$ , se obtiene  $y = ux$ ,  $y' = u'x + u$ , por lo que la (10) se transforma en  $u + xu' = f(u)$ , o sea,

$$u' = \frac{f(u) - u}{x},$$

que tiene sus variables separables. A cada integral  $u(x)$  de ésta le corresponde la integral  $y(x) = xu(x)$  de la (10).

Por ejemplo, la ecuación  $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$  se transforma en la  $u' = \frac{\sqrt{1-u^2}}{x}$  que, en primera instancia, tiene soluciones constantes  $u = -1$ ,  $u = 1$ . Separando las variables se obtiene después  $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} u = \log|x| + c$ ,  $u = \operatorname{sen}(\log|x| + c)$ .

La ecuación propuesta tiene, entonces, la integral general  $y = x \operatorname{sen}(\log|x| + c)$  y las dos integrales singulares  $y = x$ ,  $y = -x$ .

4º) Ecuaciones del tipo  $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ . Consideremos la ecuación

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) \quad (11)$$

con  $f$  función continua y  $a, b, c, a', b', c'$  constantes tales que resulte  $ab' - a'b \neq 0$ ,  $c$  y  $c'$  no simultáneamente nulas. (\*)

(\*) Si  $ab' - a'b = 0$ , suponiendo por ejemplo que  $a, b$  no sean ambas nulas, se puede poner  $a' = ka$ ,  $b' = kb$  y la (11) se transforma en  $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c'}\right)$ , y es del tipo (9). Si  $c = c' = 0$ , se podrá escribir  $y' = f\left(\frac{a + b \frac{y}{x}}{a' + b' \frac{y}{x}}\right)$ , y es del tipo (10).



Con las hipótesis hechas, las dos rectas  $ax + by + c = 0$  ,  $a'x + b'y + c' = 0$  tienen en común un punto  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  . Determinado tal punto cambiamos la variable  $x$  por una nueva variable  $\xi$  , y la incógnita  $y$  en una nueva incógnita  $\eta$  , poniendo  $x = \xi + \alpha$  ,  $y = \eta + \beta$  con lo que hemos realizado, en el plano  $xy$  una traslación de ejes llevando el origen al punto  $(\alpha, \beta)$  .

Resulta así

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\eta + \beta)}{d(\xi + \alpha)} = \frac{d\eta}{d\xi} , \quad ax + by + c = a\xi + b\eta , \quad a'x + b'y + c' = a'\xi + b'\eta ,$$

y la (11) toma la forma

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a'\xi + b'\eta}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{\eta}{\xi}}{a' + b'\frac{\eta}{\xi}}\right) .$$

Esta ecuación es del tipo (10) . A cada integral  $\eta = \eta(\xi)$  de ésta le corresponde la integral  $y = \beta + \eta(x - \alpha)$  de la (11) .

5º) Ecuaciones lineales . Una ecuación del primer orden, de forma normal  $y' = f(x, y)$  , se denomina lineal cuando su segundo miembro es una función lineal de  $y$  . Se trata entonces de una ecuación del tipo

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x) \quad (12)$$

con  $\alpha(x)$  ,  $\beta(x)$  funciones continuas en cierto intervalo  $I$  del eje  $x$  . Si  $\beta(x) \equiv 0$  , la ecuación además de lineal es homogénea (con sus variables separables) ; en caso contrario se dice que es lineal no homogénea .

En todos los casos la (12) se integra observando que, fijando arbitrariamente una primitiva  $\int \alpha(x) dx$  de la función  $\alpha(x)$  , se tendrá  $e^{-\int \alpha(x) dx} \neq 0$  , por lo que la (12) es equivalente a la

$$e^{-\int \alpha(x) dx} [y' - \alpha(x)y] = \beta(x) e^{-\int \alpha(x) dx}$$

Pero el primer miembro de esta ecuación es evidentemente igual a la derivada de  $y e^{-\int \alpha(x) dx}$  , de lo que se deduce que, para toda integral  $y$  debe ser

$$y e^{-\int \alpha(x) dx} = c + \int \beta(x) e^{-\int \alpha(x) dx} dx ,$$



de modo que las integrales  $y$  deben necesariamente estar incluidas en la fórmula

$$y = e^{\int \alpha(x) dx} \left[ c + \int \beta(x) e^{-\int \alpha(x) dx} dx \right]. \quad (13)$$

Viceversa se ve inmediatamente que esta función verifica la (12). Por lo tanto la (13) proporciona la integral general de la ecuación propuesta, y no hay integrales singulares. (\*)

Considérese, por ejemplo, la ecuación  $y' = \frac{y}{x} + x \cos x$ . Multiplicando ambos miembros por  $e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$ , se obtiene sucesivamente

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \cos x, \quad \left(\frac{y}{x}\right)' = \cos x, \quad \frac{y}{x} = c + \sin x, \quad y = cx + x \sin x.$$

Si se desea la integral particular que verifica la condición inicial  $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ , se ve que es necesario asumir  $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

6º) Ecuaciones de Bernouilli. Son las del tipo

$$y' = \alpha(x) \cdot y + \beta(x) y^n, \quad (14)$$

donde  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  son funciones continuas y  $n$  es una constante real que se puede suponer distinta de cero y de uno, para no caer nuevamente en los casos ya vistos. La (14) se transforma en una ecuación lineal si se asume como nue

va incógnita la función  $u = y^{1-n}$ . Se obtiene, en efecto,  $y = u^{\frac{1}{1-n}}$ ,  $y' = \frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} u'$ , de modo que la (14) toma la forma  $\frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} u' = \alpha(x) u^{\frac{1}{1-n}} + \beta(x) u^{\frac{n}{1-n}}$ ; dividiendo por  $u^{\frac{n}{1-n}}$  se tiene finalmente la ecuación lineal

$$u' = (1-n) \alpha(x) \cdot u + (1-n) \beta(x).$$

A cada integral  $u(x)$  de ésta, corresponderá la integral  $y(x) = [u(x)]^{\frac{1}{1-n}}$  de la (14). Si  $n > 0$  es necesario considerar aparte la integral  $y \equiv 0$ .

(\*) Entran en esta categoría las ecuaciones (5), (16) del nº 1, que ya habían sido integradas por el procedimiento ahora descripto.



Consideremos, por ejemplo, la ecuación  $y' = 2y \operatorname{tg} x + 2\sqrt{y}$ . Poniendo  $u = \sqrt{y}$ , se deduce:  $y = u^2$ ,  $y' = 2u u'$ ,  $2u u' = 2u^2 \operatorname{tg} x + 2u$  y, en consecuencia, la ecuación lineal  $u' = u \operatorname{tg} x + 1$ . Para integrar esta última multipliquemos por  $e^{-\int \operatorname{tg} x \, dx} = e^{\log \cos x} = \cos x$ , obteniendo así  $u' \cos x - u \operatorname{sen} x = \cos x$ ,  $(u \cdot \cos x)' = \cos x$ ,  $u \cos x = \operatorname{sen} x + c$ ,  $u = \operatorname{tg} x + \frac{c}{\cos x}$ . Llegamos así a que la integral general de la ecuación propuesta es  $y = (\operatorname{tg} x + \frac{c}{\cos x})^2$ . La integral  $y \equiv 0$  no puede obtenerse de ésta para ningún valor de  $c$ , constituyendo entonces una integral singular.

7º) Ecuaciones diferenciales exactas. Sea  $X(x, y) \, dx + Y(x, y) \, dy$  una forma diferencial lineal con  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$  funciones continuas conocidas en un intervalo  $A$  del plano  $xy$ , que admiten derivadas parciales primeras continuas. Igualando a cero tal forma, se obtiene la ecuación:

$$X(x, y) \, dx + Y(x, y) \, dy = 0 \quad (15)$$

que se puede pensar como una ecuación diferencial del primer orden tanto en la incógnita  $y = y(x)$  como en la incógnita  $x = x(y)$ . Fijado en  $A$  un punto  $(x_0, y_0)$  si resulta  $Y(x_0, y_0) \neq 0$  la (15) puede escribirse, en un entorno de  $P$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{X(x, y)}{Y(x, y)} \quad (16)$$

y constituye una ecuación de primer orden de forma normal en la función incógnita  $y(x)$ ; si resulta  $X(x, y) \neq 0$  puede escribirse, en un entorno de  $P$ ,

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \quad (17)$$

dando lugar así a una ecuación diferencial de primer orden de forma normal en la incógnita  $x(y)$ . Es de notar que la reducción de la (15) a las formas (16) o (17) no es posible en aquellos eventuales puntos donde sea  $X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0$ .

Observemos también que, viceversa, toda ecuación diferencial del primer orden, de forma normal  $y' = f(x, y)$ , puede tomar la forma de la (15) si se la es



cribe del siguiente modo:  $f(x,y) dx - dy = 0$  .

Con la (15) se tiene, entonces, un modo bastante cómodo de escribir las ecuaciones diferenciales de primer orden, de forma normal, que tiene la ventaja de considerar las dos variables  $x, y$  de modo simétrico..

Observando eso, supongamos que el primer miembro de la (15) sea un diferencial exacto. Por las hipótesis hechas, esto equivale a decir que, en cada punto de  $A$  resulta (ver Cap. XXIII, n<sup>o</sup> 1) :

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad , \quad (*) \quad (18)$$

caso en el que se denomina a la ecuación diferencial (15) como exacta , y su integración se puede efectuar elementalmente.

Indicando con  $U(x,y)$  a la integral indefinida de la forma diferencial  $X dx + Y dy$  , <sup>(\*\*)</sup> hagamos ver que la integral general de la (15) está dada (bajo forma implícita) por la fórmula

$$U(x,y) = c \quad (19)$$

con  $c$  constante arbitraria.

En efecto; si  $y = y(x)$  <sup>(\*\*\*)</sup> es una integral de la (15), es decir, si

$$X [ x, y(x) ] + Y [ x, y(x) ] y'(x) = 0 \quad ,$$

la función  $U [ x, y(x) ]$  resultará tal de tener

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} U [ x, y(x) ] &= U_x [ x, y(x) ] + U_y [ x, y(x) ] y'(x) = \\ &= X [ x, y(x) ] + Y [ x, y(x) ] y'(x) = 0 \end{aligned}$$

de modo que necesariamente será  $U [ x, y(x) ] = \text{constante}$ . Viceversa: sea  $y=y(x)$

(\*) En particular eso sucede si  $X$  no depende de  $y$  ni  $Y$  depende de  $x$  , en cuyo caso la (15) toma la forma  $X(x) dx + Y(y) dy = 0$  resultando sus variables separables.

(\*\*) Recordemos (Cap. XXIII, n<sup>o</sup> 1 y n<sup>o</sup> 5) que  $U(x,y)$  es aquella función para la que resulta  $U_x = X$ ,  $U_y = Y$  , que puede ser calculada con la fórmula

$$U(x,y) = \int_{x_0}^x X(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y Y(x, t) dt,$$

donde  $(x_0, y_0)$  es un punto cualquiera, fijado en  $A$ .

(\*\*\*) Análogamente se razona para las integrales  $x = x(y)$



una función definida implícitamente por la (19) ; entonces, de la identidad

$U [x, y(x)] = c$  sigue, derivando con respecto a  $x$  ,

$U_x [x, y(x)] + U_y [x, y(x)] y'(x) = 0$  , o sea  $X [x, y(x)] + Y [x, y(x)] y'(x) = 0$  , de donde  $y = y(x)$  es una integral de la (15) .

Conociendo, con la (19) , la integral general de la (15) la resolución del problema de Cauchy es inmediata: la curva integral que pasa por un punto asignado  $(x_0, y_0)$  tendrá, evidentemente, la ecuación  $U(x, y) = U(x_0, y_0)$  .

Con respecto a los eventuales puntos  $(x_0, y_0)$  en los que se tiene  $X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0$  [en el entorno de los que la (15) no es de forma normal] , podemos decir que cada uno de ellos resulta ser un punto singular para la curva integral que pasa por él.

Demos ahora un ejemplo. La ecuación diferencial

$$(\sin y + y^2 \sin x) dx + (x \cos y - 2y \cos x) dy = 0 \quad (20)$$

es exacta, porque se tiene  $\frac{\partial}{\partial y} (\sin y + y^2 \sin x) = \frac{\partial}{\partial x} (x \cos y - 2y \cos x) = \cos y + 2y \sin x$  .

La integral  $U(x, y)$  de la forma diferencial lineal que aparece en el primer miembro de (20) está expresada por la

$$U(x, y) = \int_0^y (x \cos t - 2t \cos x) dt = x \sin y - y^2 \cos x ,$$

de modo que la integral general de la (20) está dada por la

$$x \sin y - y^2 \cos x = c$$

8º) Factor integrante . Continuemos considerando la ecuación diferencial (15) y supongamos que la misma no sea exacta, vale decir, que la (18) no se verifica. En ese caso puede intentarse la integración por medio del siguiente método.

Designemos con  $\mu(x, y)$  a una función arbitrariamente elegida que, en  $A$  , sea continua junto con sus derivadas parciales primeras y tal que no se anule pa -



ra ningún punto de  $A$  ; multiplicando ambos miembros de (15) por  $\mu(x, y)$  se obtiene la ecuación equivalente

$$\mu(x, y) X(x, y) dx + \mu(x, y) Y(x, y) dy = 0 \quad (21)$$

Esta última resultará una ecuación diferencial exacta si la función  $\mu(x, y)$  ha sido elegida de modo que sea  $\frac{\partial(\mu X)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Y)}{\partial x}$  , vale decir ,

$$X \frac{\partial \mu}{\partial y} - Y \frac{\partial \mu}{\partial x} + \left( \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \mu = 0 \quad (22)$$

Toda función  $\mu(x, y)$  que goce de las propiedades dichas, y verifique la (22), se denomina un factor integrante de la ecuación (15) . El conocimiento de un factor integrante hace posible la resolución por cuadraturas de la ecuación dada; basta considerar la (21) y aplicarla a la misma el procedimiento visto en 7º) . La determinación de los factores integrantes depende de la resolución de la (22) que es una ecuación diferencial en derivadas parciales ; con esto puede parecer que se ha complicado el problema de integrar la (15) ; pero debe observarse que no es necesario encontrar todas las soluciones de la (22), sino que es suficiente conocer una . Entonces tal determinación puede, en determinados casos particulares, resultar suficientemente simple .

Por ejemplo, puede buscarse si existe un factor integrante que dependa solamente de la variable  $x$  . Si en la (22) se pone  $\mu = \mu(x)$  , resulta

$$\mu'(x) = \frac{X_y - Y_x}{Y} \mu(x) \quad (23)$$

que puede subsistir solamente si  $\frac{X_y - Y_x}{Y}$  es una función  $f(x)$  de la única variable  $x$  . Si eso sucede, la (23) se transforma en  $\mu' = f(x) \mu$  , que es una ecuación a variables separables con la solución<sup>(\*)</sup>

(\*) La ecuación lineal (12) ha sido, precisamente, integrada con este método. La misma puede escribirse  $[\alpha(x)y + \beta(x)] dx - dy = 0$  , teniéndose

$$-\frac{X_y - Y_x}{Y} = -\alpha(x) ,$$

originando el factor integrante

$$e^{-\int \alpha(x) dx}$$



$$\mu = e^{\int f(x) dx}$$

Análogamente se puede intentar la búsqueda de factores integrantes que dependen solamente de  $y$ .

##### 5 - TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD RELATIVO AL PROBLEMA DE CAUCHY PARA UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE FORMA NORMAL.

Hasta el momento hemos constatado, sobre ejemplos muy particulares, que una ecuación diferencial posee una integral general que depende de constantes arbitrarias, arbitrariedad de la que precisamente podemos aprovecharnos para determinar aquellas integrales que satisfacen condiciones iniciales prefijadas. Deseamos ahora estudiar esta cuestión en general, inclusive para los sistemas de ecuaciones diferenciales, comenzando con los de forma normal.

Recordando lo que se dijo en el n° 2 bastará limitarse a considerar sistemas de ecuaciones diferenciales de 1<sup>er</sup> orden

$$y_i' = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, p \quad , \quad (1)$$

de  $p \geq 1$  ecuaciones con  $p$  funciones incógnitas  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$ .

Considerando el sistema (1), hagamos la siguiente hipótesis relativa al mismo:

$\alpha$ ) las funciones  $F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$  son continuas junto con sus derivadas parciales  $\frac{\partial F_i}{\partial y_1}, \frac{\partial F_i}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial y_p}$  (respecto de las incógnitas  $y_1, y_2, \dots, y_p$ ) de cierto campo  $A$  del espacio  $S_{p+1}$  de las variables  $x, y_1, y_2, \dots, y_p$ .

Llamando, después,  $P_0(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p)$  a un punto que fijamos en el campo  $A$ , propongámonos la búsqueda de una solución  $[y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)]$  que verifique las condiciones iniciales

$$y_1(x_0) = u_1 \quad , \quad y_2(x_0) = u_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad y_p(x_0) = u_p \quad . \quad (2)$$



Puesto que  $P_0$  es interior al campo  $A$  se puede construir en  $S_{p+1}$  un intervalo  $R$ , de centro  $P_0$ :

$$\begin{aligned} R) \quad & x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha \\ & u_i - \beta_i \leq y_i \leq u_i + \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

que estará contenido en  $A$ . Indiquemos con  $M_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) al máximo de la función  $|F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p)|$  en  $R$  y, llamando con  $h$  al menor de los números  $\alpha, \frac{\beta_1}{M_1}, \frac{\beta_2}{M_2}, \dots, \frac{\beta_p}{M_p}$ , consideremos el intervalo  $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ , que denotaremos con  $I$ .

Vale el siguiente teorema:

I - Si para el sistema (1) es válida la hipótesis  $\alpha$ ) existirá, en el intervalo  $I$  recién considerado, una y solamente una integral  $[y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)]$  de dicho sistema que verifique las condiciones iniciales (2).

No daremos la demostración completa de este teorema, que asegura, bajo hipótesis muy amplias, la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy, por lo menos en un oportuno entorno  $I$  del punto inicial  $x_0$ . Nos limitaremos a exponer el concepto fundamental de dicha demostración, que nos proporcionará un método de cálculo numérico aproximado de la integral buscada (método de Cauchy - Lipschitz).

Tal método es válido en todos los casos [bajo la hipótesis  $\alpha$ )], de modo que, aunque no se sepa integrar elementalmente (con artificios del tipo de los del n° 4) el sistema dado, siempre se podrá dar una expresión, con la aproximación que se desee, de la integral individualizada por condiciones iniciales prefijadas.

Comenzaremos a explicar el método de Cauchy-Lipschitz en el caso  $p=1$ , refiriéndonos a la ecuación



$$y' = f(x, y) \quad (3)$$

y a la condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \quad (4)$$

Llamando con  $x$  a un punto cualquiera del intervalo  $I$  al que se ha hecho referencia (para fijar las ideas,  $x > x_0$ ), subdividamos el intervalo  $(x_0, x)$  en un número arbitrario  $n$  de intervalos parciales, mediante los puntos  $x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n$ , con  $x_n = x$ . La curva integral que verifica las (3), (4) debe partir del punto  $P_0(x_0, y_0)$  y resultar tangente en él a la recta de coeficiente angular  $f(x_0, y_0)$ , es decir, de ecuación  $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$ .

Tal recta encuentra a la  $x = x_1$  en cierto punto  $P_1(x_1, y_1)$ , con  $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$ .

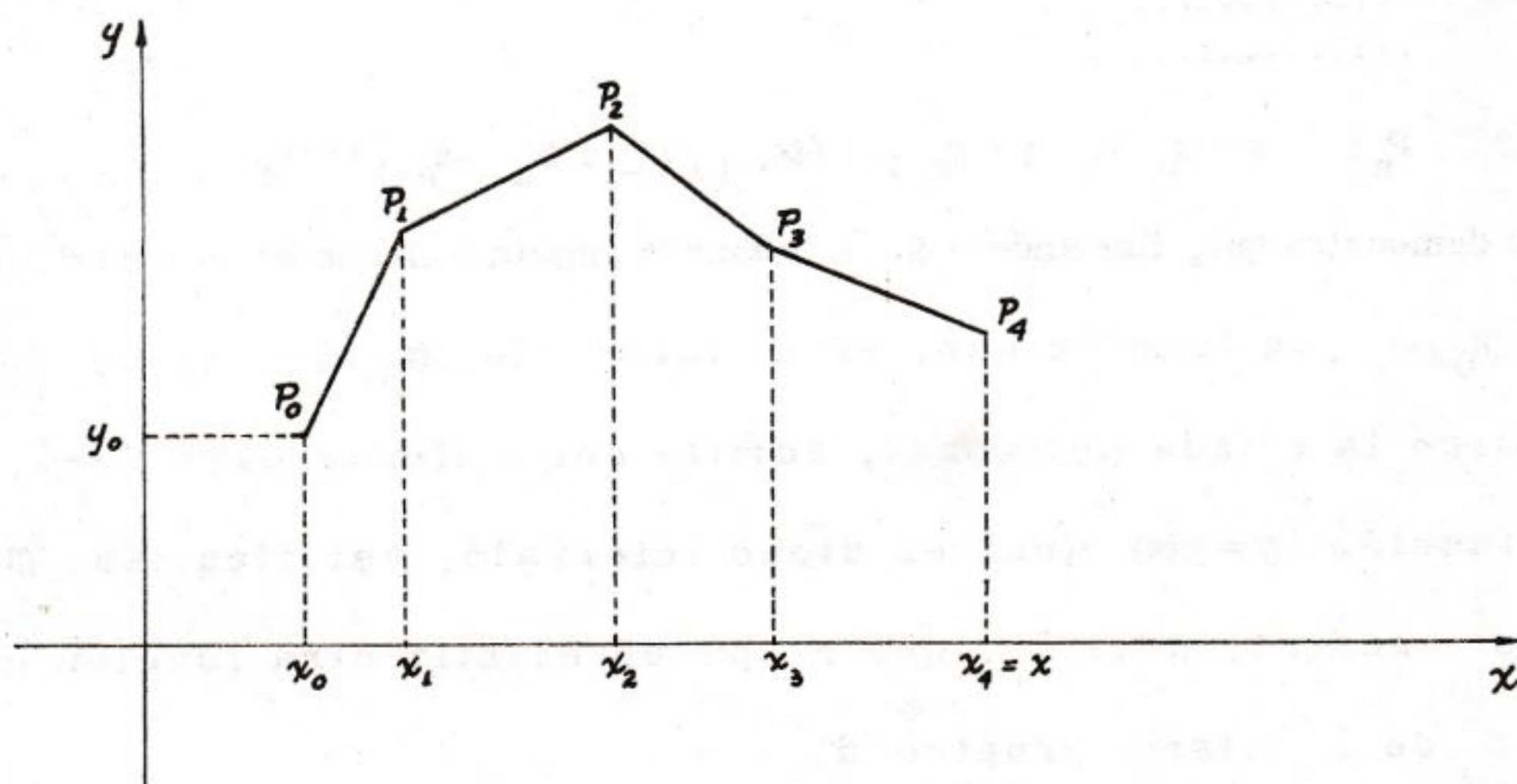


Fig. 69

Con criterio aproximado puede confundirse el arco de curva integral relativo al intervalo  $(x_0, x_1)$  con el segmento rectilíneo  $P_0P_1$  y considerar, entonces, que la misma curva debe pasar por el punto  $P_1$  resultando allí tangente a la recta de coeficiente angular  $f(x_1, y_1)$ , es decir, de ecuación  $y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1)$ .

Esta recta encuentra la  $x = x_2$  en cierto punto  $P_2$  de coordenadas  $(x_2, y_2)$



con  $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) (x_2 - x_1)$ . Siempre con carácter de aproximado, puede confundirse el arco de curva integral relativo al intervalo  $(x_1, x_2)$  con el segmento rectilíneo  $P_1P_2$  y considerar, entonces, que la curva deba pasar por  $P_2$  con la tangente de coeficiente angular  $f(x_2, y_2)$

Y así puede proseguirse para los sucesivos intervalos  $(x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$  y aproximar la curva integral con una poligonal  $P_0P_1P_2\dots P_n$  cuyos sucesivos vértices tienen sus coordenadas proporcionadas por las fórmulas

$$\begin{aligned} P_0) \quad x &= x_0, \quad y = y_0; \\ P_1) \quad x &= x_1, \quad y = y_0 + f(x_0, y_0) (x_1 - x_0) = y_1, \\ P_2) \quad x &= x_2, \quad y = y_1 + f(x_1, y_1) (x_2 - x_1) = y_2, \\ P_3) \quad x &= x_3, \quad y = y_2 + f(x_2, y_2) (x_3 - x_2) = y_3, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ P_n) \quad x &= x_n, \quad y = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) (x_n - x_{n-1}) = y_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Se demuestra que, llamando  $\delta$  a la mayor amplitud en que ha sido subdividido  $(x_0, x)$ , la función que, en el intervalo  $(x_0, x)$  tiene por gráfico la citada poligonal, admite como límite para  $\delta \rightarrow 0$  una función  $y = y(x)$  que, en dicho intervalo, verifica las (3),(4). Se demuestra, además, que no puede existir otra función que goce de la misma propiedad.

Sigue que, fijado el punto  $x$ , y suponiendo haber elegido  $\delta$  suficientemente pequeño, las fórmulas (5)  $\int$  que en todos los casos son de aplicación inmediata  $\int$  proporcionan buenas aproximaciones para los valores de la integral buscada, en los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n = x$ .

Notemos que, si el segundo miembro de la (3) no depende de  $y$ , en cuyo caso se tiene la ecuación diferencial

$$y' = f(x) \quad (6)$$



con la condición inicial  $y(x_0) = y_0$ , las (5) toman la forma

$$y_1 = y_0 + f(x_0)(x_1 - x_0), \quad y_2 = y_1 + f(x_1)(x_2 - x_1), \quad \dots, \quad y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Sumándolas miembro a miembro se tiene:

$$y_n = y_0 + f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}),$$

de modo que, pasando al límite para  $\delta \rightarrow 0$ , y recordando la definición de integral de una función continua, se deduce que el  $\lim_{\delta \rightarrow 0} y_n$  existe y vale  $y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$ , que es, precisamente, el valor en el punto  $x$  de la solución buscada de la (6).

El método de Cauchy-Lipschitz puede entonces considerarse como una extensión del método de cálculo de una integral definida como límite de las sumas estudiada en el Cap. IX.

El método de Cauchy-Lipschitz que hemos expuesto en el caso  $p = 1$  se extiende inmediatamente al caso  $p > 1$ . Refiriéndonos a las (1), (2) y fijados como antes los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n = x$  se aproximan los valores de las  $p$  funciones buscadas  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$ , en el punto  $x_1$  mediante los números

$$y_{i1} = u_i + F_i(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p)(x_1 - x_0), \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad (7_1)$$

en el punto  $x_2$  mediante los números

$$y_{i2} = y_{i1} + F_i(x_1, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{p1})(x_2 - x_1), \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad (7_2)$$

en el punto  $x_3$  mediante los números

$$y_{i3} = y_{i2} + F_i(x_2, y_{12}, y_{22}, \dots, y_{p2})(x_3 - x_2), \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad (7_3)$$

y así sucesivamente.

Con esto se aproxima el gráfico de la  $y_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) con la poligonal de vértices  $P_{i0}(x_0, u_i)$ ,  $P_{i1}(x_1, y_{i1})$ ,  $P_{i2}(x_2, y_{i2})$ ,  $\dots$ . Para  $\delta \rightarrow 0$



esta poligonal tiende a la solución  $y_i(x)$  a que nos referimos en el teor. I ; se demuestra, además, que tal solución es única.

---

Agreguemos algunas observaciones sobre el teor. I.

**Observación 1ª.** El teor. I vale con la hipótesis  $\alpha)$  . Si se admite solamente que las  $F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$  sean continuas en  $A$  , sin requerir la existencia y la continuidad de las derivadas  $\frac{\partial F_i}{\partial y_1}$  ,  $\frac{\partial F_i}{\partial y_2}$  , ..... ,  $\frac{\partial F_i}{\partial y_p}$  se puede todavía demostrar la existencia de al menos una solución del problema de Cauchy traducido por las (1) y (2) ; pero ya no se puede afirmar la unicidad de tal solución. Basta citar el ejemplo de la ecuación  $y' = y^{\frac{2}{3}}$  considerada en el n° precedente; habíamos visto que existen dos integrales de la misma que verifican la condición inicial  $y(1) = 0$  . Esto no contradice al teor. I puesto que la derivada respecto de  $y$  de la función  $y^{\frac{2}{3}}$  no es continua en el punto  $y = 0$

**Observación 2ª.** El teor. I afirma, en la hipótesis  $\alpha)$  , la existencia y la unicidad de la solución del problema de Cauchy solamente en un entorno oportuno  $[x_0 - h, x_0 + h]$  del punto inicial  $x_0$  . En general no se puede afirmar que tal solución exista (finita, continua y derivable) en todo el intervalo  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  , proyección sobre el eje  $x$  de aquel intervalo  $R$  del espacio  $S_{p+1}$  donde tenía sentido el sistema (1)

Lo muestra el ejemplo de la ecuación  $y' = -y^2$  ya considerado en el n° 1 . Tal ecuación tiene sentido en  $R$  ( $-\infty < x < +\infty$  ,  $-\infty < y < +\infty$ ) y verifica allí la hipótesis  $\alpha)$  ; pero si buscamos, por ejemplo, aquella integral que verifica la condición inicial  $y(0) = 1$  se encuentra  $y = \frac{1}{x+1}$  , que existe finita solamente en el entorno  $-1 < x < +\infty$  del punto inicial  $x = 0$  .

De todos modos, asegurada con el teor. I , en el intervalo  $[x_0 - h, x_0 + h]$



la existencia de la integral  $[y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)]$ , se puede siempre tratar de prolongarla fuera de ese intervalo. Llamando  $a_1, a_2, \dots, a_p$  a los valores asumidos por las funciones  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$  en el punto  $x_0 - h$  y  $b_1, b_2, \dots, b_p$  a los asumidos en el punto  $x_0 + h$ , tal prolongación puede intentarse planteando dos nuevos problemas de Cauchy: uno, con las condiciones iniciales  $y_i(x_0 - h) = a_i$ ; el otro con las  $y_i(x_0 + h) = b_i$ , y examinando si a éstas puede todavía aplicarse el teor. I.

Observación 3<sup>a</sup>. En las aplicaciones sucede a menudo que las funciones  $F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$  de los segundos miembros del sistema (1) verifican las siguientes hipótesis:

$\beta$ ) Tales funciones son continuas en un dominio  $S$  del tipo

S)  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y_i < +\infty$ , ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), y admiten en él derivadas parciales primeras  $\frac{\partial F_i}{\partial y_1}, \frac{\partial F_i}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial y_p}$  que se mantienen acotadas.

En tal caso, llamando  $(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p)$  a un punto arbitrario de  $S$ , el teor. I puede sustituirse por el siguiente (del que también omitimos la demostración):

II - Si para el sistema (1) vale la hipótesis  $\beta$ ) existirá en todo  $(^{**}) [a, b]$  una y solamente una integral  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$ , de dicho sistema que verifique las condiciones iniciales (2).

Si consideramos una ecuación diferencial de orden  $n$  en una incógnita  $y(x)$ , de forma normal

-----

(\*) Es decir existe una constante  $M$  tal de tenerse, en todo  $S$ ,  $\left| \frac{\partial F_i}{\partial y_r} \right| < M$ , ( $i, k = 1, 2, \dots, p$ ). Nótese que no se requiere la continuidad de esta derivada.

(\*\*) Nótese: en todo el intervalo  $[a, b]$  (y no solamente en un oportuno entorno del punto  $x_0$ ).



$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (8)$$

y al sistema equivalente de ecuaciones de 1<sup>er</sup> orden  $\left[ \text{ver las (8')} \text{ del n}^\circ 2 \right]$ , se ve inmediatamente que del teor. II sigue este otro:

III - Dada la ecuación diferencial (8), si la función  $F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  es continua y admite las derivadas  $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \frac{\partial F}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}$  en el dominio

S)  $a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty, \dots, -\infty < y^{(n-1)} < +\infty$ ,

y si dichas derivadas se mantienen acotadas en S, llamando con  $x_0$  a un punto de  $[a, b]$  y con  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  a  $n$  números arbitrarios, existirá en todo  $[a, b]$  una y solamente una integral  $y(x)$  de la (8) que verifique las condiciones iniciales

$$y(x_0) = u_0, y'(x_0) = u_1, y''(x_0) = u_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}.$$

Observemos, por último, que todo lo que se dijo en este número vale para sistemas de forma normal; pasemos ahora a ver qué puede decirse para sistemas de ecuaciones diferenciales que no sean de forma normal.

## 6 - EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE FORMA NO NORMAL.

Consideremos un sistema de  $p$  ecuaciones diferenciales de 1<sup>er</sup> orden con  $p$  funciones incógnitas  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$ , de forma no normal,

$$f_i(x, y_1, \dots, y_p, y'_1, y'_2, \dots, y'_p) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, p), \quad (1)$$

y supongamos que las funciones  $f_i$  sean continuas junto con sus derivadas parciales primeras  $\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial y_p}, \frac{\partial f_i}{\partial y'_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial y'_p}$  en cierto campo A del espacio  $S_{2p+1}$  de las variables  $x, y_1, y_2, \dots, y_p, y'_1, y'_2, \dots, y'_p$ .

Fijemos en el espacio  $S_{p+1}$  de las variables  $x, y_1, \dots, y_p$  un punto  $P_0(x_0,$



$u_1, u_2, \dots, u_p$ ) suponiendo que sea posible asociarle valores  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$  de modo tal que el punto  $(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p, y'_1, \dots, y'_p)$  pertenezca al citado campo  $A$ .

Propongámonos entonces el problema de Cauchy consistente en buscar una integral  $[y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)]$  del sistema (1) de modo que se verifiquen las condiciones iniciales

$$y_1(x_0) = u_1, \quad y_2(x_0) = u_2, \quad \dots, \quad y_p(x_0) = u_p. \quad (2)$$

Observemos inmediatamente que si existe una integral que logre esto, los valores que las derivadas  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$  asumen en el punto  $x_0$  deberán evidentemente satisfacer las  $p$  ecuaciones

$$f_i(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p, y'_1, y'_2, \dots, y'_p) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p). \quad (3)$$

Entonces, si un sistema como el (3) no admitiese ningún grupo de valores  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$  que lo verificase, eso bastaría obviamente para afirmar que el problema de Cauchy propuesto no tendrá solución.

Pero supongamos ahora que existan grupos de valores de  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$  que verifiquen la (3). Fijemos uno de tales grupos y llamémoslo con  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ ; podemos entonces decir que las (1) quedan satisfechas cuando se ponga

$$x = x_0, \quad y_1 = u_1, \quad \dots, \quad y_p = u_p, \quad y'_1 = v_1, \quad \dots, \quad y'_p = v_p, \quad (4)$$

por lo que, considerando a (1) como un sistema de  $p$  ecuaciones en las  $p$  incógnitas  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$ , tal sistema tiene, por lo menos, un punto solución  $Q$  [el definido por (4)].

Si sucede que en tal punto resulta

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (y'_1, y'_2, \dots, y'_p)} \neq 0, \quad (5)$$

el teorema de Dini nos asegura que el sistema considerado es únivocamente resoluble con respecto a  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$ , en un entorno de  $Q$ . Es decir que en tal entorno el sistema (1) es equivalente a uno del tipo



$$y'_i = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad , \quad (6)$$

con las funciones  $F_i$  continuas junto con sus derivadas parciales primeras en un entorno de  $P_0(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p)$  y tales que se tiene  $F_i(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p) = v_i$ .

Entonces, si nos mantenemos en dicho entorno de  $Q$ , el sistema (1) es equivalente al sistema (6) que es de forma normal y para el que se verifica la hipótesis  $\alpha$ ) del  $n^\circ$  precedente; entonces, el teor. I del mismo  $n^\circ$ , nos asegura que en un oportuno entorno de  $x_0$  existe una y solo una integral del sistema (6) que verifica las condiciones iniciales (2). Sigue que, en correspondencia al grupo fijado de valores  $v_1, v_2, \dots, v_p$  de  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$  que son soluciones de las (3) y que satisfacen la condición (5), existe (en un entorno oportuno de  $x_0$ ) una y solamente una integral del sistema (1) que verifica las condiciones iniciales (2).

Naturalmente puede suceder que existan varios grupos de valores  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$  que sean soluciones de (3) y que satisfagan a la (5); en correspondencia a cada grupo tendremos, en un entorno de  $x_0$ , una y solamente una solución al problema planteado de Cauchy.

Concluyendo, podemos decir:

I - Dado el sistema (1) de forma no normal y planteado para el mismo el problema de Cauchy expresado por la (2), tal problema puede no tener solución  $\overline{\int}$  si las (3) como ecuaciones en las incógnitas  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$  son incompatibles  $\overline{\int}$  o puede tener una o varias soluciones  $\overline{\int}$  si las (3) son compatibles y tienen una o varias soluciones en las que se verifique la (5)  $\overline{\int}$ .

---

Demos dos simples ejemplos relativos al caso  $p=1$ . Dada la ecuación de primer orden



$$y'^2 + x + y = 0 \quad (7)$$

con la condición inicial  $y(0) = 1$ , debemos buscar primeramente si a  $x = 0$ ,  $y = 1$  se le puede asociar algún valor de  $y'$  de modo que se verifique la (7); debería ser  $y'^2 + 1 = 0$  y como ésta no tiene soluciones (reales), el problema de Cauchy planteado es imposible.

En cambio, dada la

$$(y' - x)^2 - y^2 = 0 \quad (8)$$

con la condición inicial  $y(0) = 1$ , a  $x = 0$ ,  $y = 1$  puede asociársele tanto  $y' = 1$  como  $y' = -1$ . Y puesto que la derivada respecto de  $y'$  del primer miembro de (8)  $\left[ \frac{\partial}{\partial y'} \right]$  que es el análogo del jacobiano (5) vale  $2(y' - x)$  y resulta distinta de cero para los valores considerados  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y' = \pm 1$ , podemos decir que el problema de Cauchy que acabamos de plantear tiene dos soluciones. En este caso resulta fácil calcularlas puesto que de la (8) sigue, resolviendo respecto de  $y'$ :

$$y' = x + y \quad \text{o también} \quad y' = x - y$$

Se trata de dos ecuaciones lineales de primer orden que se integran inmediatamente con el método que se indicó en el n° 4; se encuentran las integrales generales respectivas

$$y = c e^x - x - 1, \quad y = c e^{-x} + x - 1$$

y determinando  $c$  en base a la  $y(0) = 1$ , se tienen finalmente las dos soluciones buscadas

$$y = 2 e^x - x - 1, \quad y = 2 e^{-x} + x - 1$$

## 7 - MAYORES DETALLES SOBRE LOS CONCEPTOS DE INTEGRAL PARTICULAR, GENERAL, SINGULAR.

Como precedentemente, nos referiremos a un sistema de  $p$  ecuaciones diferenciales de 1<sup>er</sup> orden con  $p$  funciones incógnitas y comenzaremos con el caso



que sea de forma normal:

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (1)$$

suponiendo las funciones  $f_i$  continuas en un campo  $A$  de  $S_{p+1}$  junto con sus derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial y_1}, \frac{\partial f_i}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial y_p}$ . Sabemos (nº 5) que, fijando arbitrariamente un punto  $P_0(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p)$  de  $A$  (por ende interior de  $A$ , siendo  $A$  un conjunto abierto), existirá una y solamente una integral  $[y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)]$  que verifique las condiciones iniciales:

$$y_1(x_0) = u_1, \quad y_2(x_0) = u_2, \quad \dots, \quad y_p(x_0) = u_p, \quad (2)$$

y sabemos también que tal integral está definida en cierto intervalo del eje  $x$ , que contiene a  $x_0$  (ver nº 5, teor. I y Observación 2ª). Las funciones  $y_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) que constituyen tal integral dependen, además que de la variable  $x$ , también del punto fijado  $P_0(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p)$  de  $A$ , es decir, son funciones de las  $p + 2$  variables  $x, x_0, u_1, u_2, \dots, u_p$ :

$$y_i = y_i(x; x_0, u_1, u_2, \dots, u_p), \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (3)$$

Estas funciones (3) gozan de dos propiedades: 1º) para  $x_0, u_1, \dots, u_p$  fijas, son funciones de  $x$  que verifican el sistema (1); 2º) en base a las (2), si en lugar de  $x$  se pone  $x_0$ , resulta  $y_i(x_0; x_0, u_1, \dots, u_p) = u_i$ .

Supongamos ahora haber elegido el punto  $P_0(x_0, u_1, \dots, u_p)$  sobre la frontera de  $A$  (admitiendo que  $A$  no sea todo  $S_{p+1}$ ) y tratemos todavía de encontrar una integral que verifique las (2). En este caso el teor. I ya no es más aplicable; pero suponiendo que las funciones  $f_i(x, y_1, \dots, y_p)$  sean continuas en  $A \cup \mathcal{F}A$ , puede ser que existan igualmente una o varias curvas integrales que satisfagan dichas condiciones iniciales. Cada una de tales curvas puede presentar dos casos: o tiene puntos interiores de  $A$  o yace totalmente sobre la frontera de  $A$ . En el primer caso, la integral formará parte de las curvas ya consideradas (3) eligiendo como punto inicial (no  $P_0$ , pero sí) cualquier pun



to  $P_1$ , interior de  $A$ , de la misma (porque, por el teor. I del n° 5, la curva integral que parte de  $P_1$  es única)<sup>(\*)</sup>. En el segundo caso, en cambio, dicha integral no forma parte de las (3) y proporciona, entonces, una solución todavía no considerada.

Dicho lo cual introducimos las siguientes definiciones:

1°) Toda integral del tipo (3) obtenida en correspondencia a un punto inicial fijado  $P_0(x_0; u_1, \dots, u_p)$  de  $A$ , será denominada una integral particular del sistema (1),

2°) el conjunto de todas las integrales particulares será denominado la integral general del sistema (1), la que estará representada por las (3), considerando variable el punto  $P_0(x_0; u_1, u_2, \dots, u_p)$  de  $A$ ;

3°) toda eventual integral cuya correspondiente curva integral resulte totalmente trazada sobre  $\mathcal{F}A$ , será denominada una integral singular del sistema (1).

Hagamos ahora una observación sobre la integral general que, como ya se dijo, está dada por las (3) al variar en  $A$  el punto  $(x_0; u_1, \dots, u_p)$ . En la expresión de tal integral general aparecen, entonces, los  $p+1$  parámetros  $x_0, u_1, \dots, u_p$  que, salvo la restricción de tener que proporcionar un punto  $P_0$  de  $A$ , son números arbitrarios. Puede, entonces, parecer a primera vista que la integral general, tal como la terminamos de definir, depende de  $p+1$  constantes arbitrarias y no de  $p$  (como lo habíamos afirmado en un primer enfoque en los n°s 1, 2). Pero es necesario observar que una vez definida una curva integral (3) a partir de cierto punto inicial  $P_0$ , dicha curva integral puede ser obtenida tomando como punto inicial cualquier otro punto  $P$  de la misma (interior de  $A$ );

-----  
 (\*) Es decir, se verifica el hecho que una curva integral construída a partir de un punto  $P_1$  de  $A$ , no permanece toda interior a  $A$  sino que tiene también puntos en común con  $\mathcal{F}A$  (como el punto  $P_0$ ).



hay, entonces,  $\infty^1$  puntos iniciales que dan lugar a la misma curva integral. De ahí que las curvas integrales (3) no sean  $\infty^{p+1}$  sino, solamente,  $\infty^p$ . Se puede, por ejemplo, en las (3) suponer fijo  $x_0$  y entonces resulta evidente que, en la integral general figuran las  $p$  constantes arbitrarias  $u_1, u_2, \dots, u_p$ .

A los efectos prácticos no está dicho que las constantes arbitrarias que intervienen en la integral general sean precisamente los valores  $u_1, \dots, u_p$  que las funciones  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$  asumen en un punto fijado  $x_0$ ; las (3) se pueden escribir de infinitos modos distintos haciendo aparecer como constantes arbitrarias otras expresiones dependientes de  $x_0, u_1, \dots, u_p$ . Por ejemplo (ver n<sup>o</sup> 1, ejercicio 5<sup>o</sup>) , considerada la ecuación diferencial  $y' + y^2 = 0$  para la que el campo  $A$  es todo el plano  $xy$ , por lo que no existirán integrales singulares), ponemos para ella la condición inicial  $y(x_0) = y_0$ . Encontramos para la solución la expresión  $y = \frac{y_0}{y_0(x - x_0) + 1}$  [que proporciona la fórmula análoga de (3)]; pero la podemos también escribir  $y = \frac{1}{x + c}$  haciendo aparecer como constante arbitraria a  $c = \frac{1}{y_0} - x_0$ . Si embargo debe, si así se hace, tener en cuenta también del valor  $c = \infty$  correspondiente a  $y_0 = 0$  (como ya se había observado en el n<sup>o</sup> 1).

Ilustremos todavía los conceptos expuestos con el ejemplo varias veces citado ya de la ecuación  $y' = y^{\frac{2}{3}}$ . La función  $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$  es continua en todo el plano, pero su derivada  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$  es continua solamente en el campo  $A$  obtenido privando a todo el plano de los puntos del eje  $x$ . Tomado un punto  $(x_0, y_0)$  de  $A$  (con  $y_0 \neq 0$ ), la integral que satisface a la condición inicial  $y(x_0) = y_0$  existe y es única: se trata de la función dada por la fórmula

$$y = \left( \frac{x - x_0}{3} + y_0^{\frac{1}{3}} \right)^3 \quad (4)$$



Si como punto inicial tomamos un punto  $(\bar{x}, 0)$  de  $\mathcal{F}A$ , encontramos las dos soluciones  $y = (\frac{x - \bar{x}}{3})^3$ ,  $y = 0$ . La primera forma parte de las (4); la segunda tiene, en cambio, como gráfico el eje  $x$  (es decir  $\mathcal{F}A$ ) y es una integral singular.

Lo que hemos dicho para los sistemas de forma normal se extiende a aquellos de forma no normal, teniendo en cuenta lo que se ha dicho en el n° 6. Consideremos el sistema

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p, y'_1, y'_2, \dots, y'_p) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (5)$$

con las  $f_i$  continuas en cierto campo  $A$  de  $S_{2p+1}$  junto a todas sus derivadas parciales primeras.

Indiquemos con  $S$  el conjunto de todos los puntos  $(x, y_1, y_2, \dots, y_p, y'_1, y'_2, \dots, y'_p)$  del campo  $A$  cuyas coordenadas verifican las  $p$  ecuaciones (5) y para los que resulta

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (y'_1, y'_2, \dots, y'_p)} \neq 0. \quad (6)$$

Sabemos que, fijado un punto  $Q(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots, v_p)$  de  $S$  existe una y solamente una integral de (5) que verifica las condiciones iniciales  $y_i(x_0) = u_i$  [resultando, además, en dicho punto  $y'_i(x_0) = v_i$ ]. Hay una sola diferencia con el caso precedente, y es que, una vez fijado el punto inicial  $P_0(x_0, u_1, u_2, \dots, u_p)$ , al poder tal vez elegirse de varios modos posibles los valores de  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , pueden tenerse varias curvas integrales que pasan por  $P_0$ . Pero, aparte de esto, es evidente que permanecen como han sido expuestos anteriormente, los conceptos de integral particular (toda integral obtenida a partir de un punto inicial fijado  $P_0$  tal que al mismo pueda ponerse en correspondencia por lo menos un punto  $Q$  de  $S$ ) y de integral general, (totalidad de las integrales particulares, la que dependerá de las  $p$  constantes



arbitrarias  $u_1, u_2, \dots, u_p$ ).

Pero, en el caso de los sistemas normales, pueden existir dos tipos distintos de integrales singulares.

Un primer tipo es análogo al encontrado en el caso de los sistemas de forma normal. Suponiendo que las  $f_i$  sean continuas en  $A \cup \mathcal{T}A$ , pueden existir integrales  $y = y(x)$  tales que, trazada en  $S_{2p+1}$  la curva con las ecuaciones paramétricas  $y_i = y_i(x)$ ,  $y'_i = y'_i(x)^{(*)}$ , ésta resulta totalmente trazada sobre  $\mathcal{T}A$ . Es claro que tal integral no puede provenir de algún punto  $Q$  de  $S$  (ya que los puntos  $Q$  son interiores de  $A$ ); tal integral no está incluida entre las integrales particulares antes definidas y se la considera, entonces, como una integral singular.

En cambio, un segundo tipo no tiene análogo en el caso de los sistemas de forma normal y surge al observar que pueden existir integrales tales que, para las correspondientes funciones  $y_i(x)$  y para sus derivadas  $y'_i(x)$  resulte idénticamente verificada la

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial (y'_1, y'_2, \dots, y'_p)} = 0 \quad (7)$$

También en este caso es evidente que tal integral no puede provenir de un punto  $Q$  de  $S$  [porque en  $S$  vale la (6)] ; no será, por lo tanto, una integral particular y deberá ser considerada como singular. Obsérvese que, considerada una curva integral singular  $y_i = y_i(x)$  de este tipo (si existe), cada punto de la misma  $(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$  es tal que al mismo puede asociársele valores  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$  de modo que se satisfacen las  $p+1$  ecuaciones (5) y (7) de modo que  $x, y_1, y_2, \dots, y_p$  deben verificar las ecuaciones que se obtienen eliminando  $y'_1, y'_2, \dots, y'_p$  entre las (5), (7). Tal eliminación lleva a una e-----

(\*) Es casi superfluo observar que esta curva no es la que antes ha sido denominada curva integral [ ésta pertenece a  $S_{p+1}$  y tiene por ecuaciones a  $y_i = y_i(x)$  ].



cuación del tipo  $\phi(x, y_1, y_2, \dots, y_p) = 0$  que representa cierta hipersuperficie del espacio  $S_{p+1}$  sobre la que deben necesariamente estar trazadas las curvas integrales singulares de este segundo tipo.

La búsqueda de tales integrales es, entonces, inmediata en el caso  $p = 1$ . Da da la ecuación diferencial de primer orden

$$f(x, y, y') = 0, \quad (8)$$

la (7) toma, en este caso, la forma

$$f_{y'}(x, y, y') = 0, \quad (9)$$

y eliminando  $y'$  entre estas dos ecuaciones, se obtendrá una ecuación del tipo  $\phi(x, y) = 0$ , que representará una curva del plano  $xy$ . Si existe una integral singular del tipo dicho, no puede ser sino ésta; caso por caso se examinará si satisface o no a la ecuación dada (8).

Todo cuanto se dijo para los sistemas de ecuaciones de 1<sup>er</sup> orden, vale naturalmente también para una ecuación de orden  $n$  en una incógnita (es decir, esta tie ne integrales particulares, una integral general dependiente de  $n$  constantes ar bitrarias y, eventualmente, integrales singulares); basta considerar el sistema e quivalente de ecuaciones de primer orden.

Terminemos este argumento con una última observación importante referente al caso de una sola ecuación diferencial de 1<sup>er</sup> orden (8) [sin excluir que pueda ser de forma normal]. Demostremos el siguiente teorema:

I - Si la familia  $\infty^1$  de las curvas integrales particulares de la ecuación diferencial (8) admite una envolvente  $\Gamma$ , tal  $\Gamma$  será una curva integral singular de la misma ecuación.

Dem. Sea  $y = \varphi(x, c)$ , con  $c$  constante arbitraria, la ecuación de la familia



$\infty^1$  de curvas integrales particulares de (8), e  $y = F(x)$  la ecuación de la envolvente  $\Gamma$ . Tomado en  $\Gamma$  cualquier punto  $P$ , de coordenadas  $\xi, F(\xi)$ , la tangente en él a  $\Gamma$  tiene coeficiente angular  $F'(\xi)$ . Por otra parte, por  $P$  pasa una determinada curva integral  $y = \varphi(x, \bar{c})$  que tiene, en  $P$ , la misma tangente de  $\Gamma$ ; resulta, por lo tanto,

$$\varphi(\xi, \bar{c}) = F(\xi), \quad \varphi'(\xi, \bar{c}) = F'(\xi), \quad (10)$$

mientras que, del momento que la  $y = \varphi(x, \bar{c})$  verifica la (8), se tiene idénticamente respecto de  $x$ :

$$f[x, \varphi(x, \bar{c}), \varphi'(x, \bar{c})] = 0.$$

Poniendo en ésta  $x = \xi$  y teniendo en cuenta las (10) puede escribirse

$$f[\xi, F(\xi), F'(\xi)] = 0,$$

donde, por la arbitrariedad de  $\xi$  se concluye que  $y = F(x)$  es, efectivamente, una integral de la (8).

Puesto que del punto  $P[\xi, F(\xi)]$  parten, con la misma tangente, la curva integral particular  $y = \varphi(x, \bar{c})$  y la curva integral  $\Gamma$ , éste es necesariamente singular puesto que sabemos que de un punto  $P_0(x_0, y_0)$  no puede partir  $\angle$  con una tangente de coeficiente angular  $y'_0$  que verifique las  $f(x_0, y_0, y'_0) = 0$ ,  $f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$  más que una sola curva integral particular.

Podemos ilustrar este teorema con el ejemplo de la denominada ecuación de Clairaut:

$$y = xy' + f(y'), \quad (11)$$

donde  $f(y')$  es una función continua con derivada primera continua en cierto intervalo  $a < y' < b$ . La (11) no es de forma normal y el campo  $A$  del espacio  $(x, y, y')$  del que antes se ha hecho mención, está definido por  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $a < y' < b$ ; su frontera está constituida por los dos planos  $y' =$



$$= a, \quad y' = b \quad (*)$$

Por la (11), la ecuación (9) que debe satisfacerse para los eventuales integrales singulares del segundo tipo, se escribe

$$x + f'(y') = 0 \quad (12)$$

Si una función  $y = y(x)$  verifica la (11), también verificará la ecuación que se obtiene derivando la (11) respecto de  $x$ , o sea,

$$y' = y' + xy'' + f'(y') \cdot y'' \quad , \quad \text{es decir,} \quad [x + f'(y')] y'' = 0 \quad (13)$$

Si excluimos el caso que  $y = y(x)$  sea una integral singular que verifica la (12) la (13) nos lleva necesariamente a  $y'' = 0$  o sea  $y' = c$  con  $c$  constante arbitrariamente elegida en el intervalo  $(a, b)$ ; entonces, por la (11):

$$y = cx + f'(c) \quad (14)$$

Viceversa, se ve inmediatamente que esta función satisface la (11); la (14) representa, entonces, su integral general, que consta de  $\infty^1$  rectas.

Examinemos ahora si la (11) admite integrales singulares.

Comencemos con las integrales singulares del primer tipo. Admitiendo que  $f(y')$  sea continua en el intervalo cerrado  $a \leq y' \leq b$ , si existe una integral  $y(x)$  del tipo dicho, la curva con las ecuaciones paramétricas  $y = y(x)$ ,  $y' = y'(x)$  debe pertenecer a  $\mathcal{F}A$ , es decir, debe ser  $y'(x) = a$  [o  $y'(x) = b$ ] y, entonces, por la (11),  $y(x) = ax + f'(a)$  [o  $y(x) = bx + f'(b)$ ]. Estas dos funciones  $y = ax + f'(a)$ ,  $y = bx + f'(b)$  son efectivamente soluciones de (11); pero comúnmente no se las considera integrales singulares pues pueden incluirse en la solución general (14) en correspondencia a los valores  $c = a$  y  $c = b$ .

Pasemos a las integrales singulares del segundo tipo. Se ha visto en general que, si tal integral existe, la misma debe encontrarse eliminando  $y'$  entre las

----

(\*) Si  $a, b$  son ambos finitos. Si uno solo es finito, la  $\mathcal{F}A$  consta de un solo plano; si son ambos infinitos, la frontera no existe.



(11), (12) .

Entonces, escribiendo  $t$  en lugar de  $y'$  , de tales ecuaciones sigue

$$\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = -t f'(t) + f(t) \end{cases} , \quad (15)$$

por lo que puede también decirse que, si existe una curva integral singular, tal curva deberá ser la representada paramétricamente por las (15) con el parámetro  $t$  variable en  $(a,b)$  . Viceversa, admitiendo que en  $(a,b)$  la función  $f$  admita derivada segunda continua siempre distinta de cero, se verifica inmediatamente que las (15) definen una curva  $C$  integral de (11) ; en efecto, de las (15) , sigue

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-f'(t) - t f''(t) + f'(t)}{f''(t)} = t$$

y entonces de las mismas (15) sigue como consecuencia la (11) .

Pero interesa señalar que esta curva integral singular  $C$  no es sino la envolvente de las rectas (14) . En efecto, para calcular tal envolvente se debe resolver respecto de  $x, y$  el sistema  $y = cx + f(c)$  ,  $0 = x + f'(c)$  , y éste conduce, evidentemente, a las (15) escritas con  $c$  en lugar de  $t$  . Y se trata de una efectiva envolvente en virtud de la hipótesis admitida  $y'' \neq 0$  (ver Cap. XXVII, n° 6) .

Concluyendo: La ecuación de Clairaut (11) tiene como integral general una familia  $\infty^1$  de rectas cuya ecuación se obtiene de la misma (11) escribiendo  $c$  en lugar de  $y'$  y una integral singular que es la envolvente de tales rectas.

El lector puede volver a examinar el ejemplo 6° del n° 1 .



## 8-INTEGRACION DE ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN.

Indicaremos ahora tres tipos de ecuaciones diferenciales de 2º orden, cuya integración puede reducirse a una de 1º orden. (\*)

1º) Ecuaciones en las que no interviene explícitamente la incógnita y. Dada una ecuación de 2º orden del tipo

$$f(x, y', y'') = 0, \quad (1)$$

la misma puede transformarse inmediatamente en una de 1º orden, asumiendo  $y'$  como nueva incógnita. En efecto; poniendo  $y' = p$ , tendremos para  $p$  la ecuación de 1º orden  $f(x, p, p') = 0$ . Si se logra encontrar la integral general  $p = p(x, c_1)$  de esta, con  $c_1$  constante arbitraria, es evidente que la integral general de la (1) estará expresada por la  $y = \int p(x, c_1) dx + c_2$ , donde  $c_2$  es otra constante arbitraria.

2º) Ecuaciones en las que no interviene explícitamente la variable independiente x. Dada una ecuación de 2º orden del tipo

$$f(y, y', y'') = 0, \quad (2)$$

la misma se reduce a una de 1º orden asumiendo como nueva incógnita a  $y'$ , pero considerándola función de  $y$ . Poniendo  $y' = p(y)$ , se tiene  $y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot p(y)$ , y entonces la (2) se transforma en la ecuación de 1º orden  $f(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$ .

Suponiendo haber obtenido la integral general  $p = p(y, c_1)$  de ésta, con  $c_1$  constante arbitraria, se tiene después para  $y$  la ecuación diferencial de 1º orden  $\frac{dy}{dx} = p(y, c_1)$ , que tiene sus variables separables, por lo que se concluye que la integral general de la (2) está dada por  $\int \frac{dy}{p(y, c_1)} = x + c_2$ , donde  $c_2$  es otra

-----

(\*) Debe tenerse presente que los mismos procedimientos aquí usados en las ecuaciones de 2º orden, pueden servir para reducir la integración de una ecuación de orden  $n$  a la de una ecuación de orden  $n - 1$ .



tra constante arbitraria.

3º) Ecuaciones homogéneas respecto de  $y, y', y''$ . Son del tipo:

$$f(x, y, y', y'') = 0 \quad (3)$$

con  $f$  función homogénea, de cierto grado  $\alpha$ , respecto de las variables  $y, y', y''$ . Por definición de función homogénea se tendrá idénticamente  $f(x, \mu y, \mu y', \mu y'') = \mu^\alpha f(x, y, y', y'')$  por lo que, poniendo  $\mu = \frac{1}{y}$ , puede escribirse la identidad  $f(x, y, y', y'') = y^\alpha f(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y})$ .

Prescindiendo de la eventual solución  $y \equiv 0$  (si  $\alpha > 0$ ), la (3) equivale, entonces, a la

$$f(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}) = 0 \quad (4)$$

la que puede reducirse a una ecuación de 1º orden asumiendo como nueva incógnita a  $\frac{y'}{y}$ . Poniendo, precisamente,  $\frac{y'}{y} = u$ , derivando se tiene  $\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = u'$ , es decir,  $\frac{y''}{y} = u^2 + u'$  por lo que la (4) resulta transformada en  $f(x, 1, u, u^2 + u') = 0$ . Suponiendo conocida la integral general  $u = u(x, c_1)$  de esta última, de la  $\frac{y'}{y} = u(x, c_1)$  se deduce inmediatamente que la integral general de la (3) está dada por  $y = c_2 e^{\int u(x, c_1) dx}$ .

## 9 - INTEGRALES PRIMERAS DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Dado un sistema de  $p$  ecuaciones diferenciales de 1º orden con  $p$  funciones incógnitas  $y_1, y_2, \dots, y_p$ :

$$f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_p, y'_1, y'_2, \dots, y'_p) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (1)$$

se denomina integral primera del mismo a toda función  $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$  que goce de la propiedad de reducirse a una constante toda vez que se sustituya en ella  $y_1$  con  $y_1(x)$ ,  $y_2$  con  $y_2(x)$ , ...,  $y_p$  con  $y_p(x)$ , siendo  $[y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)]$  cualquier solución del sistema (1). En otra forma puede decirse que la función  $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_p)$  es una integral prime-



ra del sistema (1) cuando sobre toda curva integral de dicho sistema asume un valor constante (naturalmente distinto de una curva a la otra). El conocimiento de una integral primera facilita la integración del sistema, puesto que, debiendo, para toda integral, ser  $\varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_p) = c$ , se podrá en general obtener de ésta ecuación una de las incógnitas, por ejemplo  $y_p$ , en función de las restantes y de la constante arbitraria  $c$ :

$$y_p = g(x, y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, c).$$

Se tiene así un medio de eliminar una incógnita y de sustituir (1) por un sistema de  $p-1$  ecuaciones con  $p-1$  incógnitas. Si se conocen dos integrales primeras se podrá, en general, eliminar dos incógnitas, y así sucesivamente..

Si, inclusive, se conocieran  $p$  integrales primeras, será generalmente posible obtener todas las incógnitas en función de  $x$  y de  $p$  constantes arbitrarias, obteniendo así la integral general del sistema dado.

Todo cuanto se ha dicho para los sistemas de ecuaciones de 1<sup>er</sup> orden vale, naturalmente, también para una ecuación diferencial de orden  $n$  (que equivale a tal sistema). Dada la ecuación diferencial

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad (2)$$

se llamará integral primera de la misma a toda función  $\varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  que se reduzca a una constante sobre cada curva integral de la ecuación (2). Conociendo una integral primera, la integración de la (2) queda trasladada a la integración de la ecuación (de orden  $n-1$ )  $\varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c$ . Si se conocen dos integrales primeras se podrá, en general, eliminar entre ellas la  $y^{(n-1)}$  y obtener así una ecuación de orden  $n-2$ ; si se conocen tres integrales primeras, se intentará eliminar  $y^{(n-1)}$  e  $y^{(n-2)}$  para obtener una ecuación diferencial de orden  $n-3$ ; y así sucesivamente.

La consideración de las integrales primeras se presenta a menudo en mecánica



racional. Por ejemplo, considerando un punto material de masa  $m$ , que se mueve sobre una recta (eje  $x$ ) bajo la acción de una fuerza conocida  $f(x)$  (posicional pero independiente del tiempo  $t$ ), se tendrá para su abscisa  $x(t)$  la ecuación diferencial de 2º orden:  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x)$ . Multiplicando por  $\frac{dx}{dt}$  se obtiene  $m \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \frac{dx}{dt}$ , o sea,  $\frac{m}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - f(x) \frac{dx}{dt} = 0$ ; integrando se deduce  $\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \int f(x) dx = c$ , obteniéndose así la integral primera que se conoce como la fuerza viva.

## 10 - ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

Una ecuación diferencial  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  de orden  $n$  será denominada lineal cuando su primer miembro sea una función lineal de  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , es decir, cuando sea del siguiente tipo:

$$p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x), \quad (1)$$

con  $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$  (coeficientes) y  $q(x)$  (término independiente) funciones dadas de la variable  $x$ , que supondremos continuas en un intervalo dado  $I$  (acotado o no). Si el primer coeficiente  $p_0(x)$ , es distinto de cero en todo  $I$ , la ecuación (1) puede escribirse bajo forma normal

$$y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x), \quad (2)$$

habiendo introducido las funciones  $a_i(x) = \frac{p_i(x)}{p_0(x)}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $f(x) = \frac{q(x)}{p_0(x)}$ , que son todavía continuas en  $I$ . En lo sucesivo nos referiremos exclusivamente a la forma normal (2) y supondremos  $n \geq 2$  puesto que el caso  $n=1$  ha sido ya completamente estudiado en el nº 4.

Las derivadas parciales del primer miembro de (2) con respecto a  $y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$  son respectivamente iguales a  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), 1$ ; tales derivadas son continuas y por lo tanto se mantendrán acotadas cuando  $x$  va



rfe en cualquier intervalo cerrado y acotado  $J$  contenido en  $I$ . (\*)

Manteniendo  $x$  en  $J$  se podrá entonces aplicar a la (2) el teor. III del n° 5 por lo que podrá decirse que fijados arbitrariamente un punto  $x_0 \in J$  y  $n$  números  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ , existirá, en todo  $J$  y será única, la integral  $y(x)$  de la (2) que verifica las condiciones iniciales

$$y(x_0) = u_0, \quad y'(x_0) = u_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}. \quad (3)$$

Como esto vale cualquiera sea  $J \subseteq I$ , se deduce:

I - Fijados arbitrariamente un punto  $x_0 \in I$  y  $n$  números  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ , existe y es única la integral  $y(x)$  de la (2) que verifica las condiciones iniciales (3); tal integral resulta definida en todo  $I$ .

Según la advertencia ya introducida en el n° 1, aquí se ha tácitamente supuesto que las funciones conocidas y las integrales buscadas son reales. Pero en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales es oportuno anular esta restricción y, siempre manteniendo real la variable  $x$ , considerar los coeficientes  $a_1(x), \dots, a_n(x)$  y el término independiente  $f(x)$  como funciones continuas, reales o complejas. También en estas condiciones es válido el teor. I, admitiendo naturalmente que en las (3),  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  puedan también ser números complejos. Para convencernos de esta afirmación, pongamos en la (2)  $a_k(x) = b_k(x) + i c_k(x)$ ,  $f(x) = g(x) + i h(x)$ ,  $y(x) = \varphi(x) + i \psi(x)$  y, en las (3),  $u_k = v_k + i w_k$ . Entonces, separando lo real de lo imaginario, la (2) proporciona el siguiente sistema, de forma normal, de dos ecuaciones de orden  $n$  en las dos funciones incógnitas reales  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ :

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)} + [b_1(x) \varphi^{(n-1)} - c_1(x) \psi^{(n-1)}] + \dots + [b_n(x) \varphi - c_n(x) \psi] &= g(x) \\ \psi^{(n)} + [c_1(x) \varphi^{(n-1)} + b_1(x) \psi^{(n-1)}] + \dots + [c_n(x) \varphi + b_n(x) \psi] &= h(x) \end{aligned} \quad (4)$$

(\*) Si el propio  $I$  es cerrado y acotado, la consideración de  $J$  es superflua.



mientras las (3) dan

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = v_0, & \varphi'(x_0) = v_1, & \dots, & \varphi^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1} \\ \psi(x_0) = w_0, & \psi'(x_0) = w_1, & \dots, & \psi^{(n-1)}(x_0) = w_{n-1} \end{cases} \quad (5)$$

Considerando el sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente al sistema (4), se ve inmediatamente que, manteniendo  $x$  en cualquier intervalo cerrado y acotado  $J \subseteq I$ , valen para tal sistema las hipótesis del teor. II del n° 5, tras lo que, razonando como antes, se concluye que en todo  $I$  existe y es única la integral  $[\varphi(x), \psi(x)]$  del sistema (4) que verifica las condiciones iniciales (5). De este hecho deriva precisamente que también en el campo de las funciones complejas continúe valiendo el teor. I.

---

Se dirá que la ecuación diferencial (2) es homogénea cuando el término independiente  $f(x)$  sea idénticamente nulo; no homogénea en el caso contrario.

Suponiendo que la (2) sea no homogénea, es oportuno asociarle la correspondiente ecuación homogénea

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (6)$$

puesto que vale la siguiente propiedad:

II - Si se conoce una integral  $y_0(x)$  de la ecuación no homogénea (2), y se le suma una integral cualquiera  $\eta(x)$  de la correspondiente ecuación homogénea (6), se obtiene una función  $y_0(x) + \eta(x)$  que es todavía una integral de la (2). Viceversa, toda integral de la (2) puede obtenerse de ese modo, es decir, agregando a  $y_0(x)$  una integral de la ecuación homogénea (6).

Dem. Por hipótesis es  $y_0^{(n)} + a_1(x) y_0^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y_0 = f(x)$ ,  $(n) +$



$a_1(x) \eta^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \eta = 0$  ; sumando miembro a miembro estas dos ecuaciones se obtiene  $(y_0 + \eta)^{(n)} + a_1(x) (y_0 + \eta)^{(n-1)} + \dots + a_n(x) (y_0 + \eta) = f(x)$  , lo que prueba la primera afirmación. Para la segunda bastará hacer ver que, llamando con  $y(x)$  a cualquier otra integral de la (2) , la diferencia  $y(x) - y_0(x)$  satisface la ecuación homogénea (6) . Y, en efecto, como por hipótesis es  $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x)$  ,  $y_0^{(n)} + a_1(x) y_0^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y_0 = f(x)$  , sustrayendo miembro a miembro resulta  $(y - y_0)^{(n)} + a_1(x) (y - y_0)^{(n-1)} + \dots + a_n(x) (y - y_0) = 0$  , que es lo que queríamos demostrar.

Este teorema II muestra que para llegar a la integración de la ecuación no homogénea (2) se puede proceder así: 1º) determinar todas las integrales  $\eta(x)$  de la ecuación homogénea (6) ; 2º) determinar una integral  $y_0(x)$  de la ecuación (2) . Tras esto, sumando  $\eta(x) + y_0(x)$  se tendrán todas las integrales de la (2) .

Veremos en el nº 12 que una vez resuelto el problema 1º) es siempre posible obtener también la resolución del problema segundo ; por lo tanto, toda la dificultad que se presenta en la integración de las ecuaciones diferenciales lineales está en la resolución de las ecuaciones homogéneas.

## 11 - ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS.

Una primera propiedad de la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad , \quad (1)$$

está expresada por el siguiente teorema:

I - Si  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$  son  $p$  integrales de la (1) con  $p$  entero arbitrario, llamando con  $c_1, c_2, \dots, c_p$  a  $p$  constantes arbitrarias, también la función  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_p y_p(x)$  será una integral de dicha ecuación.

Dem. En efecto; de las  $y_k^{(n)} + a_1(x) y_k^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y_k = 0$  ,  $(k=1, 2, \dots$



p) , multiplicando ordenadamente por  $c_k$  y sumando, sigue  $(\sum_{k=1}^p c_k y_k)^{(n)} + a_1(x) (\sum_{k=1}^p c_k y_k)^{(n-1)} + \dots + a_n(x) (\sum_{k=1}^p c_k y_k) = 0$  , lo que prueba la tesis.

Consideremos ahora  $n$  integrales (tantas como el orden de la ecuación)  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  de la (1). Llamaremos wronskiano de tales integrales al siguiente determinante de orden  $n$  :

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & \dots & y''_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (2)$$

Para tal determinante vale el siguiente teorema de Liouville:

II - Dadas arbitrariamente  $n$  integrales  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  de la ecuación lineal homogénea (1) y un punto  $x_0$  del intervalo  $I$  , el wronskiano  $W(x)$  de tales integrales verifica la fórmula

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1(t) dt} \quad (3)$$

Dem. Calculemos la derivada de  $W(x)$  teniendo presente que la derivada de un determinante de orden  $n$  es igual a la suma de  $n$  determinantes obtenidos a partir del dado sustituyendo a las funciones de la  $1^a$ ,  $2^a$ , ...,  $(n-1)^a$ ,  $n^a$  fila, por sus derivadas. En nuestro caso es evidente que los primeros  $n-1$  de estos determinantes tendrán dos filas iguales y serán, entonces, nulos. De ahí que

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \quad (4)$$



Tengamos ahora en cuenta que  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  verifican la ecuación (1); es decir se tendrá, por ejemplo,

$$y_1^{(n)}(x) + a_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + a_2(x) y_1^{(n-2)}(x) + \dots + a_{n-1}(x) y_1'(x) + a_n(x) y_1(x) = 0,$$

por lo que, si a la última fila del determinante (4) agregamos la 1ª multiplicada por  $a_n(x)$ , la 2ª multiplicada por  $a_{n-1}(x)$ , ..., la penúltima multiplicada por  $a_2(x)$ , los elementos de la última fila se pueden sustituir por los siguientes:  $-a_1(x) y_1^{(n-1)}(x), \dots, -a_{n-1}(x) y_1'(x)$ .

Se tiene, entonces

$$W'(x) = -a_1(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

o sea, recordando la (2),  $W'(x) = -a_1(x) W(x)$ .

Multiplicando ambos miembros por  $e^{\int_{x_0}^x a_1(t) dt}$ , resulta  $\frac{d}{dx} [e^{\int_{x_0}^x a_1(t) dt} \cdot W(x)] = 0$ , o sea que  $e^{\int_{x_0}^x a_1(t) dt} \cdot W(x)$  es constante, igual por ejemplo al valor que asume para  $x = x_0$ , que es, evidentemente  $W(x_0)$ . De aquí sigue la tesis.

Del teor. II se obtiene inmediatamente este otro

III - El Wronskiano de  $n$  integrales  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  de la ecuación diferencial homogénea (1) o es idénticamente nulo o no se anula jamás en el intervalo  $I$ .

Dem. En efecto; si  $W(x)$  no es idénticamente nulo, existe en  $I$  un  $x_0$  en el que  $W(x_0) \neq 0$ ; pero entonces, de la (3), sigue que  $W(x)$  es siempre  $\neq 0$ , que es lo que queríamos demostrar.



Introduzcamos ahora la siguiente definición: diremos que  $n$  integrales  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  de la ecuación lineal y homogénea (1) forman un sistema fundamental de integrales cuando su Wronskiano  $W(x)$  sea distinto de cero en todo el intervalo  $I$  (también puede decirse, por el teor. III: cuando  $W(x)$  no es idénticamente nulo).

Para darle legitimidad a la definición debemos, sin embargo, hacer ver que existen, efectivamente, sistemas fundamentales de integrales. Y mostraremos el modo de construir uno. Fijado en  $I$  un punto  $x_0$ , sea  $y_1(x)$  aquella integral de la (1) que está individualizada por las condiciones iniciales:

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = y_1''(x_0) = \dots = y_1^{(n-2)}(x_0) = y_1^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad (5_1)$$

sea  $y_2(x)$  la individualizada por estas otras condiciones iniciales

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1, \quad y_2''(x_0) = y_2'''(x_0) = \dots = y_2^{(n-2)}(x_0) = y_2^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad (5_2)$$

y así sucesivamente hasta denominar  $y_n(x)$  la individualizada por las

$$y_n(x_0) = y_n'(x_0) = y_n''(x_0) = \dots = y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = 1.$$

Las integrales  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  así presentadas son tales que para su wronskiano  $W(x)$  resulta:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad ;$$

tal wronskiano no es idénticamente nulo y dichas integrales forman, entonces, un sistema fundamental. Es claro que la construcción de un sistema tal se puede hacer de infinitos modos distintos: basta proceder como antes, eligiendo los valores iniciales  $(5_1)$ ,  $(5_2)$ , ...,  $(5_n)$  de modo que el determinante por ellos formado resulte distinto de cero.

Tras esto, podemos demostrar un importante teorema:







$n$ -ésima por  $a_1(x)$  y luego sumamos miembro a miembro, se llega a que  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ , ...,  $v_n(x)$  deben también verificar la ecuación

$$y^{(n)}(x) = v_1(x) y_1^{(n)}(x) + v_2(x) y_2^{(n)}(x) + \dots + v_n(x) y_n^{(n)}(x) \quad (8)$$

Observemos también que las funciones  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ , ...,  $v_n(x)$  resultan racionalmente expresadas por medio de las integrales  $y(x)$ ,  $y_1(x)$ , ...,  $y_n(x)$  y de sus derivadas hasta las de orden  $n-1$ ; como tales integrales admiten en todo  $I$  derivadas hasta las de orden  $n$ , resulta que cada una de las  $v_1(x)$ , ...,  $v_n(x)$  admitirá en  $I$ , derivadas primeras.

Calculemos estas derivadas:

Derivando la primera de las (7) se obtiene

$$y'(x) = v_1(x) y_1'(x) + \dots + v_n(x) y_n'(x) + v_1'(x) y_1(x) + \dots + v_n'(x) y_n(x),$$

por lo que, sustrayendo la segunda de las (7) se obtiene

$$v_1'(x) y_1(x) + v_2'(x) y_2(x) + \dots + v_n'(x) y_n(x) = 0 \quad (9_1)$$

Derivando la segunda de las (7) se obtiene

$$y''(x) = v_1(x) y_1''(x) + \dots + v_n(x) y_n''(x) + v_1'(x) y_1'(x) + \dots + v_n'(x) y_n'(x)$$

de la que, si se sustrae la tercera de las (7), se obtiene

$$v_1'(x) y_1'(x) + v_2'(x) y_2'(x) + \dots + v_n'(x) y_n'(x) = 0 \quad (9_2)$$

Prosiguiendo del mismo modo sobre las ecuaciones sucesivas llegaremos, mediante la derivación de la penúltima de las (7) y la posterior sustracción de la última, a obtener la

$$v_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + v_2'(x) y_2^{(n-2)}(x) + \dots + v_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0 \quad (9_{n-1})$$

Por último, derivando la última de las (7) se deduce la relación

$$y^{(n)}(x) = v_1(x) y_1^{(n)}(x) + \dots + v_n(x) y_n^{(n)}(x) + v_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + v_n'(x) y_n^{(n-1)}(x),$$

y sustrayendo de ella la (8) se obtiene

$$v_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + v_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + v_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = 0 \quad (9_n)$$

Entonces, las derivadas que buscábamos  $v_1'(x)$ , ...,  $v_n'(x)$  deben verificar las



Entonces la fórmula (4) da todas las soluciones de la ecuación lineal y homogénea (1). Si se desea la que satisface las condiciones iniciales genéricas:

bastará determinar las constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  de modo que valgan las

lo que es posible hacer de uno y solamente de un modo, porque las (11) constituyen un sistema de  $n$  ecuaciones lineales, con determinante de los coeficientes  $W(x_0) \neq 0$ . Viceversa, fijadas arbitrariamente las constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , la (6) proporciona una integral  $y(x)$  de la (1) que es la correspondiente a las condiciones iniciales  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  proporcionadas por la (11). Entonces, cada  $y(x)$  dada por la (6), es decir, cada integral de la (1) es una integral particular (en el sentido precisado en el n<sup>o</sup> 7) y de ahí que la (1) carezca de integrales singulares.

V - Dada la ecuación diferencial lineal y homogénea (1), la



misma carece de integrales singulares y su integral general puede expresarse inmediatamente con la (6) apenas se conozca un sistema fundamental  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  de integrales particulares de la ecuación dada.

Naturalmente este teorema no resuelve el problema de integrar la (1) sino que solamente señala cuál es la dificultad esencial de tal problema (encontrar un sistema fundamental de integrales particulares) y cuál es la forma de la integral general (es una combinación lineal, con coeficientes constantes arbitrarios, de las integrales de un sistema fundamental fijado).

---

Agreguemos una observación sobre el sistema fundamental  $[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$ , introduciendo una definición.

Dadas, en un intervalo,  $n$  funciones  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ , se dirá que las mismas son linealmente independientes en tal intervalo cuando no existe una combinación lineal  $c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)$ , con coeficientes constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  no todos nulos, que resulte idénticamente nula en el intervalo considerado.

Demostremos que:

VI - Condición necesaria y suficiente para que  $n$  integrales  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  de la ecuación (1) sean linealmente independientes en  $I$  es que dichas funciones formen un sistema fundamental, es decir, que su Wronskiano  $W(x)$  sea en  $I$  siempre distinto de cero.

Dem. La condición es necesaria, es decir, si  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  son linealmente independientes en  $I$ , su Wronskiano es necesariamente  $\neq 0$ . En efecto, si en un punto  $x_0$  fuese  $W(x_0) = 0$ , el siguiente sistema de  $n$  ecuacio-



nes lineales homogéneas en las  $n$  incógnitas  $c_1, c_2, \dots, c_n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) + \dots + c_n y'_n(x_0) = 0 \\ \dots \\ c_1 y^{(n-1)}_1(x_0) + c_2 y^{(n-1)}_2(x_0) + \dots + c_n y^{(n-1)}_n(x_0) = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

tendría autosoluciones, existiendo  $n$  números, no todos nulos  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$  que verificarían las (12). Entonces la función  $\bar{y}(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \dots + \bar{c}_n y_n(x)$  sería una integral de la (1) que, en virtud de las (12), verificaría las condiciones iniciales  $\bar{y}(x_0) = 0, \bar{y}'(x_0) = 0, \dots, \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$ ; pero integrales que verifiquen esta condición existe una sola y se trata, evidentemente, de la función idénticamente nula. Debería entonces ser

$$\bar{c}_1 y_1(\mathbf{x}) + \bar{c}_2 y_2(\mathbf{x}) + \dots + \bar{c}_n y_n(\mathbf{x}) \equiv 0 \quad (13)$$

lo que contradice la hipótesis hecha en el sentido que las  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  eran linealmente independientes.

La condición es suficiente, es decir, si  $W(x) \neq 0$ , entonces  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  son linealmente independientes. En efecto, si no lo fuesen, existirían  $n$  números  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$  no todos nulos tales que harían cierta la (13) y esto traduciría el hecho de que la integral  $y \equiv 0$  se podría obtener de la (6) asumiendo  $c_1 = \bar{c}_1, \dots, c_n = \bar{c}_n$ . Pero se ha visto (durante la demostración del teor. IV) que cada integral de la (1) proviene de una y solamente una elección de las constantes arbitrarias  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Debe ser, entonces,  $\bar{c}_1 = 0, \bar{c}_2 = 0, \dots, \bar{c}_n = 0$  y esto está contra la hipótesis de que  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$  no sean todos nulos, que es lo que queríamos demostrar.

Se pueden entonces afirmar que se habrá conseguido la integración de la ecuación lineal homogénea (1) cuando se haya logrado encontrar  $n$  integrales, linealmente independientes, de la



misma.

Por ejemplo, la ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2} y' + \frac{2}{1+x^2} y = 0 \quad (14)$$

admite la dos integrales  $y_1 = x$ ,  $y_2 = x^2 - 1$  (como se verifica inmediatamente).

Estas son linealmente independientes ya que su wronskiano vale

$$\begin{vmatrix} x & x^2 - 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 + 1 \neq 0.$$

## 12 - ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS.

Consideremos la ecuación no homogénea

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \quad (1)$$

y supongamos haber logrado ya construir la integral general

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (2)$$

de la ecuación homogénea correspondiente

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (3)$$

En virtud de lo que se dijo al final del nº 10, para tener la integral general de la (1), bastará construir una integral particular  $y_0(x)$  de la (1), puesto que tras obtenerla, según el teor. II del nº 10, la integral general de la (1) estará expresada por la fórmula

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_0(x)^{(*)} \quad (4)$$

Mostraremos ahora que, conocido un sistema fundamental  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  de la (3), siempre será posible mediante cuadraturas encontrar una inte-

(\*) El citado teor. II del nº 10 asegura que la (4) proporciona todas las integrales de la (1); que cada una de éstas sea, después, una integral particular (en el sentido del nº 7) se lo ve con un razonamiento similar al hecho en el caso de la (3) [ver las (10), (11), ... del nº precedente]. Por eso hemos dicho sin más que (4) es la integral general de la (1)



El primer método (llamado de variación de las constantes arbitrarias o de Lagrange) está apoyado sobre la tentativa de buscar la integral particular  $y_0(x)$  de la (1) bajo una forma análoga a la (2) de la integral general de la ecuación homogénea (3), pero sustituyendo las constantes arbitrarias  $c_1, c_2, \dots, c_n$  por funciones  $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$  a determinarse oportunamente. Y precisamente se trata de determinar  $y_0(x), v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$  de modo que valgan, inicialmente, las siguientes  $n$  relaciones

y, además, de modo que  $y_0(x)$  verifique la ecuación dada (1). De las (5) sigue  $\int$  con el mismo cálculo hecho en el  $n^o$  precedente sobre las (7) para deducir las  $(9_1), (9_2), \dots, (9_{n-1})$  que las derivadas  $v'_1(x), v'_2(x), \dots, v'_n(x)$  deben verificar las  $n-1$  ecuaciones

Tras esto, para imponer que  $y_0(x)$  verifique la (1), derivamos la última de las (5) obteniendo así la

$$y_0^{(n)}(x) = v_1(x) y_1^{(n)}(x) + \dots + v_n(x) y_n^{(n)}(x) + v'_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + v'_n(x) y_n^{(n-1)}(x),$$



a la que le agregamos las (5) multiplicadas por  $a_n(x)$ ,  $a_{n-1}(x)$ , ...,  $a_1(x)$ , respectivamente. Resultará entonces, teniendo en cuenta que  $y_1(x)$ , ...,  $y_n(x)$  son integrales de la ecuación homogénea (3) :

$$\begin{aligned} y_0^{(n)}(x) + a_1(x) y_0^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x) y_0'(x) + a_n(x) y_0(x) = \\ = v_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + v_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) , \end{aligned}$$

siendo, por lo tanto, para que  $y_0(x)$  verifique la (1) , necesario y suficiente que sea

$$v_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + v_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x) . \quad (7)$$

Se tienen así, con las (6) , (7) , n ecuaciones lineales en las n incógnitas  $v_1'(x)$ , ...,  $v_n'(x)$ , con el wronskiano  $W(x)$  de las n integrales  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  de la ecuación homogénea constituyendo el determinante de los coeficientes; siendo por hipótesis  $W(x) \neq 0$  , las  $v_1'(x)$ ,  $v_2'(x)$ , ...,  $v_n'(x)$  resultan bien determinadas. Después, mediante una cuadratura, se deducirán las  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ , ...,  $v_n(x)$  y, sustituyendo en la primera de las (5) , se tendrá la integral particular buscada  $y_0(x)$  .

Se tiene, entonces, la siguiente regla :

I - Para obtener la integral general de la ecuación lineal no homogénea (1) basta conocer un sistema fundamental  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  de integrales de la correspondiente ecuación homogénea (3) . La integral general buscada está dada por la fórmula

$$y(x) = [c_1 + v_1(x)] y_1(x) + [c_2 + v_2(x)] y_2(x) + \dots + [c_n + v_n(x)] y_n(x) \quad (*) ,$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias y  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ , ...,  $v_n(x)$  son n funciones cuyas derivadas están proporcio-  
-----

(\*) Que sigue de la (4) y la primera de las (5) .











$$K(x, \xi) = \frac{1}{W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ y'_1(\xi) & y'_2(\xi) & \dots & y'_n(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix} \quad (13)$$

Podemos enunciar

II - La integral  $K(x, \xi)$  de la ecuación homogénea (3) que verifica las condiciones

$$K(\xi, \xi) = 0, \quad K'(\xi, \xi) = 0, \dots, K^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0, \quad K^{(n-1)}(\xi, \xi) = 1 \quad (14)$$

se obtiene dividiendo por el wronskiano de  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  calculado en el punto  $\xi$ , el determinante obtenido de dicho wronskiano cuando se sustituyen los elementos de la última fila de éste con las funciones  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ .

Una vez construida tal función  $K(x, \xi)$ , que será denominada el núcleo resolvente de la (1), pasemos a demostrar que, fijado arbitrariamente un punto  $x_0$  del intervalo  $I$ , una integral particular  $y_0(x)$  de la ecuación no homogénea (1) está dada por

$$y_0(x) = \int_{x_0}^x K(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

En efecto; de esta fórmula sigue (recordando el teor. III del Cap. XIX, n° 5):

$$y'_0(x) = K(x, x) f(x) + \int_{x_0}^x K'(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad \text{o sea}$$

$$y'_0(x) = \int_{x_0}^x K'(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

puesto que  $K(x, x) = 0$  por la primera de las (14);

$$y''_0(x) = K'(x, x) f(x) + \int_{x_0}^x K''(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{o sea}$$

$$y''_0(x) = \int_{x_0}^x K''(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$



ya que  $K'(x, x) = 0$  , por la segunda de las (14) ;

.....

$$y_0^{(n-1)}(x) = K^{(n-2)}(x, x) f(x) + \int_{x_0}^x K^{(n-1)}(x, \xi) f(\xi) d\xi , \text{ o sea}$$

$$y_0^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^x K^{(n-1)}(x, \xi) f(\xi) d\xi ,$$

puesto que  $K^{(n-2)}(x, x) = 0$  , por la penúltima de las (14) ;

$$y_0^{(n)}(x) = K^{(n-1)}(x, x) f(x) + \int_{x_0}^x K^{(n)}(x, \xi) f(\xi) d\xi , \text{ o sea}$$

$$y_0^{(n)}(x) = f(x) + \int_{x_0}^x K^{(n)}(x, \xi) f(\xi) d\xi ,$$

ya que  $K^{(n-1)}(x, x) = 1$  , por la última de las (14) .

Tendremos así

$$\begin{aligned} & y_0^{(n)}(x) + a_1(x) y_0^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x) y_0'(x) + a_n(x) y_0(x) = \\ & = f(x) + \int_{x_0}^x [K^{(n)}(x, \xi) + a_1(x) K^{(n-1)}(x, \xi) + \dots + a_{n-1}(x) K'(x, \xi) + \\ & \quad + a_n(x) K(x, \xi)] f(\xi) d\xi = f(x) \end{aligned}$$

porque, siendo  $K(x, \xi)$  una integral de la ecuación homogénea (3) , la expresión entre paréntesis cuadrados vale cero, lo que prueba que efectivamente  $y_0(x)$  verifica la (1) .

Se tiene, entonces,

III - Si dada la ecuación lineal no homogénea (1) , se supone conocer  $n$  integrales linealmente independientes  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  de la ecuación homogénea correspondiente (3) , una vez construido el núcleo resolvente  $K(x, \xi)$  según la regla dada en el enunciado II , la integral general de la (1) toma la forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + \int_{x_0}^x K(x, \xi) f(\xi) d\xi ,$$



con  $c_1, c_2, \dots, c_n$  constantes arbitrarias y  $x_0$  punto cualquiera del intervalo  $I$ .

Retomando el ejemplo de la (9), el núcleo resolvente  $K(x, \xi)$  está dado por

$$K(x, \xi) = \begin{vmatrix} \xi & \xi^2 - 1 \\ x & x^2 - 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \xi & \xi^2 - 1 \\ 1 & 2\xi \end{vmatrix} = \frac{(x - \xi)(x\xi + 1)}{\xi^2 + 1}$$

y entonces se obtiene la integral particular

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \int_0^x \frac{(x - \xi)(x\xi + 1)}{\xi^2 + 1} (\xi^2 + 1)^2 d\xi = \\ &= \int [-x\xi^4 + (x^2 - 1)\xi^3 + (x^2 - 1)\xi + x] d\xi = \\ &= -x \frac{x^5}{5} + (x^2 - 1) \frac{x^4}{4} + (x^2 - 1) \frac{x^2}{2} + x \cdot x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{20} \end{aligned}$$

obteniéndose, por ende, la integral general

$$y(x) = c_1 x + c_2 (x^2 - 1) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{20},$$

como ya había sido calculada con el otro método.

### 13 - ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES; ESTUDIO DE LAS ECUACIONES HOMOGÉNEAS.

Examinemos ahora el caso particular en que la ecuación diferencial lineal (1) del  $n^0$  precedente tenga sus coeficientes constantes (en vez de ser funciones de  $x$ ). Escribiremos la ecuación del siguiente modo

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

con  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  constantes reales o complejas y  $f(x)$  función continua dada (real o compleja).

Según la teoría general desarrollada precedentemente, debemos estudiar primeramente la ecuación homogénea correspondiente a la (1), es decir

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n = 0 \quad (2)$$

y buscar  $n$  integrales linealmente independientes de ésta. Con ese objeto anali-



ceamos si la (2) admite integrales del tipo  $y = e^{\alpha x}$ , con  $\alpha$  constante a determinarse oportunamente. Sustituyendo en la (2) se obtiene

$$e^{\alpha x} (\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n) = 0$$

y de ahí que la (2) admitirá la integral  $e^{\alpha x}$  si y sólo si  $\alpha$  es raíz de la siguiente ecuación algebraica de grado  $n$ :

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0 \quad (3)$$

que será denominada la ecuación característica relativa a la ecuación homogénea (2).

Supongamos primeramente que la ecuación característica (3) tenga sus raíces todas distintas y designémoslas con  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Entonces la (2) tiene las  $n$  integrales  $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ , cuyo wronskiano vale

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & \dots & e^{\alpha_n x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \dots & \alpha_n e^{\alpha_n x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} e^{\alpha_1 x} & \dots & \alpha_n^{n-1} e^{\alpha_n x} \end{vmatrix} = e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

que será siempre distinto de cero, ya que el último determinante es el de Vandermonde relativo a los  $n$  números distintos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Entonces tales integrales forman un sistema fundamental y de ahí que la integral general de la (2) esté dada por

$$y(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + c_n e^{\alpha_n x}, \quad (4)$$

con  $c_1, c_2, \dots, c_n$  constantes arbitrarias (reales o complejas).

Por ejemplo, la ecuación  $y''' - y'' - 2y' = 0$  tiene la ecuación característica  $\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha = 0$  con las raíces  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$ ; su integral general es, entonces,  $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ .

Supongamos ahora que la ecuación característica (3) tenga



raíces múltiples. Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  (con  $r < n$ ) las raíces distintas;  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  las multiplicidades respectivas (con  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n$ ). Consideremos una de estas raíces, indicándola simplemente con  $\alpha$  y llamando  $\mu$  su multiplicidad, hagamos ver que, además de la integral  $e^{\alpha x}$ , la (2) admite también estas otras  $\mu - 1$  integrales:  $x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x}$ , es decir que, en total, admitirá, con origen en dicha raíz  $\alpha$ , las  $\mu$  integrales:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}, \quad y_2(x) = x e^{\alpha x}, \quad y_3(x) = x^2 e^{\alpha x}, \dots, y_\mu(x) = x^{\mu-1} e^{\alpha x}. \quad (5)$$

Pensando por un momento que  $\alpha$  no sea un número determinado, sino una variable, sustituyamos cada una de estas funciones (5) en el lugar de la  $y$ , en el primer miembro de (2); obtenemos así las siguientes  $\mu$  funciones de  $x$  y de  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, \alpha) &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{\alpha x}) + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} (e^{\alpha x}) + \dots + a_{n-1} \frac{\partial}{\partial x} (e^{\alpha x}) + a_n e^{\alpha x}, \\ \Phi_1(x, \alpha) &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x e^{\alpha x}) + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} (x e^{\alpha x}) + \dots + a_{n-1} \frac{\partial}{\partial x} (x e^{\alpha x}) + a_n x e^{\alpha x}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Phi_{\mu-1}(x, \alpha) &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x^{\mu-1} e^{\alpha x}) + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} (x^{\mu-1} e^{\alpha x}) + \dots + \\ &\quad + a_{n-1} \frac{\partial}{\partial x} (x^{\mu-1} e^{\alpha x}) + a_n x^{\mu-1} e^{\alpha x}, \end{aligned}$$

donde, teniendo en cuenta la invertibilidad del orden de las derivaciones, se tendrá

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}, \quad \Phi_2 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \alpha^2}, \quad \dots, \quad \Phi_{\mu-1} = \frac{\partial^{\mu-1} \Phi_0}{\partial \alpha^{\mu-1}}. \quad (6)$$

Observemos por otra parte que, sustituyendo  $e^{\alpha x}$  en el lugar de  $y$  en el primer miembro de (2) se tendrá, como ya fue observado con anterioridad,  $e^{\alpha x}(x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n)$ , o sea,  $e^{\alpha x} F(\alpha)$ , si con  $F(\alpha)$  indicamos el primer miembro de la ecuación característica (3). Se tendrá, entonces,

$$\Phi_0(x, \alpha) = e^{\alpha x} F(\alpha)$$

y de aquí, por las (6) y por la regla de Leibnitz sobre las derivadas sucesivas de



un producto (ver Cap. VIII, n° 9) :

$$\Phi_1(x, \alpha) = e^{\alpha x} [x F(\alpha) + F'(\alpha)]$$

$$\Phi_2(x, \alpha) = e^{\alpha x} [x^2 F(\alpha) + 2x F'(\alpha) + F''(\alpha)]$$

.....

$$\Phi_{\mu-1}(x, \alpha) = e^{\alpha x} [x^{\mu-1} F(\alpha) + \binom{\mu-1}{1} x^{\mu-2} F'(\alpha) + \dots + \binom{\mu-1}{\mu-1} F^{(\mu-1)}(\alpha)] .$$

Imaginemos ahora que el lugar de  $\alpha$  sea ocupado por la raíz antes considerada de la ecuación  $F(\alpha) = 0$  ; como tal raíz tiene multiplicidad  $\mu$ , resultará  $F(\alpha) = F'(\alpha) = F''(\alpha) = \dots = F^{(\mu-1)}(\alpha) = 0$  (ver Cap. XVI, n° 7, teor. III) teniéndose, por lo tanto,  $\Phi_0(x, \alpha) = \Phi_1(x, \alpha) = \Phi_2(x, \alpha) = \dots = \Phi_{\mu-1}(x, \alpha) = 0$ , lo que prueba que efectivamente las funciones (5) anulan el primer miembro de las (2), o sea que son integrales de dicha ecuación.

Considerando entonces las integrales del tipo (5) en correspondencia a cada una de las raíces  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  recién mencionadas, vemos que nuestra ecuación (2) tendrá por integrales a

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_1 x}, x e^{\alpha_1 x}, x^2 e^{\alpha_1 x}, \dots, x^{\mu_1-1} e^{\alpha_1 x}, \\ & e^{\alpha_2 x}, x e^{\alpha_2 x}, x^2 e^{\alpha_2 x}, \dots, x^{\mu_2-1} e^{\alpha_2 x}, \\ & e^{\alpha_r x}, x e^{\alpha_r x}, x^2 e^{\alpha_r x}, \dots, x^{\mu_r-1} e^{\alpha_r x}, \end{aligned} \quad (7)$$

que, en total, son  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n$ .

Demostremos ahora que :

I - Las  $n$  integrales (7) de la ecuación diferencial (2) forman un sistema fundamental, con lo que la integral general de la (2) está expresada por la fórmula

$$\begin{aligned} y(x) = & (c_{10} + c_{11}x + c_{12}x^2 + \dots + c_{1, \mu_1-1}x^{\mu_1-1}) e^{\alpha_1 x} + \\ & + (c_{20} + c_{21}x + c_{22}x^2 + \dots + c_{2, \mu_2-1}x^{\mu_2-1}) e^{\alpha_2 x} + \\ & + \dots + \\ & + (c_{r0} + c_{r1}x + c_{r2}x^2 + \dots + c_{r, \mu_r-1}x^{\mu_r-1}) e^{\alpha_r x}, \end{aligned} \quad (8)$$



donde  $c_{10}, c_{11}, \dots$ , son constantes arbitrarias<sup>(\*)</sup>.

Dem. El cálculo del wronskiano de las integrales (7) no es simple y entonces para probar que forman un sistema fundamental, aprovecharemos el teor. VI del n° 11, haciendo ver que son linealmente independientes.

Supongamos primeramente  $r = 1$ , es decir, que la ecuación característica tenga una sola raíz  $\alpha_1$  con multiplicidad  $n$ . En este caso se tendrían las  $n$  integrales  $e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}, \dots, x^{n-1}e^{\alpha_1 x}$ , que, en caso de no ser linealmente independientes, admitirían la existencia de  $n$  constantes  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ , no todas nulas, de modo de lograr que  $(c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1})e^{\alpha_1 x}$  sea idénticamente nulo. Esto es, sin más, absurdo pues el principio de identidad de los polinomios nos dice que, para lograrlo, deben necesariamente ser  $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ .

Supongamos ahora  $r \geq 2$  y continuemos razonando por el absurdo, suponiendo que exista una combinación lineal con coeficientes constantes no todos nulos de las integrales (7), que resulte idénticamente nula. Tal combinación será del tipo  $P_1(x)e^{\alpha_1 x} + P_2(x)e^{\alpha_2 x} + \dots + P_r(x)e^{\alpha_r x}$ , donde  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_r(x)$  indican polinomios en  $x$ , entre los que al menos uno, no es idénticamente nulo.

Se tratará, entonces, de probar que dadas las  $r \geq 2$  exponenciales  $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_r x}$  (con  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  números distintos), es absurdo suponer que puedan existir polinomios  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_r(x)$ , no todos idénticamente nulos, de modo que valga la identidad

$$P_1(x)e^{\alpha_1 x} + P_2(x)e^{\alpha_2 x} + \dots + P_r(x)e^{\alpha_r x} \equiv 0 \quad (9)$$

(\*) Nótese que la (8) comprende, como caso particular, a la (4), obtenida cuando la ecuación característica tiene todas sus raíces distintas (es decir, en el caso  $r = n$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 1$ ). Por eso es que la (8) es la fórmula que da, para todos los casos, la integral general de la (2)



Evidentemente, si vale esta identidad con una determinada elección de los polinomios  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_r(x)$ , valdrán infinitas otras con polinomios distintos de los precedentes. (\*)

Consideremos todas las identidades posibles del tipo (9) y busquemos, entre ellas, aquellas en que intervienen el número mínimo de polinomios no idénticamente nulos. Indiquemos con  $s$  tal número mínimo (observando que es seguramente  $s \geq 2$ ) y, entre todas las identidades del tipo (9) que contienen precisamente  $s$  polinomios no idénticamente nulos, elijamos una. Para fijar las ideas, supongamos que la elegida sea

$$P_1(x) e^{\alpha_1 x} + P_2(x) e^{\alpha_2 x} + \dots + P_s(x) e^{\alpha_s x} \equiv 0.$$

De ésta se deduce esta otra (dividiendo por  $e^{\alpha_1 x}$ ):

$$P_1(x) + P_2(x) e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} + \dots + P_s(x) e^{(\alpha_s - \alpha_1)x} \equiv 0 \quad (10)$$

y, llamando  $p$  al grado de  $P_1(x)$ , subsistirá también la que se deduce derivando la (10)  $p+1$  veces. Puesto que la derivada de orden  $p+1$  de  $P_1(x)$  vale cero, se obtiene una identidad del tipo

$$Q_2(x) e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} + \dots + Q_s(x) e^{(\alpha_s - \alpha_1)x} \equiv 0$$

donde  $Q_2(x), \dots, Q_s(x)$  son polinomios no idénticamente nulos. (\*\*) Multiplicando ahora por  $e^{\alpha_1 x}$  se deduce que debería ser también

$$Q_2(x) e^{\alpha_2 x} + \dots + Q_s(x) e^{\alpha_s x} \equiv 0,$$

----

(\*) Se puede, por ejemplo, multiplicar ambos miembros de la (9) por un mismo polinomio  $Q(x) \neq 0$ ; o también derivar una o varias veces la (9), ya que la derivada de un producto del tipo  $P(x) e^{\alpha x}$ , vale  $[P'(x) + \alpha P(x)] e^{\alpha x}$ , que es siempre del tipo polinomio por una exponencial; etc. etc.

(\*\*) Téngase presente que los números  $\alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_s - \alpha_1$  son todos distintos de cero, y que una función del tipo  $P(x) e^{\alpha x}$ , con  $\alpha = 0$ , y  $P(x) \equiv 0$ , tiene las derivadas sucesivas  $[P'(x) + \alpha P(x)] e^{\alpha x}$ ,  $[P''(x) + 2P'(x) + \alpha^2 P(x)] e^{\alpha x}$ , .... Resulta claro, siendo  $\alpha \neq 0$ , que los polinomios entre  $[ ]$  son idénticamente nulos.



lo que es absurdo, ya que ésta es una identidad del tipo (9) en la que intervienen menos de  $s$  polinomios no idénticamente nulos. Queda así demostrado lo deseado.

Por ejemplo, según el teorema recién demostrado, la ecuación diferencial  $y^{IV} + 4y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 0$ , que tiene la ecuación característica  $\alpha^4 + 4\alpha^3 + 5\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$  con las raíces  $\alpha_1 = -2$  (doble),  $\alpha_2 = i$  (simple),  $\alpha_3 = -i$  (simple), tiene la integral general  $y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} + c_3 e^{ix} + c_4 e^{-ix}$ .

---

El teor. I resuelve entonces completamente el problema de integrar la ecuación diferencial lineal homogénea (2) con coeficientes constantes. Hay que observar, sin embargo, que aunque los coeficientes de la ecuación dada sean reales (como en el ejemplo previo) puede muy bien suceder que la integral general resulte una combinación lineal de integrales complejas; esto sucede cuando la ecuación característica (3) tiene raíces complejas. Pero, cuando la (2) tiene sus coeficientes reales, es posible modificar la forma de su integral general y hacerla aparecer como una combinación de integrales reales. En efecto; como por hipótesis, la ecuación característica tiene los coeficientes reales, en caso de admitir una raíz compleja  $\beta + i\gamma$  con multiplicidad  $\nu$ , admitirá también la raíz  $\beta - i\gamma$ , conjugada de la precedente, con la misma multiplicidad  $\nu$  (véase Cap. XVIII, n° 7, teor. VII). Si gue que en el grupo de las  $n$  integrales (7) figuran las siguientes  $2\nu$  integrales

$$x^k e^{(\beta+i\gamma)x}, \quad x^k e^{(\beta-i\gamma)x}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1) \quad (11)$$

de donde, en la integral general (8), aparecerán, junto a los restantes, los siguientes términos:



$$\sum_{k=0}^{\nu-1} (A_k x^k e^{(\beta+i\gamma)x} + B_k x^k e^{(\beta-i\gamma)x}) \quad (12)$$

con  $A_k, B_k$ , constantes arbitrarias. Ahora bien; si junto a las  $A_k, B_k$ , introducimos otras dos constantes  $C_k, D_k$  definidas así:  $C_k = A_k + B_k$ ,  $D_k = i(A_k - B_k)$ , es evidente que las que podrían darse arbitrariamente son  $C_k, D_k$ , resultando como consecuencia  $A_k = \frac{C_k - iD_k}{2}$ ,  $B_k = \frac{C_k + iD_k}{2}$ . En este caso la (12) se escribiría, teniendo en cuenta las fórmulas de Euler ( ver Cap. XI, n° 8) :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\nu-1} \left[ \frac{C_k - iD_k}{2} x^k e^{\beta x} (\cos \gamma x + i \sin \gamma x) + \frac{C_k + iD_k}{2} x^k e^{\beta x} (\cos \gamma x - i \sin \gamma x) \right] = \\ & = \sum_{k=0}^{\nu-1} (C_k x^k e^{\beta x} \cos \gamma x + D_k x^k e^{\beta x} \sin \gamma x) \end{aligned}$$

de modo que en la expresión de la integral general (8), en lugar de una combinación lineal de las integrales complejas (11), interviene una combinación análoga de las integrales reales

$$x^k e^{\beta x} \cos \gamma x, \quad x^k e^{\beta x} \sin \gamma x, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \nu-1).$$

Concluimos, entonces:

II - Si la ecuación diferencial lineal y homogénea (2) tiene sus coeficientes constantes y reales, su integral general puede expresarse como combinación lineal, con coeficientes constantes arbitrarios, de integrales reales del tipo

1°)  $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x}$  en correspondencia a cada raíz real  $\alpha$  de multiplicidad  $\mu$  de la ecuación característica (3);

2°)  $e^{\beta x} \cos \gamma x, x e^{\beta x} \cos \gamma x, \dots, x^{\nu-1} e^{\beta x} \cos \gamma x$ ;  $e^{\beta x} \sin \gamma x, x e^{\beta x} \sin \gamma x, \dots, x^{\nu-1} e^{\beta x} \sin \gamma x$ , en correspondencia a cada par de raíces complejas conjugadas  $\beta \pm i\gamma$  de multiplicidad  $\nu$  de la



misma ecuación (3) .

Por ejemplo, la ecuación  $y^V + 2y''' + y' = 0$  tiene la ecuación característica  $\alpha^5 + 2\alpha^3 + \alpha = 0$  , con las raíces  $\alpha_1 = 0$  (simple) ,  $\alpha_2 = i$  (doble) ,  $\alpha_3 = -i$  (doble) . A  $\alpha_1$  le corresponde la integral 1 , al par  $\alpha_2 , \alpha_3$  las cuatro integrales  $\cos x$  ,  $x \cos x$  ,  $\sin x$  ,  $x \sin x$  . La integral general es, por lo tanto,  $y = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x$  .

#### 14 - ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES; ESTUDIO DE LAS ECUACIONES NO HOMOGENEAS.

Retomemos el examen de la ecuación no homogénea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

Puesto que, según los teor. I , II del n<sup>o</sup> precedente, estamos en condiciones de determinar  $n$  integrales linealmente independientes  $y_1(x)$  ,  $y_2(x)$  , ...,  $y_n(x)$  de la correspondiente ecuación homogénea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad , \quad (2)$$

podemos llegar a determinar fácilmente la integral general de la (1) , aplicando uno de los dos métodos del n<sup>o</sup> 12 . Aquí resulta muy simple la aplicación del segundo (el de Cauchy) , porque en el cálculo del núcleo resolvente  $K(x, \xi)$  se puede introducir una importante simplificación. Recordemos que  $K(x, \xi)$  coincide con la integral  $Y(x)$  de la ecuación homogénea (2) que verifica las condiciones iniciales

$$Y(\xi) = 0 \quad , \quad Y'(\xi) = 0 \quad , \quad Y''(\xi) = 0 \quad , \dots , \quad Y^{(n-2)}(\xi) = 0 \quad , \quad Y^{(n-1)}(\xi) = 1 \quad .$$

Si en la (2) cambiamos la variable  $x$  por una nueva variable  $t$  , poniendo  $x = t + \xi$  , dado que resulta  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$  ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$  , ..... y que los coeficientes de la (2) son constantes, la (1) se transforma en la

$$\frac{d^ny}{dt^n} + a_1 \frac{d^ny}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^ny}{dt^{n-2}} + \dots + a_n y = 0 \quad ; \quad (4)$$

teniendo en cuenta que a  $x = \xi$  le corresponde el valor  $t = 0$  , la citada inte-



gral  $Y(x)$  de la (2) que verifica la (3) se transforma en la integral  $Z(t)$  de la (4) que verifica las

$$Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 0, \quad Z''(0) = 0, \dots, \quad Z^{(n-2)}(0) = 0, \quad Z^{(n-1)}(0) = 1.$$

Pero la (4), salvo el nombre de la variable, coincide con la (1) y entonces, según la (13) del n° 12, se tendrá:

$$Z(t) = \frac{1}{W(0)} \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_n(0) \\ y'_1(0) & y'_2(0) & \dots & y'_n(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(0) & y_2^{(n-2)}(0) & \dots & y_n^{(n-2)}(0) \\ y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix}.$$

Volvamos ahora a la variable  $x$ ; puesto que  $t = x - \xi$ , y la  $Z(t)$  se transforma en  $Y(x)$ , se tendrá  $Y(x) = Z(x - \xi)$ , por lo que se concluye que el núcleo resolvente  $K(x, \xi) = Y(x)$  está dado por la fórmula

$$K(x, \xi) = \frac{1}{W(0)} \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_n(0) \\ y'_1(0) & y'_2(0) & \dots & y'_n(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(0) & y_2^{(n-2)}(0) & \dots & y_n^{(n-2)}(0) \\ y_1(x-\xi) & y_2(x-\xi) & \dots & y_n(x-\xi) \end{vmatrix}.$$

Se tiene, entonces, la siguiente regla:

I - Para la ecuación lineal (1) con coeficientes constantes, el núcleo resolvente se obtiene dividiendo por el wronskiano de las  $n$  integrales  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , de la ecuación homogénea correspondiente (2) calculado en el punto cero, el determinante obtenido sustituyendo la última fila de dicho wronskiano por las funciones  $y_1(x-\xi), y_2(x-\xi), \dots, y_n(x-\xi)$ .

Demos dos ejemplos. Sea la ecuación



$$y'' + y = f(x) \quad (5)$$

La ecuación homogénea correspondiente tiene la ecuación característica  $\alpha^2 + 1 = 0$ , con raíces  $i$ ,  $-i$  y entonces las integrales  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$  son linealmente independientes. El núcleo resolvente está dado por

$$K(x, \xi) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(x-\xi) & y_2(x-\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos(x-\xi) & \sin(x-\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \sin(x-\xi)$$

y la integral general de la (5) es

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \int_0^x \sin(x-\xi) f(\xi) d\xi.$$

Sea la ecuación

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = f(x). \quad (6)$$

La ecuación homogénea correspondiente tiene la ecuación característica  $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\alpha - 2 = 0$  con las raíces  $1$ ,  $1+i$ ,  $1-i$ , admitiendo entonces las integrales  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^x \cos x$ ,  $y_3 = e^x \sin x$ . El núcleo resolvente está dado por

$$\begin{aligned} K(x, \xi) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0) \\ y_1(x-\xi) & y_2(x-\xi) & y_3(x-\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0) \\ y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0) \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ e^{x-\xi} & e^{x-\xi} \cos(x-\xi) & e^{x-\xi} \sin(x-\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \\ &= e^{x-\xi} [1 - \cos(x-\xi)], \end{aligned}$$

siendo la integral general de la (6), la siguiente:

$$y = (C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x) e^x + \int_0^x e^{x-\xi} [1 - \cos(x-\xi)] f(\xi) d\xi.$$



La regla recién dada vale en general. No debe olvidarse, sin embargo, que el cálculo del núcleo resolvente tiene el único objeto de proporcionar, mediante la fórmula  $\int_{x_0}^x K(x, \xi) f(\xi) d\xi$ , una integral particular de la ecuación no homogénea dada. Puede entonces, que en algunos casos en que se logre con algún simple artificio obtener con facilidad una integral particular, resulte inútil el cálculo del núcleo resolvente.

Supongamos, por ejemplo, que el segundo miembro  $f(x)$  de la (1) sea un polinomio  $A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_{p-1} x + A_p$ , de cierto grado  $p \geq 0$ . En este caso es fácil encontrar una integral particular, bajo forma de polinomio de un grado oportuno  $q \geq p$ . En efecto; si en el primer miembro  $a_n y + a_{n-1} y' + a_{n-2} y'' + \dots + y^{(n)}$  de la (1) se pone, en lugar de la  $y$ , un polinomio  $\lambda_0 x^q + \lambda_1 x^{q-1} + \lambda_2 x^{q-2} + \dots + \lambda_q$ , con coeficientes indeterminados, dicho primer miembro toma la forma

$$a_n (\lambda_0 x^q + \lambda_1 x^{q-1} + \lambda_2 x^{q-2} + \dots) + a_{n-1} [q \lambda_0 x^{q-1} + (q-1) \lambda_1 x^{q-2} + \dots] + \dots$$

Es necesario, entonces, elegir el grado  $q$  y los coeficientes  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  de modo que esta expresión sea idéntica a  $A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} + \dots$ . Si  $a_n \neq 0$ , esto se logra sin duda eligiendo  $q = p$  y calculando sucesivamente  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  de las ecuaciones  $a_n \lambda_0 = A_0$ ,  $a_n \lambda_1 + a_{n-1} p \lambda_0 = A_1$ ,  $a_n \lambda_2 + a_{n-1} (p-1) \lambda_1 + a_{n-2} p(p-1) \lambda_0 = A_2$ , etc.

Si  $a_n = 0$ ,  $a_{n-1} \neq 0$ , se elegirá  $q = p+1$ , calculando luego  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  de las  $a_{n-1} (p+1) \lambda_0 = A_0$ ,  $a_{n-1} p \lambda_1 + a_{n-2} (p+1) p \lambda_0 = A_1$ , etc.

Si  $a_n = a_{n-1} = 0$  se deberá elegir  $q = p+2$ , deduciendo los valores de  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  de las  $a_{n-2} (p+2)(p+1) \lambda_0 = A_0$ , etc.

Y así sucesivamente.

Supongamos ahora, generalizando un poco más, que el segundo miembro  $f(x)$  sea el producto de un polinomio por una función exponen



cial, es decir, sea del tipo  $(A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p) e^{\beta x}$ , con  $p \geq 0$ ,  $\beta \neq 0$ . En ese caso es fácil encontrar una integral particular bajo la forma de producto de un polinomio de grado oportuno  $q \geq p$  y de la exponencial  $e^{\beta x}$ . En efecto; si en el primer miembro de la (1), en lugar de  $y$ , se pone  $(\lambda_0 x^q + \lambda_1 x^{q-1} + \dots + \lambda_q) e^{\beta x}$ , se obtiene, teniendo en cuenta todo lo dicho en el n° precedente con relación al cálculo de las expresiones  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ , y designando, como ahora, con  $F(\alpha)$  al primer miembro de la ecuación característica de la (2):

$$\begin{aligned} & \lambda_0 [x^q F(\beta) + \binom{q}{1} x^{q-1} F'(\beta) + \binom{q}{2} x^{q-2} F''(\beta) + \dots] e^{\beta x} + \\ & + \lambda_1 [x^{q-1} F(\beta) + \binom{q-1}{1} x^{q-2} F'(\beta) + \dots] e^{\beta x} + \\ & + \lambda_2 [x^{q-2} F(\beta) + \dots] e^{\beta x} + \dots \end{aligned}$$

Es necesario establecer, entonces, si es posible elegir el grado  $q$  y los coeficientes  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  de modo que esta última expresión sea idéntica a  $(A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p) e^{\beta x}$ .

Si  $F(\beta) \neq 0$ , es decir, si  $\beta$  no es raíz de la ecuación característica, es posible asumiendo  $q = p$  y determinando  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  de las  $\lambda_0 F(\beta) = A_0$ ,  $\lambda_1 F(\beta) + \lambda_0 \binom{p}{1} F'(\beta) = A_1$ ,  $\lambda_2 F(\beta) + \lambda_1 \binom{p-1}{1} F'(\beta) + \lambda_0 \binom{p}{2} F''(\beta) = A_2, \dots$

Si  $F(\beta) = 0$ ,  $F'(\beta) \neq 0$ , es decir, si  $\beta$  es raíz simple de la ecuación característica, se deberá entonces asumir  $q = p + 1$  y obtener  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  de las  $\lambda_0 \binom{p+1}{1} F'(\beta) = A_0$ ,  $\lambda_1 \binom{p}{1} F'(\beta) + \lambda_0 \binom{p+1}{2} F''(\beta) = A_1, \dots$

Si  $F(\beta) = F'(\beta) = 0$ ,  $F''(\beta) \neq 0$ , es decir, si  $\beta$  es raíz doble de la ecuación característica, deberá adoptarse  $q = p + 2$  y obtener  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  de las  $\lambda_0 \binom{p+2}{2} F''(\beta) = A_0, \dots$

Y así sucesivamente.

Otra observación útil es la siguiente. Indicando brevemente con  $G[y]$  al primer



miembro de la (1), supongamos conocer integrales particulares de cada una de las ecuaciones  $G[y] = f_1(x)$ ,  $G[y] = f_2(x)$ , ...,  $G[y] = f_m(x)$ , como podrían ser, respectivamente,  $\eta_1(x)$ ,  $\eta_2(x)$ , ...,  $\eta_m(x)$ .

Se ve inmediatamente que  $\eta_1(x) + \eta_2(x) + \dots + \eta_m(x)$  es una integral particular de la  $G[y] = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$ .

Como aplicación consideremos el caso en que la (1) tiene el segundo miembro formado por el producto de un polinomio de grado  $p \geq 0$  por una expresión del tipo  $e^{\beta x}(a \cos \gamma x + b \sin \gamma x)$ . Expresando las funciones circulares a través de exponenciales imaginarias, dicho segundo miembro se transforma en la suma de dos expresiones del tipo  $P(x)e^{(\beta + i\gamma)x}$ ,  $Q(x)e^{(\beta - i\gamma)x}$ , donde  $P(x)$ ,  $Q(x)$  representan polinomios.

Se busca, entonces, determinar dos integrales particulares del tipo precedente. Tras esto es fácil concluir que existe una integral particular que es el producto de un polinomio de grado oportuno  $q \geq p$  por una función del tipo  $e^{\beta x}(\mu \cos \gamma x + \nu \sin \gamma x)$  con  $\mu$ ,  $\nu$  coeficientes que, como los del polinomio, deben determinarse oportunamente.

## 15 - ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE EULER.

Son así denominadas las del tipo

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \frac{a_2}{x^2} y^{(n-2)} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} y' + \frac{a_n}{x^n} y = f(x) \quad (1)$$

de la que es fácil encontrar un sistema fundamental de integrales pues, cambiando la variable  $x$  en la  $t = \log x$ , la (1) se transforma en una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes. En efecto; refiriéndonos, para fijar las ideas a una ecuación de 3<sup>er</sup> orden,

$$y''' + \frac{a_1}{x} y'' + \frac{a_2}{x^2} y' + \frac{a_3}{x^3} y = 0 \quad (3)$$

se tiene



$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} ,$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \left( -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right) ,$$

$$y''' = -\frac{2}{x^3} \left( -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right) + \frac{1}{x^2} \left( -\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^3} \left( 2 \frac{dy}{dt} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3} \right) ,$$

de modo que la (3) se transforma en la

$$\frac{d^3y}{dt^3} + (a_1 - 3) \frac{d^2y}{dt^2} + (a_2 - a_1 + 2) \frac{dy}{dt} + a_3 y = 0 , \quad (4)$$

que tiene sus coeficientes constantes, con ecuación característica igual a

$$\alpha^3 + (a_1 - 3) \alpha^2 + (a_2 - a_1 + 2) \alpha + a_3 = 0 . \quad (5)$$

A cada raíz simple  $\alpha$  de ésta, corresponde la integral  $e^{\alpha t}$  de la (4) y, por ende, la integral  $e^{\alpha \log x} = x^{\alpha}$  de la (3); a una raíz doble  $\alpha$  corresponden las dos integrales  $e^{\alpha t}$ ,  $t e^{\alpha t}$  de la (4), es decir, las dos integrales  $x^{\alpha}$ ,  $x^{\alpha} \log x$  de la (3); etc.

Téngase presente, que con referencia a una necesidad práctica, se puede llegar a la (5) sin realizar el cambio de variable indicado, ya que se llega a la misma buscando integrales del tipo  $x^{\alpha}$  de la (3). En efecto; si en ésta se pone  $y = x^{\alpha}$ , se obtiene

$$\alpha (\alpha - 1)(\alpha - 2) x^{\alpha-3} + \frac{a_1}{x} \alpha (\alpha - 1) x^{\alpha-2} + \frac{a_2}{x^2} \alpha x^{\alpha-1} + \frac{a_3}{x^3} x^{\alpha} = 0$$

y entonces, suprimiendo el factor  $x^{\alpha-3}$ :

$$\alpha (\alpha - 1)(\alpha - 2) + a_1 \alpha (\alpha - 1) + a_2 \alpha + a_3 = 0$$

que coincide con la (5) como es fácil verificar.

El razonamiento vale para cualquier valor de  $n$ , por lo que se concluye

II - Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de Euler

(2), y considerada la ecuación característica  $\alpha (\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots$

$(\alpha - n + 1) + a_1 \alpha (\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 2) + \dots + a_{n-2} \alpha (\alpha - 1) + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$ ,

con las raíces  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  de multiplicidad  $\mu_1, \mu_2, \dots$

$\mu_r$ , dicha ecuación (2) admitirá las siguientes  $n$  integra



les linealmente independientes:

$$x^{\alpha_k}, x^{\alpha_k} \log x, x^{\alpha_k} (\log x)^2, \dots, x^{\alpha_k} (\log x)^{\mu_k-1}, (k=1, 2, \dots, r).$$

Resulta así conocida la integral general de la (2). Tras esto, para integrar la ecuación no homogénea (1), valen las reglas generales dadas en el n° 12. Estas reglas podrían simplificarse de modo análogo al que hemos visto en el n° 14; pero por brevedad, no nos detendremos en tal problema.

## 16 - NOCIONES SOBRE LA INTEGRACION POR SERIE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

Junto al método de Cauchy-Lipschitz expuesto en el n° 5 para el cálculo de las soluciones de un determinado problema de valores iniciales, debe tenerse presente otro método con el cual, bajo oportunas hipótesis, se llega a expresar por medio de una serie la integral de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales (de forma normal) que verifica condiciones iniciales prefijadas.

Por simplicidad nos referiremos a una ecuación de 1<sup>er</sup> orden de forma normal; el lector se convencerá que el procedimiento puede inmediatamente extenderse a los otros casos.

Sea dada la ecuación

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

para ser integrada con la condición inicial

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Supongamos que en un cierto campo  $A$  del plano  $xy$  la  $f$  sea continua y admita derivadas parciales de cualquier orden, también continuas. Es entonces evidente que toda integral  $y(x)$  admitirá también derivadas de cualquier orden, cuyas expresiones se obtienen de la (1) por sucesivas derivaciones (mediante la aplicación de la regla de derivación de funciones compuestas); se encuentra, precisamente:



$$y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y) y' ,$$

$$y''' = f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y) y' + f_{yy}(x, y) y'^2 + f_y(x, y) y'' ,$$

.....

Para la integral que verifica la (2) debe entonces ser :

$$y'(x_0) = p_1 \quad \text{con} \quad p_1 = f(x_0, y_0)$$

$$y''(x_0) = p_2 \quad \text{con} \quad p_2 = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) p_1 ,$$

$$y'''(x_0) = p_3 \quad \text{con} \quad p_3 = f_{xx}(x_0, y_0) + 2f_{xy}(x_0, y_0) p_1 + f_{yy}(x_0, y_0) p_1^2 + f_y(x_0, y_0) p_2 ,$$

.....

Es así posible calcular los valores  $p_1, p_2, p_3, \dots$  que las sucesivas derivadas de la integral buscada asumen en el punto  $x_0$ . Realizado tal cálculo, surge naturalmente la posibilidad de expresar tal integral  $y(x)$  por medio de la serie de Taylor de punto inicial  $x_0$ , escribiéndose :

$$y(x) = y_0 + \frac{p_1}{1!} (x - x_0) + \frac{p_2}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{p_3}{3!} (x - x_0)^3 + \dots \quad (3)$$

Es necesario, sin embargo, estudiar la convergencia o no de la serie escrita. A propósito de esto, existe una teoría general (debida a Cauchy) que aquí no podemos exponer; nos limitaremos a decir que, si la  $f(x, y)$  tiene también sentido para valores complejos de las variables  $x, y$ , y resulta función holomorfa de cada una de ellas, se puede demostrar que la (3) representa efectivamente la integral buscada, en un oportuno entorno del punto  $x_0$ . De todos modos, aún sin tener en cuenta este resultado general, se podrá caso por caso estudiar la serie obtenida y verificar si, en el campo de convergencia, representa una función que satisface la (1).

Es de observar que, fijando  $x_0$  y dejando indeterminado  $y_0$ , se puede



por este camino llegar a la integral general de la (1) [cfr. n° 7]. También debe tenerse presente que, en la práctica, puede ser suficiente calcular en el punto  $x_0$  cierto número  $n$  de derivadas e interrumpir la serie (3) en el término de grado  $n$ , si el polinomio así obtenido proporciona ya una buena aproximación de la integral buscada.



## CAPITULO XXX

### Nociones sobre las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

#### 1 - GENERALIDADES.

Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales de orden  $n$  a una ecuación en la que figure como incógnita una función  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_r)$  de dos o más variables y que establezca un vínculo entre las variables  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , la función  $u$  y las derivadas parciales primeras  $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ , segundas  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}$ , ..., enésimas  $\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_r^{k_r}}$  (con  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ ), de dicha función  $u$ . Cualquiera de las derivadas recién mencionadas puede no intervenir efectivamente en la ecuación dada; pero debe necesariamente figurar explícitamente al menos una de las  $\binom{r+n-1}{n}$  derivadas parciales de orden  $n$  si se quiere que la ecuación sea precisamente de orden  $n$  y no de un orden más bajo.

Por simplicidad nos limitaremos a suponer  $r = 2$ , indicando con  $x, y$  las variables independientes; por lo tanto, una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden será del tipo

$$f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 ;$$

una ecuación de segundo orden tendrá la forma

$$f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0 ;$$

y así sucesivamente.

Las variables  $x, y$ , como la función incógnita  $u$ , serán supuestas reales.

Se hablará, como en el Cap. precedente, de soluciones o integrales de la ecuación;



pero la locución "curva integral" deberá obviamente ser sustituida por la de "superficie integral".

---

Deseamos primeramente poner en claro una diferencia esencial respecto de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Mientras para éstas la totalidad de las integrales dependía de constantes arbitrarias, para las ecuaciones en derivadas parciales tal totalidad viene a depender de funciones arbitrarias. No podemos aquí profundizar esta circunstancia y nos limitaremos a constatarla sobre algunos ejemplos.

Ejemplo 1<sup>o</sup>) Consideremos la ecuación de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y) \quad (1)$$

donde  $f(x, y)$  es una función dada, continua en un intervalo  $R$  ( $a \leq x \leq a'$ ,  $b \leq y \leq b'$ ) del plano  $xy$ . Evidentemente, de la (1), con una integración indefinida respecto de  $x$ , se obtiene, para todo punto  $(x, y)$  de  $R$ :

$$u(x, y) = \int_a^x f(s, y) ds + c,$$

donde  $c$  denota una cantidad constante, es decir, independiente de  $x$ , pero que puede depender de la otra variable  $y$ . Se puede entonces, poner  $c = \varphi(y)$ ,

donde  $\varphi(y)$  denota una función del todo arbitraria, de la variable  $y$ , definida en el intervalo  $[b, b']$ . Entonces, cada integral de la (1) es necesariamente del tipo

$$u(x, y) = \int_a^x f(s, y) ds + \varphi(y), \quad (1')$$

y viceversa, se verifica inmediatamente que, cualquiera sea la  $\varphi(y)$ , esta función es solución de (1). La (1') proporciona, entonces, todas las integrales de la (1) que resultan así dependientes de la función arbitraria  $\varphi(y)$  [que se elegirá continua si nos limitamos a determinar las integrales de la (1) continuas en  $R$ ].

Ejemplo 2<sup>o</sup>) Consideremos la ecuación de 2<sup>o</sup> orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y) \quad (2)$$



valiendo para  $f(x, y)$  las mismas hipótesis del ejemplo anterior, y propongámonos la búsqueda de todas las integrales  $u(x, y)$ , continuas junto con sus derivadas parciales primeras en  $R$ . De la (2) sigue, razonando primeramente como en (1'),  $\frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^x f(s, y) ds + \varphi(y)$ , donde  $\varphi(y)$  es una función arbitraria de la única variable  $y$ , continua en  $[b, b']$ . Se obtiene sucesivamente  $u(x, y) = \int_b^y dt \int_a^x f(s, t) ds + \int_b^y \varphi(t) dt + \alpha(x)$ , donde  $\alpha(x)$  es una arbitraria función solamente de la variable  $x$ , con la única exigencia que sea derivable, con derivada continua en  $[a, a']$ . Si se pone  $\int_b^y \varphi(t) dt = \beta(y)$ , obviamente  $\beta(y)$  es una función de la variable  $y$ , derivable con derivada continua en  $[b, b']$ . Entonces, cada integral  $u(x, y)$  de la (1), que verifique las hipótesis antedichas, es necesariamente del tipo

$$u(x, y) = \int_b^y dt \int_a^x f(s, t) ds + \alpha(x) + \beta(y), \quad (2')$$

y, viceversa, es inmediato verificar que, cualesquiera sean las  $\alpha(x)$ ,  $\beta(y)$  (mientras sean derivables con derivadas continuas), la  $u(x, y)$  proporcionada por la (2') satisface la (2) y las condiciones cualitativas exigidas. La (2') proporciona entonces todas las integrales de la (2), las que dependen de dos funciones arbitrarias.

Ejemplo 3<sup>o</sup>) Consideremos la ecuación de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

con  $f(x, y)$  función dada, continua en  $R$  junto con su derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Para cada integral de la (3)  $u(x, y)$ , continua junto con sus derivadas parciales primeras en  $R$ , consideremos sus líneas de nivel  $u(x, y) = c$ . A lo largo de una tal línea, la variable  $y$  resulta definida implícitamente como función de  $x$ , y se tiene  $\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x(x, y)}{u_y(x, y)}$ , o sea [por la (3)]

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (4)$$

Hemos encontrado que las citadas líneas de nivel son curvas integrales de la e-



ecuación diferencial ordinaria (4) . Representando la integral general de ésta con una ecuación del tipo  $\varphi(x, y) = c_1$  (con  $c_1$  constante arbitraria), podemos decir que a lo largo de cada línea sobre la que  $\varphi(x, y)$  asume cierto valor  $c_1$ , nuestra integral  $u(x, y)$  asume un bien determinado  $c$ , dependiente de la línea considerada, o sea de  $c_1$ . Es decir, existe una función  $c = F(c_1)$  que permite pasar de los valores  $c_1$  de la  $\varphi(x, y)$  a los valores  $c$  de la  $u(x, y)$  y entonces se tiene necesariamente

$$u(x, y) = F[\varphi(x, y)] \quad (3')$$

Cada integral  $u(x, y)$  de la (3) es, entonces, del tipo (3') .

Viceversa, es fácil verificar que toda función (3') con  $F$  función arbitraria con tal que sea derivable, satisface la (3) . En efecto; de (3') sigue  $\frac{\partial u}{\partial x} = F'[\varphi(x, y)] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = F'[\varphi(x, y)] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , teniéndose entonces  $\frac{\partial u}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = F'[\varphi(x, y)] \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$ ; pero, siendo  $\varphi(x, y) = c_1$  una curva integral de la (4), resulta  $-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = f(x, y)$ , y entonces queda verificada la (3) .

Concluyendo: la totalidad de las integrales de la (3) está representada por la (3'), con  $F$  función (derivable) arbitraria.

La integración de la (3) depende de la de la ecuación diferencial ordinaria (4) . Por ejemplo, considerada la ecuación  $2x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , la (4) se escribe  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ , que tiene la integral general  $\frac{y^2}{x} = c$ ; por lo tanto,  $u(x, y) = F\left(\frac{y^2}{x}\right)$ .

Ejemplo 4º) Dada la ecuación de primer orden

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha u \quad (5)$$

con  $\alpha$  constante, el razonamiento hecho en el Cap. XVI, n° 8 prueba que todas las funciones  $u(x, y)$  que verifican la (5) son las funciones homogéneas de grado  $\alpha$ , o sea del tipo  $u(x, y) = x^\alpha \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , con  $\varphi$  función arbitraria (derivable).



El problema de determinar todas las integrales de una ecuación en derivadas parciales presenta, en general, dificultades insuperables; pero no es éste el problema que habitualmente se encuentra en las aplicaciones. Como ya se observó en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, el problema más interesante es el de buscar una integral particular que satisfaga ciertas condiciones determinadas. Estas pueden ser de naturaleza muy distinta, naciendo así innumerables problemas cuyo estudio constituye uno de los capítulos más amplios y más difíciles del Análisis Matemático. En los números sucesivos trataremos de dar una idea de algunos de estos problemas para algunas ecuaciones típicas, de gran importancia en la Física Matemática.

## 2 - EL PROBLEMA DE CAUCHY.

Este problema es el análogo del que, con el mismo nombre, ya hemos estudiado en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Nos limitaremos a enunciarlo para ecuaciones de 1<sup>er</sup> y 2<sup>o</sup> orden.

Sea la ecuación de 1<sup>er</sup> orden

$$f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \quad ; \quad (1)$$

para ésta el problema de Cauchy consiste en buscar una integral  $u(x, y)$  que en los puntos de una curva regular asignada  $\gamma$  del plano  $xy$  asuma valores prefijados.

Representando  $\gamma$  con ecuaciones paramétricas del tipo  $x = \alpha(t)$ ,  $y = \beta(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , los valores prefijados de  $u(x, y)$  sobre  $\gamma$  serán dados en función de  $t$ , de modo que podemos decir que se busca una integral  $u(x, y)$  de la (1) que verifique la condición inicial

$$u[\alpha(t), \beta(t)] = \varphi(t) \quad , \quad \text{para } a \leq t \leq b \quad , \quad (2)$$

donde  $\varphi(t)$  es una función dada arbitrariamente en  $[a, b]$ . Como se observa



se trata de la extensión más natural del problema de determinar una ecuación diferencial ordinaria de 1<sup>er</sup> orden  $f(x, y, y') = 0$  que verifique la condición inicial  $y(x_0) = y_0$ .

Geométricamente el problema (1), (2) equivale a buscar una superficie integral  $u = u(x, y)$  de la (1) que pase por la curva  $x = \alpha(t)$ ,  $y = \beta(t)$ ,  $u = \varphi(t)$  del espacio  $xyu$ .

Sobre este problema existe una teoría completa (debida a Cauchy y Lagrange) que lo traslada al de la resolución de un determinado sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

No expondremos tal teoría; nos limitaremos a hacer notar, sobre un ejemplo, que existen curvas particulares  $\gamma$  para las que el problema de Cauchy o es imposible o es indeterminado.

Examinemos nuevamente el ejemplo 3<sup>o</sup> del n<sup>o</sup> precedente y supongamos que la curva  $\gamma$  coincida con una de las líneas  $\varphi(x, y) = c_1$  allí mencionadas. Como sobre tales curvas  $\gamma$  toda integral  $u(x, y)$  de la (3) es constante, es evidente que si los valores asignados sobre  $\gamma$  no son constantes, el problema de Cauchy no podrá tener solución. Si en cambio se requiere que sobre  $\gamma$  resulte  $u(x, y) = c$ , se tienen infinitas soluciones: todas las proporcionadas por la (3') del n<sup>o</sup> precedente con la función  $F$  elegida de modo que resulte  $c = F(c_1)$ .

Estas líneas excepcionales existen siempre, para toda ecuación del tipo (1), y toman el nombre de líneas características. Precisamente sobre su consideración es que se apoya la teoría general a que hicimos referencia<sup>(\*)</sup>.

(\*) En realidad el nombre de línea característica se da a las curvas  $x = \alpha(t)$ ,  $y = \beta(t)$ ,  $u = \varphi(t)$  del espacio  $xyu$  a lo largo de las cuales el problema de Cauchy queda indeterminado; aquí se los hemos dado, en cambio, a la proyección  $\gamma$  de la misma sobre el plano  $xy$ . Esto es lícito hacerlos en aquellos casos particulares en que el conocimiento de las  $\gamma$  es suficiente para individualizar las características en el espacio. Esto sucede en el ejemplo considerado en que las  $\gamma$  tienen ecuaciones  $\varphi(x, y) = c_1$ , mientras las características tienen ecuaciones  $\varphi(x, y) = c_1$ ,  $u = c$ .



Consideremos ahora el caso de una ecuación de  $2^o$  orden

$$f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0 \quad (3)$$

Siempre por analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias, puede parecer a primera vista que el problema de Cauchy para la (3) consista en prescribir, sobre una determinada curva  $\gamma$  [ $x = \alpha(t)$ ,  $y = \beta(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ ] del plano  $xy$ , los valores de la  $u$  y de sus derivadas parciales  $u_x$ ,  $u_y$ , vale decir, consista en buscar una integral  $u(x, y)$  de la (3) que verifique las condiciones

$$u[\alpha(t), \beta(t)] = \varphi(t), \quad u_x[\alpha(t), \beta(t)] = \varphi_1(t), \quad u_y[\alpha(t), \beta(t)] = \varphi_2(t), \quad (4)$$

con  $\varphi(t)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  funciones asignadas arbitrariamente. Pero en seguida se ve que de esta forma el problema está "mal puesto" puesto que estas tres funciones no pueden ser dadas arbitrariamente. En efecto; bajo las hipótesis de continuidad para  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_y$  en un campo  $A$  que contenga  $\gamma$ , se tendrá:

$$\frac{d}{dt} u[\alpha(t), \beta(t)] = u_x[\alpha(t), \beta(t)] \alpha'(t) + u_y[\alpha(t), \beta(t)] \beta'(t),$$

y entonces debe ser necesariamente

$$\varphi'(t) = \varphi_1(t) \alpha'(t) + \varphi_2(t) \beta'(t). \quad (5)$$

Por lo tanto sólo es posible dar arbitrariamente la  $\varphi(t)$  y una de las dos funciones  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ; o también la  $\varphi_1(t)$ , la  $\varphi_2(t)$  y el valor de  $\varphi(t)$  en un punto  $t_0$ . Pero el modo más común de plantear el problema de Cauchy es el de dar, en cada punto de  $\gamma$ , el valor de  $u$  y el de su derivada según la dirección  $n$  normal a  $\gamma$ , es decir, de requerir que para  $x = \alpha(t)$ ,  $y = \beta(t)$ , resulte

$$u = \varphi(t), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi(t), \quad (6)$$

con  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  funciones asignadas. Con estos datos quedan determinadas las dos funciones  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  antes mencionadas. En efecto, teniendo en cuenta que



$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}},$$

debe ser

$$\psi(t) = \varphi_1(t) \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} - \varphi_2(t) \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}}$$

de donde de esta relación y de la (5) se pueden precisamente obtener las dos funciones  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ .

Geométricamente, las (6) [que pueden sustituirse por las (4) tras haber calculado  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  del modo recién dicho] se pueden interpretar diciendo que se busca una superficie integral que pase por la curva  $x = \alpha(t)$ ,  $y = \beta(t)$ ,  $u = \varphi(t)$  del espacio  $xyu$  y que en cada punto de ésta tenga un plano tangente determinado: el de ecuación  $u - \varphi(t) = [x - \alpha(t)] \varphi_1(t) + [y - \beta(t)] \varphi_2(t)$ .

El problema de Cauchy (3), (6) ha dado origen a muchos estudios sobre los que no podemos entrar a profundizar. Observemos solamente que, también en este caso, pueden existir particulares líneas<sup>(\*)</sup>  $\gamma$  para las que el problema de Cauchy es imposible o indeterminado.

Nos podemos convencer considerando el ejemplo 2º del nº precedente. Si como curva  $\gamma$  tomamos el segmento  $a \leq x \leq a'$ ,  $y = b$ , se trata de determinar una integral de la

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y), \quad (7)$$

que verifique las siguientes condiciones [análogas a las (6)]:

$$u(x, b) = \varphi(x), \quad u_y(x, b) = \psi(x), \quad (\text{para } a \leq x \leq a').$$

La (7) tiene la integral general (2') del nº precedente donde figuran las dos funciones arbitrarias  $\alpha(x)$ ,  $\beta(y)$  y puesto que de tal fórmula sigue

$$u(x, b) = \alpha(x) + \beta(b), \quad u_y(x, b) = \int_a^x f(s, b) ds + \beta'(b),$$

las (8) requieren que tales funciones arbitrarias sean elegidas de modo que resul-

(\*) En realidad estas líneas existen en todos los casos (con oportunas hipótesis sobre la función  $f$  que figura en (3)); pero no siempre son reales.



te

$$\alpha(x) + \beta(b) = \varphi(x) \quad , \quad \int_a^x f(s, b) ds + \beta'(b) = \psi(x) \quad .$$

Sigue que, si la función conocida  $\int_a^x f(s, b) ds$  no difiere en una constante de la función asignada  $\psi(x)$ , el problema es imposible. Si en cambio, tal condición queda satisfecha, es obvio que de la función arbitraria  $\beta(y)$  queda individualizado solamente el valor de la derivada en el punto  $b$ , por lo que el problema tiene infinitas soluciones.

Las líneas excepcionales  $\gamma$  a las que nos acabamos de referir toman, como en el caso de las ecuaciones de 1<sup>er</sup> orden, el nombre de líneas características y la consideración de las mismas es de gran importancia en los estudios sobre el problema de Cauchy<sup>(\*)</sup>.

---

En el problema de Cauchy (1), (2)  $\int_0$  (3), (6)  $\int$  la curva  $\gamma$  sobre la que se establecen los valores iniciales debe naturalmente suponerse contenida en un campo o dominio  $A$ , del plano  $xy$ , en el que tenga sentido considerar la ecuación (1)  $\int_0$  (3)  $\int$ .

Sucede, sin embargo, análogamente a lo que se ha puesto de manifiesto en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias (véase Cap. XXIX, n<sup>o</sup> 5, observación 2<sup>a</sup>) que la solución del problema, supuesta existente, no resulta en general definida en todo  $A$ , sino solamente en un oportuno entorno de la curva  $\gamma$ . Suele decirse que el problema de Cauchy es un problema en pequeño queriendo precisamente significar con eso que, en general, no es posible fijar a priori el campo de existencia de la solución; debemos conformarnos con encontrarla en un entorno de la curva  $\gamma$ , entorno que resultará, caso por caso, determina

-----

(\*) También en este caso el concepto de característica requeriría mayores detalles; pero no insistiremos sobre el tema.



do por el propio problema.

### 3 - ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN.

Una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden, llamase lineal cuando su primer miembro es una función lineal de  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Se trata, entonces, de una ecuación del tipo

$$a_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y), \quad (1)$$

donde los coeficientes  $a_{11}(x, y), \dots, c(x, y)$  y el término  $f(x, y)$  son funciones (reales) conocidas de las dos variables  $x, y$ , que supondremos continuas en un dominio dado  $A$  del plano  $xy$ . Si  $f(x, y) \equiv 0$ , se dirá que la (1) es homogénea.

Consideremos para la (1) el problema de Cauchy, asignando sobre una curva regular  $\gamma$  contenida en  $A$ , de ecuación  $x = \alpha(t)$ ,  $y = \beta(t)$ , los valores de  $u$  y de la derivada normal  $\frac{\partial u}{\partial n}$ .

Sabemos (véase n<sup>o</sup> precedente) que podemos suponer conocidos sobre  $\gamma$  los valores de  $u = \varphi(t)$ ,  $u_x = \varphi_1(t)$ ,  $u_y = \varphi_2(t)$ ; veamos, entonces, si es posible deducir aquellos que, sobre  $\gamma$ , asumirán las derivadas segundas  $u_{xx}$ ,  $u_{xy}$ ,  $u_{yy}$ , de la integral buscada. Por la (1) debe ser

$$a_{11} u_{xx} + a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} = -b_1 \varphi_1(t) - b_2 \varphi_2(t) - c \varphi(t) + f, \quad (2)$$

donde queda sobreentendido que en las funciones  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c$ ,  $f$ ,  $u_{xx}$ ,  $u_{xy}$ ,  $u_{yy}$  se ha puesto  $x = \alpha(t)$ ,  $y = \beta(t)$ ; además, en virtud de las evidentes relaciones  $du_x = u_{xx} dx + u_{xy} dy$ ,  $du_y = u_{yx} dx + u_{yy} dy$ , deben valer las

$$u_{xx} \alpha'(t) + u_{xy} \beta'(t) = \varphi_1'(t), \quad u_{xy} \alpha'(t) + u_{yy} \beta'(t) = \varphi_2'(t), \quad (3)$$

Con las (2), (3) tenemos tres ecuaciones lineales en las tres incógnitas  $u_{xx}$ ,  $u_{xy}$ ,  $u_{yy}$ ; el determinante de los coeficientes de tal sistema es



$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = 0.$$

Si la línea  $\gamma$  es tal de anular este determinante, el cálculo de las  $u_{xx}$ ,  $u_{xy}$ ,  $u_{yy}$  sobre  $\gamma$  o es imposible o es indeterminado quedando, por lo tanto, como imposible o indeterminado el correspondiente problema de Cauchy. Entonces, teniendo en cuenta que  $\alpha' = \frac{dx}{dt}$ ,  $\beta' = \frac{dy}{dt}$ , serán líneas características para la ecuación (1) aquellas líneas  $\gamma$  sobre las que resulte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}(dx)^2 = 0,$$

vale decir, donde se tenga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}(x,y) \pm \sqrt{a_{12}^2(x,y) - a_{11}(x,y)a_{22}(x,y)}}{a_{11}(x,y)}. \quad (4)$$

Entonces, para la (1) serán líneas características las curvas integrales de la ecuación diferencial ordinaria (4).

Si en todos los puntos  $(x,y)$  del dominio  $A$  resulta  $\Delta \equiv a_{11}(x,y)a_{22}(x,y) - a_{12}^2(x,y) > 0$ , las características resultarán imaginarias y la ecuación (1) recibe el nombre de ecuación de tipo elíptico en  $A$ .

Si, en cambio, en todo  $A$  es  $\Delta < 0$ , es evidente que existen dos sistemas de  $\infty^1$  curvas características reales y la (1) se considera de tipo hiperbólico en  $A$ .

En el caso que en todo  $A$  se tenga  $\Delta \equiv 0$ , la (1) tiene un solo sistema de características reales y la (1) se designará como de tipo parabólico en  $A$ .

Puede por último suceder que el discriminante  $\Delta(x,y)$  no tenga signo constante en  $A$ , y se dirá que la (1) es de tipo mixto en  $A$  (\*).

(\*) Estas ecuaciones de tipo mixto han adquirido recientemente gran importancia en el estudio



Puede también decirse que la (1) es de tipo elíptico, hiperbólico, parabólico en A si en todos los puntos de A la forma cuadrática

$$a_{11}(x,y) \lambda^2 + 2a_{12}(x,y) \lambda \mu + a_{22}(x,y) \mu^2$$

es definida, indefinida, semidefinida, respectivamente.

La clasificación así obtenida de las ecuaciones del tipo (1) es de gran importancia puesto que los problemas que la Física Matemática presenta a través de la (1) son de muy distinta naturaleza según el tipo de la ecuación.

Para las ecuaciones de tipo elíptico el problema de Cauchy tiene escasa importancia mientras que pasan a ser fundamentales los denominados problemas de Dirichlet o el de Neumann.

Para las ecuaciones de tipo hiperbólico además del problema de Cauchy, es de gran importancia el denominado de propagación vibratoria.

Para las ecuaciones de tipo parabólico, el de Cauchy tiene poca importancia, mientras que sí la tiene el denominado de propagación no vibratoria.

De los nuevos problemas recién mencionados daremos algunos conceptos en los números sucesivos, al considerar tres clásicas ecuaciones que pueden considerarse típicas entre las elípticas, hiperbólicas y parabólicas.

Precisamente, para el tipo elíptico tomaremos como modelo la denominada ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad (5)$$

para la que inmediatamente se ve que resultan características las rectas isotropas  $x \pm iy = \text{constante}$  del plano  $xy$ . Para el tipo hiperbólico, haremos referencia a la denominada ecuación de la cuerda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad (6)$$

-----

de las corrientes fluidas transónicas; pero no podemos ocuparnos de eso aquí.



con  $c$  constante, cuyas características son las rectas  $y \pm cx = \text{constante}$ . Para el tipo parabólico consideraremos la ecuación del calor.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

cuyas características son las rectas  $y = \text{constante}$ .

#### 4 - ECUACION DE LAPLACE; PROBLEMAS DE DIRICHLET Y DE NEUMANN.

Ante todo observemos que la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

está estrechamente ligada a la teoría de las funciones holomorfas  $f(z) = f(x, y)$  de una variable compleja  $z = x + yi$ , ya que cada función holomorfa  $f(x, y)$  es una solución (compleja) de la (1). En efecto; de la condición de holomorfía  $f_x = \frac{1}{i} f_y$  se obtiene, derivando parcialmente con respecto a  $x$  o con respecto a  $y$  (\*):

$$f_{xx} = \frac{1}{i} f_{xy}, \quad f_{xy} = \frac{1}{i} f_{yy},$$

de donde, eliminando la derivada mixta, se obtiene precisamente  $f_{xx} + f_{yy} = 0$ .

Si se supone  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , con  $u$  y  $v$  reales, de la última ecuación sigue obviamente  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $v_{xx} + v_{yy} = 0$ , con lo que la parte real y el coeficiente de la imaginaria de una función holomorfa son soluciones (reales) de la ecuación de Laplace, es decir, como habitualmente se las denomina, son funciones armónicas.

Por ejemplo, de la función holomorfa  $e^z$  se extraen las dos funciones armónicas  $e^x \cos y$ ,  $e^x \sin y$ ; de la  $\log z$ , se obtienen las  $\log \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\arctg \frac{y}{x}$ ; etc.

---

(\*) Demostraremos en el Cap. sucesivo que toda función holomorfa  $f(x, y)$  admite derivadas parciales de cualquier orden.



Se dirá que  $u(x,y)$  es función armónica y regular en un dominio  $A$  del plano  $xy$  cuando la misma sea continua en  $A$  y admita, en  $A - \mathcal{F}A$ , derivadas primeras y segundas continuas logrando verificar, en  $A - \mathcal{F}A$ , la ecuación de Laplace.

El problema de Dirichlet para la ecuación (1) se enuncia del siguiente modo: asignado un dominio acotado  $A$  del plano  $xy$ , determinar en él una función armónica y regular que en los puntos de  $\mathcal{F}A$  asuma valores prefijados. Naturalmente estos valores deben ser dados de modo de definir sobre  $\mathcal{F}A$  una función continua.

Demostremos que se trata de un problema determinado, vale decir que

I - El mencionado problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace no puede tener más de una solución.

Dem. Supongamos que existan dos soluciones  $u_1(x,y)$ ,  $u_2(x,y)$ ; evidentemente su diferencia  $u(x,y)$  es todavía una función armónica y regular en  $A$ , nula en todos los puntos de  $\mathcal{F}A$ . Es obvio, entonces, que el teorema quedará demostrado cuando se haya hecho ver que una función  $u(x,y)$  armónica y regular en  $A$ , nula sobre  $\mathcal{F}A$ , es necesariamente nula en todo  $A$ .

Puesto que  $A$  está acotado se puede trazar con centro en el origen  $O$  un círculo de radio  $R$  suficientemente grande como para contener  $A$  en su interior; esto significa que la función  $w(x,y) = R^2 - x^2 - y^2$  es siempre positiva en  $A$ . Consideremos ahora la función  $v(x,y) = \frac{u(x,y)}{w(x,y)}$  que, en virtud del hecho  $w > 0$  resulta, como  $u(x,y)$ , continua en  $A$  y dotada, en  $A - \mathcal{F}A$  de derivadas primeras y segundas continuas. Se tiene, además,  $v = 0$  sobre  $\mathcal{F}A$  y nuestra tesis quedará demostrada si probamos que resulta  $v = 0$  en todo  $A$ .

Por el teorema de Weierstrass la  $v$  admitirá en  $A$  máximo y mínimo abso-



lutos. Si no fuese (siendo nula en  $A$ ) idénticamente nula en todo  $A$ , se verificaría al menos uno de estos dos casos: 1º) el máximo  $M$  es positivo, 2º) el mínimo  $m$  es negativo. Además el valor  $M$  del 1º caso, o el valor  $m$  del segundo caso serían asumidos por  $v$  en un punto  $(x_0, y_0)$  interior de  $A$ . Hagamos ver que eso es absurdo, refiriéndonos por ejemplo al caso  $v(x_0, y_0) = M > 0$ .

Por conocidos teoremas (ver Cap. XVI, nº 12) deberá ser

$$v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = 0, \quad v_{xx}(x_0, y_0) \leq 0, \quad v_{yy}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Pero de la  $u = wv$ , con  $w = R^2 - x^2 - y^2$ , sigue que en  $A - \mathcal{F}A$

$$u_x = 2xv + wv_x, \quad u_y = 2yv + wv_y$$

y, sucesivamente,

$$u_{xx} = -2v - 4xv_x + wv_{xx}, \quad u_{yy} = -2v - 4yv_y + wv_{yy},$$

de modo que, siendo por hipótesis  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  se obtiene

$$w(v_{xx} + v_{yy}) - 4(xv_x + yv_y) - 4v = 0.$$

En particular, ésta debería valer en el punto  $(x_0, y_0)$  donde resulta  $w(x_0, y_0) [v_{xx}(x_0, y_0) + v_{yy}(x_0, y_0)] = 4M$ . Pero esta igualdad no puede ser cierta puesto que el primer miembro es  $\leq 0$  y el segundo es positivo. El teorema I queda así demostrado.

Si se tiene en cuenta lo que ha sido dicho en el nº 2 sobre el problema de Cauchy para las ecuaciones de 2º orden, puede maravillar el hecho que el problema de Dirichlet resulte determinado, dado que en el mismo se prescribe sobre  $\mathcal{F}A$  (que en los casos comunes es una curva regular) solamente los valores de la función y no los de la derivada normal. Pero se debe tener en cuenta que en el problema de Dirichlet se fija a priori el dominio  $A$  en el que se busca la solución regular; en otras palabras, a diferencia del problema de Cauchy que es un problema "en pequeño", el de Dirichlet es un problema "en grande" y la condición de regularidad de la solución en todo  $A$  sustituye completamente (como lo prueba el teor. I) la con



dición de asegurar la derivada normal sobre  $\mathcal{F}A$ .

Notemos, además, que el teor. I asegura sólo la unicidad de la solución y no su existencia. A título informativo digamos que es posible dar un teorema de existencia bajo condiciones muy generales para el dominio  $A$ ; pero nosotros nos contentaremos con verificar tal teorema en el caso que  $A$  sea un círculo (ver n<sup>o</sup> sucesivo).

El problema de Dirichlet puede también plantearse para un dominio no acotado; pero cae en defecto el razonamiento hecho en el teor. I y, efectivamente, el problema ya no es determinado (es necesario también imponer a la solución oportunas condiciones de comportamiento al infinito).

Otro problema en grande que se presenta a menudo para las ecuaciones de tipo elíptico es el problema de Neumann. Para enunciarlo en el caso de la ecuación de Laplace, conviene primeramente introducir una definición. Una función  $u(x,y)$  será denominada armónica y birregular en un dominio  $A$  cuando tanto ella como sus derivadas parciales primeras sean continuas en  $A$  y existan en  $A - \mathcal{F}A$  sus derivadas parciales segundas continuas que verifiquen la (1).

Tras lo que el problema de Neumann se enuncia así: dado un dominio regular y acotado  $A$ , determinar en él una función armónica y birregular  $u(x,y)$  tal que en cada punto  $(x,y)$  de la frontera de  $A$ , su derivada según la dirección de la normal positiva  $n$  a  $\mathcal{F}A$ , asuma el valor de una función  $\varphi(x,y)$  prefijada.

Queda sobreentendido que los valores  $\varphi(x,y)$  deben ser tales de definir una función continua sobre cada una de las porciones de curva regular que constituyen  $\mathcal{F}A$ .

Se puede demostrar que los valores  $\varphi(x,y)$  de la derivada normal no se pueden



asignar en forma totalmente arbitraria; para que el problema pueda tener soluciones la  $\varphi(x, y)$  debe ser dada de modo que resulte  $\int_{\tilde{F}A} \varphi(x, y) ds = 0$  (donde  $s$  es el arco sobre  $\tilde{F}A$ ). Además, se puede hacer ver que, si el problema de Neumann tiene una solución  $u_0(x, y)$  tendrá infinitas, dadas por  $u_0(x, y) + c$ , con  $c$  constante arbitraria. No desarrollaremos aquí las demostraciones relativas, sugiriendo al lector consulte los "Complementos y Ejercicios".

## 5 - PROBLEMA DE DIRICHLET PARA LA ECUACION DE LAPLACE EN EL CASO DEL CIRCULO.

Consideremos en el plano  $xy$  el círculo  $C$  de centro  $O$  y radio  $R$  y pongámonos a construir en él una función armónica y regular, conociendo los valores que la misma debe asumir sobre la frontera del círculo. Introduciendo las coordenadas polares habituales  $\rho, \varphi$ , podemos suponer que se han dado los valores sobre la frontera en función de la anomalía  $\varphi$ ; se trata entonces de construir una función  $u(\rho, \varphi)$  armónica y regular en  $C$ , tal de tenerse  $u(R, \varphi) = f(\varphi)$  donde  $f(\varphi)$  es una función continua, prefijada en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , que verifica la condición  $f(0) = f(2\pi)$ .

Comencemos transformando la ecuación de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  a coordenadas polares teniendo en cuenta que  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ; se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} \rho \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \rho \cos \varphi$$

y sucesivamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rho^2 \sin^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rho^2 \cos^2 \varphi -$$

$$- \frac{\partial u}{\partial x} \rho \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} \rho \sin \varphi.$$

Entonces, como



$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi \right),$$

sigue inmediatamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho}.$$

La función  $u(\varrho, \varphi)$  que debemos determinar debe, entonces, verificar las siguientes ecuaciones:

$$u_{\varrho\varrho}(\varrho, \varphi) + \frac{1}{\varrho^2} u_{\varphi\varphi}(\varrho, \varphi) + \frac{1}{\varrho} u_{\varrho}(\varrho, \varphi) = 0$$

(para  $0 \leq \varrho < R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), (1)

$$u(R, \varphi) = f(\varphi) \quad (\text{para } 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (2)$$

Admitiendo que exista la solución  $u(\varrho, \varphi)$  de este problema, cada vez que se fije un valor de  $\varrho$  menor que  $R$ , la función de  $\varphi$  obtenida será ciertamente desarrollable en serie de Fourier (ver Cap. XXVI, n° 11, teor. II); es decir, tendremos

$$u(\varrho, \varphi) = \frac{1}{2} a_0(\varrho) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(\varrho) \cos k\varphi + b_k(\varrho) \sin k\varphi],$$

con los coeficientes (obviamente dependientes de  $\varrho$ ) definidos por las fórmulas

$$a_k(\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad b_k(\varrho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) \sin k\varphi d\varphi. \quad (3)$$

Veamos ahora si es posible deducir de las (1), (2) los valores de estos coeficientes (3).

De la (1) sigue, obviamente,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ u_{\varrho\varrho}(\varrho, \varphi) + \frac{1}{\varrho^2} u_{\varphi\varphi}(\varrho, \varphi) + \frac{1}{\varrho} u_{\varrho}(\varrho, \varphi) \right] \cos k\varphi d\varphi = 0 \quad (4)$$

y, siendo aplicable el teorema de derivación bajo el signo de integral respecto del parámetro  $\varrho$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varrho^2} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) \cos k\varphi d\varphi \right] + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) \cos k\varphi d\varphi \right] \\ + \frac{1}{\varrho^2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_{\varphi\varphi}(\varrho, \varphi) \cos k\varphi d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

La última integral puede ser transformada en dos sucesivas integraciones por partes, y se obtiene



$$\int_0^{2\pi} u_{\varphi\varphi}(\varrho, \varphi) \cos k\varphi d\varphi = \left[ u_{\varphi}(\varrho, \varphi) \cos k\varphi + k u(\varrho, \varphi) \sin k\varphi \right]_0^{2\pi} - k^2 \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) \cos k\varphi d\varphi = 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta que lo que está entre paréntesis cuadrados es nulo (pues se refiere a una función periódica, de período  $2\pi$ ) se obtiene, recordando las (3)

$$a''_k(\varrho) + \frac{1}{\varrho} a'_k(\varrho) - \frac{k^2}{\varrho^2} a_k(\varrho) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Del mismo modo, pero considerando en la (4)  $\sin k\varphi$  en lugar de  $\cos k\varphi$ , se obtiene

$$b''_k(\varrho) + \frac{1}{\varrho} b'_k(\varrho) - \frac{k^2}{\varrho^2} b_k(\varrho) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Los coeficientes de Fourier  $a_k(\varrho)$  y  $b_k(\varrho)$  deben, entonces, verificar esta ecuación diferencial ordinaria de 2º orden, lineal, del tipo de Euler (Cap. XXIX nº 15). La misma se integra inmediatamente y se obtiene

$$\begin{aligned} a_0(\varrho) &= A_0 + \hat{A}_0 \log \varrho, & a_k(\varrho) &= A_k \varrho^k + \hat{A}_k \varrho^{-k}, \\ b_k(\varrho) &= B_k \varrho^k + \hat{B}_k \varrho^{-k}, & (k &= 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $A_0, \hat{A}_0, A_k, \hat{A}_k, B_k, \hat{B}_k$  designan constantes arbitrarias. Para determinarlas comencemos observando que las  $a_k(\varrho), b_k(\varrho)$  deben ser funciones continuas para  $\varrho = 0$  y eso requiere que sea  $\hat{A}_0 = 0, \hat{A}_k = \hat{B}_k = 0$ . Además las (3) nos dicen que las  $a_k(\varrho), b_k(\varrho)$  son continuas también para  $\varrho = R$  debiendo además resultar, por la (2),

$$a_k(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad b_k(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi.$$

Estas condiciones determinan las restantes constantes  $A_0, A_k, B_k$  y se encuentra inmediatamente que debe ser

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, & A_k &= \frac{1}{R^k} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \\ B_k &= \frac{1}{R^k} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi, \end{aligned}$$



por lo que, sustituyendo en las (6)

$$a_0(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad a_k(\varphi) = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \\ b_k(\varphi) = \left(\frac{\varrho}{R}\right)^k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \operatorname{sen} k\varphi d\varphi.$$

Entonces, la solución  $u(\varrho, \varphi)$  supuesta existente está necesariamente dada, para  $0 \leq \varrho < R$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  por la fórmula

$$u(\varrho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^k \left[ \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta \cdot \cos k\varphi + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} k\theta d\theta \cdot \operatorname{sen} k\varphi \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^k \cos k(\varphi - \theta) \right] d\theta, \quad (7)$$

quedando este último pasaje (integración por serie) justificado por el hecho que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} f(\theta) \left(\frac{\varrho}{R}\right)^k \cos k(\varphi - \theta)$  es, para  $\varrho, \varphi$  fijados del modo antedicho, totalmente convergente<sup>(\*)</sup> al variar  $\theta$  en  $[0, 2\pi]$ .

La serie  $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^k \cos k(\varphi - \theta)$  que figura en (7) se suma fácilmente observando que es la parte real de esta otra

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^k e^{ik(\varphi - \theta)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R} e^{i(\varphi - \theta)}\right)^k,$$

que es una serie geométrica convergente con suma

$$\frac{1}{2} + \frac{\frac{\varrho}{R} e^{i(\varphi - \theta)}}{1 - \frac{\varrho}{R} e^{i(\varphi - \theta)}} = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{\varrho}{R} e^{i(\varphi - \theta)}}{1 - \frac{\varrho}{R} e^{i(\varphi - \theta)}} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{\varrho^2}{R^2} + 2i \frac{\varrho}{R} \operatorname{sen}(\varphi - \theta)}{1 - 2 \frac{\varrho}{R} \cos(\varphi - \theta) + \frac{\varrho^2}{R^2}}.$$

Tomando la parte real de ésta y sustituyendo en (7) se obtiene

$$u(\varrho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 - 2R\varrho \cos(\varphi - \theta) + \varrho^2} d\theta.$$

Queda naturalmente por verificar si esta fórmula proporciona efectivamente una función  $u(\varrho, \varphi)$  que satisfaga las (1), (2) y las condiciones de regularidad impuestas. Tal verificación es efectivamente posible y, precisamente, puede demostrarse

(\*) En efecto, llamando  $M$  al máximo de  $|f(\theta)|$  en  $[0, 2\pi]$ , dicha serie es mayorada por la  $M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^k$  que es convergente, siendo  $0 \leq \frac{\varrho}{R} < 1$ .



trarse: 1<sup>o</sup>) en los puntos interiores del círculo  $C$  la (8) define una función continua, dotada de derivadas parciales primeras y segundas continuas, con estas últimas verificando la (1); 2<sup>o</sup>) se tiene  $\lim_{\varphi \rightarrow R^-} u(\varphi, \varphi) = f(\varphi)$ , uniformemente para  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , de modo que la  $u(\varphi, \varphi)$  es prolongable, de modo continuo, en todo  $c$  y asume, sobre  $\mathcal{F}C$  los valores asignados  $f(\varphi)$ . Para las demostraciones, enviamos a los "Complementos y Ejercicios".

Queda así demostrado, en el caso del círculo, también la existencia de la solución del problema de Dirichlet. La integral que figura en el segundo miembro de (8) se denomina la integral de Poisson de la función  $f(\theta)$  y tiene importantes aplicaciones en varias cuestiones de Análisis.

## 6 - PROBLEMA DE CAUCHY Y PROBLEMA DE PROPAGACION PARA LA ECUACION DE LA CUERDA VIBRANTE.

Retomemos la ecuación (6) del n<sup>o</sup> 3, que consideraremos escribiendo  $t$  en lugar de  $y$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación tiene una interpretación física notable. Supongamos tener una cuerda elástica que, en condiciones de reposo, se halle tensa sobre el eje  $x$ ; si a tal cuerda, tras haber sido desplazada de su posición de equilibrio, se la deja vibrar, se demuestra en Física Matemática que el desplazamiento normal  $u(x, t)$ , que en el instante  $t$  tiene su punto de abscisa  $x$ , es una integral de la (1).

Comencemos estudiando para la (1) un problema de Cauchy particular, sugerido por el siguiente problema físico. Supongamos la cuerda indefinida (es decir, en condiciones de reposo, extendida y tensa sobre todo el eje  $x$ ) y estudiemos sus vibraciones suponiendo conocer, en el instante  $t = 0$ , su configuración inicial y la velocidad de cada punto de la misma. Se trata, entonces, de determinar una integral  $u(x, t)$  de la (1) que verifique las siguientes condiciones de Cauchy.



$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad ,$$

donde  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  son funciones continuas, dadas sobre todo el eje  $x$ .

Realicemos en la (1) el siguiente cambio de variables

$$\xi = x + \frac{t}{c} \quad , \quad \eta = x - \frac{t}{c} \quad .$$

Como resulta  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$  y, sucesivamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \quad ,$$

la ecuación (1) se transforma en la

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad . \quad (4)$$

Sabemos (ver n° 1, ej. 2°) que la integral general de la (4) está dada por

$u(\xi, \eta) = \alpha(\xi) + \beta(\eta)$ , donde  $\alpha(\xi)$ ,  $\beta(\eta)$  son funciones (derivables) arbitrarias. En virtud de las (3) se deduce inmediatamente que la integral general de

la (1) tiene la forma

$$u(x, t) = \alpha\left(x + \frac{t}{c}\right) + \beta\left(x - \frac{t}{c}\right) \quad (5)$$

con  $\alpha$ ,  $\beta$  funciones arbitrarias (que se supone admiten derivadas segundas).

Busquemos ahora de determinar estas dos funciones de modo que se verifiquen las (2).

Puesto que de la (5) sigue

$$u(x, 0) = \alpha(x) + \beta(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = \frac{1}{c} [\alpha'(x) - \beta'(x)] \quad ,$$

debe ser

$$\alpha(x) + \beta(x) = \varphi(x) \quad , \quad \alpha'(x) - \beta'(x) = c \psi(x) \quad .$$

De la segunda de estas ecuaciones se obtiene  $\alpha(x) - \beta(x) = c \int_0^x \psi(s) ds + k$  ,

con  $k$  constante arbitraria, tras lo que es inmediato deducir que debe ser

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x) + \int_0^x \psi(s) ds + k \right] \quad , \quad \beta(x) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x) - c \int_0^x \psi(s) ds - k \right] \quad ,$$

por lo que, sustituyendo en la (5) se concluye que la solución  $u(x, t)$  de nuestro problema, supuesta existente, no puede sino ser dada por la fórmula



$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \varphi\left(x + \frac{t}{c}\right) + \varphi\left(x - \frac{t}{c}\right) \right] + \frac{c}{2} \int_{x - \frac{t}{c}}^{x + \frac{t}{c}} \varphi(s) ds . \quad (6)$$

Viceversa, es muy simple verificar que si la función  $\varphi$  es derivable dos veces y la  $\psi$  una vez, la (6) define una función que, en todo el plano  $xt$  verifica las (1), (2).

Queda así probada la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy planteado.

Estudiemos ahora, para la ecuación (1) el denominado problema de propagación vibratoria, que surge del estudio de las vibraciones de una cuerda de longitud finita (extendida y tensa sobre el intervalo  $[0, 1]$  del eje  $x$ , en condiciones de reposo).

En este caso la función  $u(x, t)$  estará definida para  $0 \leq x \leq 1$ ,  $t \geq 0$ , es decir en la región  $S$  rayada en la fig. 70; pero es obvio que ya no bastará, como antes, asignar las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad , \quad (\text{para } 0 \leq x \leq 1) \quad (7)$$

sino que deberán agregarse otras que son, precisamente, las que expresan la ley con que se desplazan, en función del tiempo, los extremos  $x = 0$  y  $x = 1$  de la cuerda. Estas últimas condiciones se traducen manifiestamente en fórmulas del tipo

$$u(0, t) = \alpha(t) \quad , \quad u(1, t) = \beta(t) \quad , \quad (\text{para } t \geq 0) \quad , \quad (8)$$

donde  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  son funciones continuas definidas, y asignadas, para  $t \geq 0$

Buscamos, entonces, una integral de la (1) (continua en  $S$  junto con su derivada parcial  $u_t$  y tal que admita en  $S - \mathcal{F}S$  las derivadas  $u_x$ ,  $u_{xx}$ ,  $u_{tt}$ ) que verifique las condiciones iniciales (7) y las condiciones en los límites (8).

Con las hipótesis hechas<sup>(\*)</sup> la solución del problema, supuesta existente es cier

-----

(\*) Las funciones  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  de (8) serán supuestas, entonces, dotadas de derivada conti-



tamente, para cada  $t > 0$  fijado, desarrolle en una serie de Fourier, que contiene solo senos, en el interior del intervalo  $[0, 1]$ ; es decir, se puede escribir

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k \pi x}{l}, \quad (9)$$

habiendo puesto

$$u_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{k \pi x}{l} dx. \quad (10)$$

Para calcular estos coeficientes  $u_k(t)$

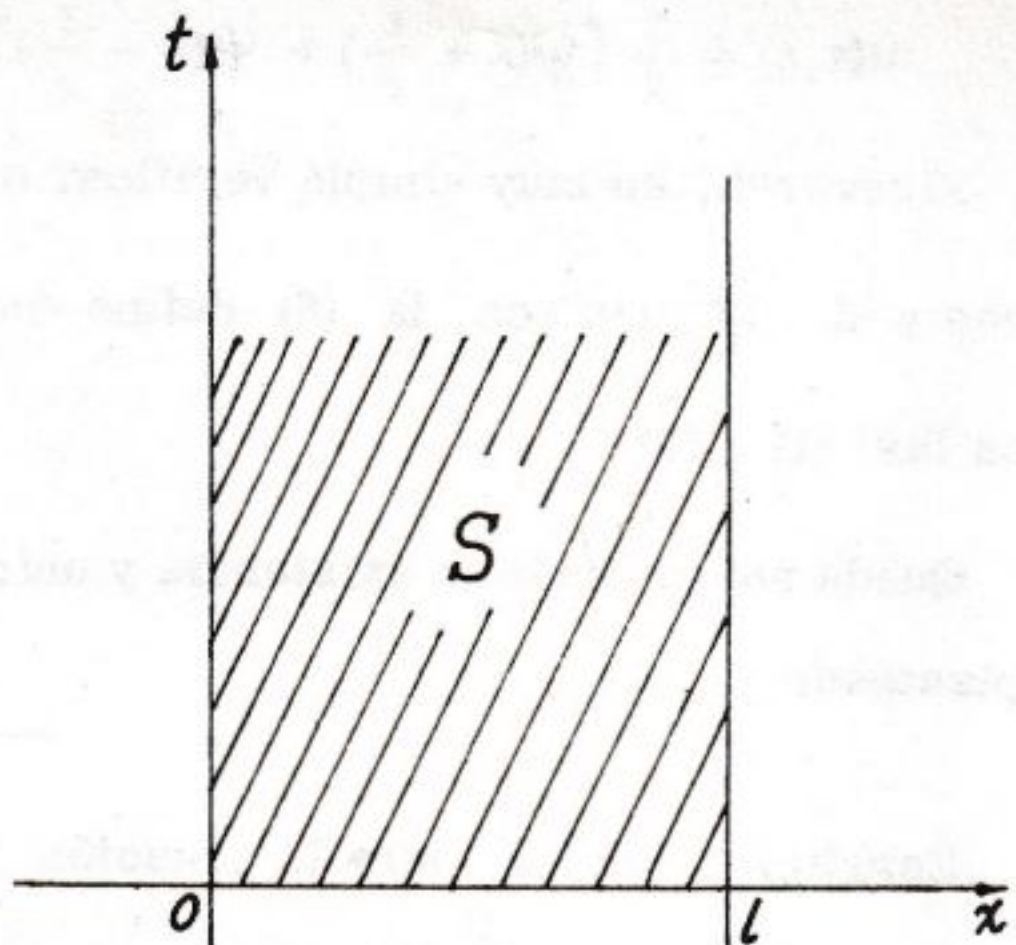


Fig. 70

observemos que de la (1) sigue, cualquiera sea  $k$ ,

$$\int_0^l [u_{xx}(x, t) - c^2 u_{tt}(x, t)] \sin \frac{k \pi x}{l} dx = 0;$$

pero, integrando dos veces por partes, se tiene

$$\begin{aligned} & \int_0^l u_{xx}(x, t) \sin \frac{k \pi x}{l} dx = \\ &= \left[ u_x(x, t) \sin \frac{k \pi x}{l} - \frac{k \pi}{l} u(x, t) \cos \frac{k \pi x}{l} \right]_0^l - \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{k \pi x}{l} dx, \end{aligned}$$

o sea, teniendo en cuenta las (8)

$$\int_0^l u_{xx}(x, t) \sin \frac{k \pi x}{l} dx = \frac{k \pi}{l} [\alpha(t) - (-1)^k \beta(t)] - \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{k \pi x}{l} dx;$$

por otra parte, al otro término de (11) se le puede aplicar el teorema de derivación bajo el signo de integral (respecto del parámetro  $t$ ), de modo que, recordando la posición (10), la (11) resulta

$$u''_k(t) + \frac{k^2 \pi^2}{c^2 l^2} u_k(t) = \frac{2k \pi}{c^2 l^2} [\alpha(t) - (-1)^k \beta(t)].$$

-----

nua; además debe ser

$$\varphi(0) = \alpha(0), \quad \varphi(l) = \beta(0), \quad \psi(0) = \alpha'(0), \quad \psi(l) = \beta'(0).$$

En el transcurso del cálculo que sigue admitiremos, por brevedad, la continuidad de  $u_x$ ,  $u_{xx}$ ,  $u_{tt}$  también sobre  $\tilde{S}$ ; pero es posible modificarlo de modo de evitar dichas hipótesis.



De esta ecuación diferencial ordinaria (lineal, no homogénea, con coeficientes constantes) se obtienen

$$u_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi t}{cl} + B_k \sin \frac{k\pi t}{cl} + \frac{2}{cl} \int_0^t [\alpha(\zeta) - (-1)^k \beta(\zeta)] \sin \frac{k\pi(t-\zeta)}{cl} d\zeta \quad (12)$$

con  $A_k, B_k$  constantes arbitrarias. Es necesario ahora determinar estas últimas teniendo en cuenta las (7), que prescriben que sea

$$u_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad u'_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Con fácil cálculo se encuentra que para que se verifiquen estas dos condiciones se debe asumir, en la (12),

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad B_k = \frac{2c}{k\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Entonces, sustituyendo en la (12) y sucesivamente en la (9), se obtiene en definitiva

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} \left\{ \cos \frac{k\pi t}{cl} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi + \right. \\ & + \frac{cl}{k\pi} \sin \frac{k\pi t}{cl} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi + \\ & + \frac{1}{c} \int_0^t [\alpha(\zeta) - (-1)^k \beta(\zeta)] \sin \frac{k\pi(t-\zeta)}{cl} d\zeta \left. \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Sería necesario ahora, para probar la existencia de la solución de nuestro problema de propagación, verificar si la (13) proporciona efectivamente una función que satisface todas las condiciones impuestas. Tal verificación es posible; pero no es tan simple, sobre todo en lo que se refiere a las condiciones (8), y por eso la omitimos, aceptándola sin realizarla.

## 7 - EL PROBLEMA DE PROPAGACION PARA LA ECUACION DEL CALOR.

Estudiemos, por último, la ecuación (7) del n° 3, que volveremos a escribir con  $t$  en lugar de  $y$ :



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

El significado físico de ésta es el siguiente. Supongamos dada una barra conductora del calor, dispuesta sobre el intervalo  $[0, 1]$  del eje  $x$ , que intercambie calor con el exterior solamente a través de sus extremos  $x = 0$  y  $x = 1$ . En ese caso, la temperatura  $u(x, t)$ , en el punto de abscisa  $x$ , en el instante  $t$ , es una integral de la (1).

Para ésta se plantea el denominado problema de propagación no vibratoria que consiste en buscar, en la región  $S$  de fig. 70, una integral que verifique la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad (\text{para } 0 \leq x \leq 1) \quad (2)$$

y las condiciones en los límites

$$u(0, t) = \alpha(t) \quad , \quad u(1, t) = \beta(t) \quad , \quad (\text{para } t \geq 0) \quad (3)$$

Físicamente la (2) equivale a dar la temperatura inicial de cada punto de la barra y la (3) a fijar el modo que varía, en función del tiempo, la temperatura en los extremos de la barra.

El problema así planteado puede resolverse con un procedimiento análogo al aplicado en el  $n^o$  precedente. Escritas las (9), (10) de dicho  $n^o$ , de la (1) deducimos

$$\int_0^1 [u_{xx}(x, t) - u_t(x, t)] \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0 \quad ,$$

y de ésta, con cálculos análogos a los hechos sobre la (11) del  $n^o$  precedente:

$$u'_k(t) + \frac{k^2 \pi^2}{l^2} u_k(t) = \frac{2k\pi}{l^2} [\alpha(t) - (-1)^k \beta(t)] \quad .$$

De la integración de esta ecuación diferencial ordinaria lineal de  $1^{er}$  orden se obtiene

$$u_k(t) = A_k e^{-\frac{k^2 \pi^2 t}{l^2}} + \frac{2k\pi}{l^2} \int_0^t e^{-\frac{k^2 \pi^2 (t-\zeta)}{l^2}} [\alpha(\zeta) - (-1)^k \beta(\zeta)] d\zeta \quad , \quad (4)$$



con  $A_k$  constante arbitraria. Esta se determina en base a la (2), de la que se deduce que debe ser

$$u_k(0) = A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \text{sen} \frac{k \pi x}{l} dx.$$

Sustituyendo en (4) y, sucesivamente, en la (9) del n° precedente se concluye que, si la solución del problema existe, la misma debe necesariamente estar dada por la fórmula

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2 \pi^2 t}{l^2}} \text{sen} \frac{k \pi x}{l} \left\{ \int_0^l \varphi(\xi) \text{sen} \frac{k \pi \xi}{l} d\xi + \right. \\ \left. + \frac{k \pi}{l} \int_0^t e^{-\frac{k^2 \pi^2 \tau}{l^2}} [\alpha(\tau) - (-1)^k \beta(\tau)] d\tau \right\}.$$

De ésta podemos obtener la certeza de la existencia mediante una verificación, que también admitiremos.



## CAPITULO XXXI

### Funciones analíticas

#### 1 - INTRODUCCION.

En este Cap. nos ocuparemos de las denominadas funciones analíticas de una variable compleja  $z = x + iy$ . Tales funciones pueden ser uniformes (o monódromas, es decir, presentan un solo valor) o multiformes (o polidromas, es decir, varios valores). Las funciones analíticas uniformes no son sino las funciones analíticas holomorfas (o simplemente funciones holomorfas) de las que ya dimos la definición y estudiamos las primeras propiedades en el Cap. XVII, n<sup>os</sup> 4, 5, 6.

Las hemos encontrado sucesivamente en el Cap. XXVI, n<sup>o</sup> 9 (donde hemos demostrado que la suma de una serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  es, en su correspondiente campo de convergencia, una función holomorfa) y en el Cap. XXX, n<sup>o</sup> 4 (donde se ha visto que una función holomorfa  $f(z)$ , pensada como función de las dos variables reales  $x, y$  es siempre una solución de la ecuación de Laplace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ ). Proseguiremos ahora el estudio de las funciones holomorfas  $f(z)$ , dando después algunas nociones sobre las funciones analíticas polidromas.

Recordemos que el concepto de función holomorfa se aplica a funciones  $f(z)$  definidas en campos (conjuntos abiertos)  $A$  del plano  $xy$ ; de ahora en ade-



lante se supondrá siempre que se trata de campos conexos (Cap. XIV, n° 5). Usaremos algunas veces la locución:  $f(z)$  es holomorfa en un punto  $z_0$ , para significar que  $z_0$  pertenece a un campo conexo en el que la  $f(z)$  es holomorfa.

A las propiedades elementales ya vistas, agregaremos la siguiente:

I - Sea  $f(z)$  holomorfa en el campo conexo  $A$ . Si la derivada  $f'(z)$  es idénticamente nula en  $A$ , la función  $f(z)$  será constante en  $A$ .

Dem. De  $f'(z) \equiv 0$  sigue  $f_x \equiv 0$ ,  $f_y \equiv 0$ , de lo que, teniendo presente que  $A$  es conexo, se tendrá por el teor. IV del Cap. XV, n° 4, que  $f(z)$  es constante.

## 2 - SERIES BILATERALES DE POTENCIAS.

Comenzaremos indicando otra notable categoría de funciones holomorfas, considerando series de potencias del binomio  $z - z_0$  en la que también figuren potencias con exponente entero negativo, es decir, series del tipo

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (1)$$

que denominaremos serie bilátera de potencias<sup>(\*)</sup>. Diremos que la (1) es convergente cuando lo sean separadamente las dos series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (2)$$

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (3)$$

La (2) es una serie ordinaria de potencias; tendrá un cierto radio de convergen-

(\*) En contraposición, las series ordinarias de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  pueden ser llamadas uniláteras. En este n° 2 se entiende que en la (1), al menos uno de los coeficientes  $a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$ , es distinto de cero, es decir que la serie bilátera no se reduzca a una unilátera.



cia  $r$ , y si suponemos  $r > 0$ , será convergente para  $|z - z_0| < r$ , no convergente para  $|z - z_0| > r$ .

En cuanto se refiere a la (3), si ponemos  $k = -h$ ,  $\frac{1}{z - z_0} = w$ , se transformará en la

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_{-h} w^h \quad (3')$$

que es, en la variable  $w$ , una ordinaria serie de potencias; llamando  $R$  a su radio de convergencia y supuesto  $R > 0$ , dicha serie convergerá para  $|w| < R$ , no convergerá para  $|w| > R$ . Sigue que la (3) convergerá para  $|z - z_0| > \frac{1}{R}$  y no convergerá para  $|z - z_0| < \frac{1}{R}$ .

De estas consideraciones se deduce que la (1) puede admitir un campo de convergencia solamente si existen puntos  $z$  para los que se verifiquen simultáneamente las  $|z - z_0| < r$ ,  $|z - z_0| > \frac{1}{R}$ , vale decir, solamente si  $r > \frac{1}{R}$ . En tales hipótesis, la serie bilátera de potencias (1) admite, como campo de convergencia, el constituido por los puntos interiores a la corona circular de centro  $z_0$  y radios  $\frac{1}{R}$ ,  $r^{(*)}$ .

La suma de la (2) es una función  $\varphi(z)$ , holomorfa en el campo  $|z - z_0| < r$ , dotada de todas las derivadas, que se pueden calcular derivando término por término dicha serie (Cap. XXVI, n° 9, teor. VI). Análogamente la suma de la (3') es una función  $\psi(w)$ , holomorfa en el campo  $|w| < R$  (con las mismas propiedades que antes) y de ahí que la suma de la (3) sea igual a  $\psi\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$  que, como función compuesta con funciones holomorfas, resulta holomorfa para  $|z - z_0| > \frac{1}{R}$ , que resulta admitir todas las derivadas, que se obtendrán derivando término por término la (3). Entonces, para la suma de la (1) que vale

-----

(\*) Queda sobreentendido que si  $R = +\infty$  y  $r$  es finito, el campo en estudio coincide con el círculo abierto de centro  $z_0$  y radio  $R$ , privado de su centro  $z_0$ . Si  $R$  es finito y  $r = +\infty$ , trátase del complementario del círculo de centro  $z_0$  y radio  $\frac{1}{R}$ . Si  $R = r = +\infty$ , el campo de convergencia resulta todo el plano, privado del punto  $z_0$ .



$\varphi(z) + \psi\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$  se puede enunciar:

I - La suma  $f(z)$  de la serie bilátera de potencias (1) es una función holomorfa de  $z$  en la corona circular abierta que constituye el campo de convergencia de dicha serie. Tal función admite derivadas de orden tan elevado como se quiera, las que se pueden expresar derivando la (1) término por término.

Notemos que para la serie bilátera (1) no puede ya seguir valiendo una fórmula ni siquiera similar a la  $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$  que hemos encontrado en el caso de las series uniláteras (Cap. XXVI, n° 9), ya que el punto inicial  $z_0$  no pertenece más al campo de convergencia. Para expresar los coeficientes  $a_k$  de la (1) por medio de la suma  $f(z)$  de la misma, es necesario recurrir a otro procedimiento, como veremos en el n° 5.

### 3 - INTEGRALES DE FUNCIONES HOLOMORFAS Y TEOREMAS DE CAUCHY.

Sea  $f(z) = f(x, y)$  una función de la variable compleja  $z = x + iy$  que, por el momento, supondremos solamente continua en un campo conexo dado  $A$ , del plano  $xy$ . Fijados en  $A$  dos puntos  $z_0, z_1$  y llamando  $\gamma$  a una curva generalmente regular, contenida en  $A$ , que los tenga por extremos, definiremos la integral compleja de la  $f(z)$ , extendida a  $\gamma$ , en el sentido de  $z_0$  a  $z_1$ , que indicaremos con

$$\int_{\gamma(z_0, z_1)} f(z) dz, \quad (1)$$

como la integral curvilínea, extendida sobre  $\gamma$ , en el sentido de  $z_0$  a  $z_1$ , de la forma diferencial lineal

$f(x, y) (dx + i dy)^{(*)}$ ; es decir, se pone

(\*) Se considera, entonces, al  $dz$  como  $dx + i dy$  en (1), y se interpreta la integral que resulta como una integral curvilínea.



$$\int_{\gamma(z_0, z_1)} f(z) dz = \int_{\gamma(z_0, z_1)} f(x, y) (dx + i dy) \quad (2)$$

Si  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $(a \leq t \leq b)$  son las ecuaciones paramétricas de  $\gamma$ , sabemos (Cap. X, n° 10) que las funciones  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  son continuas en  $[a, b]$  y que este intervalo puede descomponerse en un número finito de intervalos  $[t_0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$ , ...,  $[t_{n-1}, t_n]$  (con  $t_0 = a$ ,  $t_n = b$ ) de modo que, variando  $t$  en cada uno de estos intervalos  $[t_{k-1}, t_k]$ , el punto  $(x, y)$  describa una curva regular  $\gamma_k$ . La  $\gamma$  resulta entonces constituida por las curvas regulares  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  y, según la definición de integral curvilínea de una forma diferencial lineal (Cap. XXIII, n° 2), de la (2) sigue (suponiendo que el punto  $z_0$  corresponde a  $t = a$  y el punto  $z_1$  a  $t = b$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(z_0, z_1)} f(z) dz &= \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t)] [\varphi'(t) + i \psi'(t)] dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f[\varphi(t), \psi(t)] [\varphi'(t) + i \psi'(t)] dt \end{aligned} \quad (3)$$

Valen, para las integrales (1), propiedades y observaciones análogas a las ya expuestas para las integrales curvilíneas. En particular, resulta

$$\int_{\gamma(z_0, z_1)} f(z) dz = - \int_{\gamma(z_1, z_0)} f(z) dz$$

y se pueden considerar integrales de los tipos  $\int_{\pm \gamma} f(z) dz$ ,  $\int_{\pm \partial D} f(z) dz$ , donde

$\gamma$  es una curva cerrada y  $D$  un dominio regular, contenidos en  $A$ . Observe-mos, también, la propiedad siguiente:

I - Llamando  $M$  al máximo del módulo de  $f(z)$  sobre la curva  $\gamma$  y  $l$  a la longitud de dicha curva, será

$$\left| \int_{\gamma(z_0, z_1)} f(z) dz \right| \leq M l \quad (4)$$

Dem. De la (3) sigue  $\left| \int_{\gamma(z_0, z_1)} f(z) dz \right| \leq M \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$  y como esta

última integral representa, como es sabido, la longitud de la curva  $\gamma$ , sigue la

(4), que es lo que queríamos demostrar.



Supongamos ahora que la  $f(z) = f(x, y)$  sea holomorfa en  $A$ , vale decir, que sea continua junto con sus derivadas parciales primeras teniéndose, además,  $f'_x = \frac{1}{i} f'_y$ . En ese caso la forma diferencial lineal  $f(x, y) (dx + i dy)$  que figura en (2) verifica la conocida condición necesaria para ser una diferencial exacta (es decir  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (if)}{\partial x}$ ); podemos entonces aplicarle el teor. I del Cap. XXIII, n° 5, obteniendo así el siguiente teorema fundamental, que llamaremos primer teorema de Cauchy:

II - Si  $f(z)$  es una función holomorfa en el campo  $A$  resultará, en todo dominio regular  $D$  contenido en  $A$ ,

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0 \quad (5)$$

De este teorema se deduce otro, también de fundamental importancia, que llamaremos segundo teorema de Cauchy y que se enuncia como sigue:

III - Sea  $f(z)$  una función holomorfa en el campo  $A$  y  $D$  un dominio regular contenido en  $A$ . Para todo punto  $\zeta$  interior de  $D$  vale la fórmula

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{z - \zeta} \quad (6)$$

Dem. Fijado el punto  $\zeta$ , la función  $\frac{f(z)}{z - \zeta}$  no es, en general, holomorfa en  $A$ ; pero sí lo es, con seguridad, en el campo  $A'$  deducido de  $A$  privándolo del punto  $\zeta$ .

La integral del segundo miembro de (6) tiene sentido porque  $\partial D$  se compone de curvas trazadas en  $A'$ , no siendo en general aplicable a la misma el teor. II puesto que el dominio  $D$  no está contenido en  $A'$ .

Tracemos una circunferencia  $\Gamma$  totalmente interior al dominio  $D$  y llamemos  $D'$  al dominio (regular) obtenido privando a  $D$  de los puntos interiores de  $\Gamma$ .

El dominio  $D'$  está contenido en  $A'$  y entonces, por el teor. II se tiene



$\int_{+\gamma_D} \frac{f(z) dz}{z - \zeta} = 0$ , o sea teniendo en cuenta que  $\gamma_{D'}$  se compone de  $\gamma_D$  y de la circunferencia  $\gamma$  (ver fig. 71):

$$\int_{+\gamma_D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz + \int_{-\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 0$$

o también

$$\int_{+\gamma_D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_{+\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (7)$$

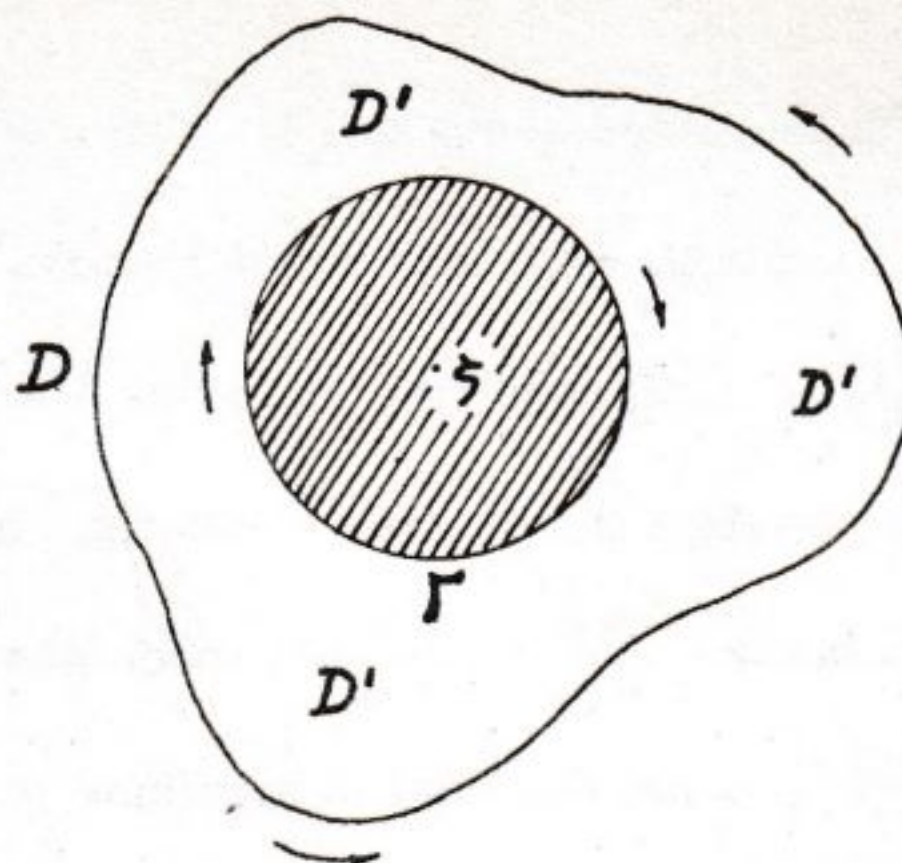


Fig. 71

Llamando  $\varphi$  al radio de  $\gamma$ , observamos que el primer miembro de (7) tiene un valor independiente de  $\varphi$ ; en consecuencia también el segundo miembro se mantiene constante al variar<sup>(\*)</sup>  $\varphi$  pudiéndose entonces sustituir la (7) con la

$$\int_{+\gamma_D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (8)$$

Para calcular este límite pongamos  $\zeta = \xi + i\eta$  y adoptemos para  $\gamma$  las ecuaciones paramétricas  $x = \xi + \varphi \cos t$ ,  $y = \eta + \varphi \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Siguen, de éstas,  $z = x + iy = \zeta + \varphi e^{it}$ ,  $dz = dx + i dy = -\varphi \sin t dt + i \varphi \cos t dt = i \varphi e^{it} dt$ , por lo que será

$$\int_{+\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta + \varphi e^{it}) i \varphi e^{it}}{\varphi e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} f(\zeta + \varphi e^{it}) dt.$$

En esta última integral, la función a integrar es continua respecto de  $t$  y  $\varphi$  para  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi < \delta$  y entonces, por un conocido teorema (Cap. XIX, n.º 5, teor. I) la propia integral es función continua de  $\varphi$  para  $0 \leq \varphi < \delta$ . De aquí que su límite para  $\varphi \rightarrow 0^+$  venga dado simplemente por el valor que la integral asume para  $\varphi = 0$ ; es decir se tiene

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = i \int_0^{2\pi} f(\zeta) dt = 2\pi i f(\zeta).$$

Sustituyendo en (8) y dividiendo por  $2\pi i$  se logra la (6), que es lo que que

(\*) Para  $\varphi$  se tiene la limitación  $0 < \varphi < \delta$ , donde  $\delta$  es la distancia de  $\zeta$  a  $\gamma_D$ .



ríamos demostrar.

Nótese cómo la (6), llamada también integral de Cauchy traduce una propiedad sorprendente que no tiene análoga en el campo de las funciones de variables reales: una vez conocidos los valores sobre la frontera del dominio  $D$ , la función queda determinada en todos los puntos  $\zeta$  interiores de  $D$ .

#### 4 - INTEGRALES DE FUNCIONES HOLOMORFAS EN CAMPOS SIMPLEMENTE CONEXOS; FUNCIONES PRIMITIVAS.

Ulteriores propiedades de las integrales de funciones holomorfas resultan de suponer que el campo conexo  $A$ , en el que se considera definida la función holomorfa  $f(z)$ , sea simplemente conexo. En ese caso la validez de la  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (if)}{\partial x}$  nos asegura (Cap. XXIII, n° 5, teor. II) que la forma diferencial  $f(x,y)(dx + i dy)$  es, en  $A$ , un diferencial exacto. Esto significa que es posible definir en  $A$  una función  $F(x,y) = F(z)$ , uniforme, continua junto con sus derivadas parciales primeras, que verifique las

$$F_x = f, \quad F_y = if. \quad (1)$$

Por el teor. I del Cap. XXIII, n° 2, podemos entonces afirmar que la integral

$$\int_{\gamma(z_0, z_1)} f(z) dz = \int_{\gamma(z_0, z_1)} f(x,y) (dx + i dy) \quad (2)$$

tiene un valor que depende solamente de los puntos  $z_0, z_1$  (y no de la curva  $\gamma$  que los une), resultando además

$$\int_{\gamma(z_0, z_1)} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0), \quad (3)$$

y, en particular

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (4)$$

para toda curva  $\gamma$  cerrada trazada en  $A$ . De ahí que la integral (2) pueda indicarse simplemente con  $\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$  (integral definida) y la (3) pueda escribirse



$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) \quad (5)$$

Dejemos ahora fijo el punto  $z_0$  y hagamos variar  $z_1$  en el campo  $A$ ; escribiendo  $z$  en lugar de  $z_1$ , podemos considerar la integral  $\int_{z_0}^z f(z) dz$  de la  $f(z)$ . Tal integral resulta ser una función de  $z$ , definida en  $A$  y ligada a la citada función  $F(z)$  por la siguiente fórmula, consecuencia de (5):

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^z f(z) dz \quad (6)$$

Ya se ha dicho que la  $F(x)$  es en  $A$  continua junto con  $F_x, F_y$ ; observemos ahora que, de las (1) sigue  $F_x = \frac{1}{i} F_y = f$ , pudiendo entonces asegurar que la  $F(z)$  es holomorfa en  $A$  y su derivada  $F'(z)$  coincide con la función dada  $f(z)$ .

La  $F(z)$  puede llamarse, por lo tanto, una primitiva de  $f(z)$ . Lo es también, evidentemente  $F(z) + c$ , con  $c$  constante arbitraria, y del teor. I del n° 1 si gue, inmediatamente, que no hay otras primitivas fuera de éstas. La totalidad de las primitivas  $F(z) + c$  toma el nombre de integral indefinida de  $f(z)$ .

Podemos resumir los resultados obtenidos en el siguiente enunciado:

I - Si  $f(z)$  es holomorfa en el campo  $A$  simplemente conexo, admitirá en él función primitiva  $F(z)$ , la que queda definida salvo una constante aditiva arbitraria.

De la  $f(z)$  puede considerarse la integral indefinida  $c + \int_{z_0}^z f(z) dz$ , la que proporciona aquella función primitiva que en el punto  $z_0$  asume el valor  $c$ . Puede también considerarse la integral definida  $\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$  y, conocida una primitiva  $F(z)$ , su cálculo es inmediato a través de la fórmula (5). Por último la integral de  $f(z)$ , extendida a cualquier curva cerrada  $\gamma$  trazada en  $A$ , es igual a cero.



Nótese la analogía de estos resultados con los relativos a las funciones continuas de una variable real, definidas en intervalos; téngase sin embargo presente que valen solamente en el caso de un campo simplemente conexo.

## 5 - EXPRESION DE LOS COEFICIENTES DE UNA SERIE DE POTENCIAS MEDIANTE INTEGRALES.

Consideremos una serie de potencias (unilátera o bilátera) que posea un campo de convergencia (en forma de círculo o de corona circular). Sabemos que, en tal campo, dicha serie tendrá una función holomorfa como suma, la que admite derivadas de cualquier orden. Deseamos ahora hacer ver que los coeficientes de la serie son expresables mediante ciertas integrales en las que figura  $f(z)$ .

Consideremos la serie bajo la forma bilátera

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (1)$$

sin excluir el caso en que, para  $k < 0$  tengamos  $a_k = 0$ , con lo que resultará una serie unilátera. Fijado un entero  $n$  (positivo, negativo o nulo) multipliquemos ambos miembros de (1) por  $(z - z_0)^{-n-1}$  e integremos después a lo largo de cualquier circunferencia orientada en el sentido antihorario; obtenemos, de ese modo,

$$\int_{+\Gamma} f(z) (z - z_0)^{-n-1} dz = \int_{-\Gamma} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1} dz. \quad (2)$$

La serie que interviene en el segundo miembro es uniformemente convergente para  $z$  variando en  $\Gamma$  pues lo es la serie (1), y el factor  $(z - z_0)^{-n-1}$  por el que se ha multiplicado cada término de la misma, tiene módulo constante sobre  $\Gamma$ . Es entonces posible, en el segundo miembro de (2), integrar término por término y escribir

$$\int_{+\Gamma} f(z) (z - z_0)^{-n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{+\Gamma} (z - z_0)^{k-n-1} dz. \quad (3)$$

Pero, si denominamos  $\rho$  al radio de  $\Gamma$  y adoptamos para  $\Gamma$  la representación paramétrica  $z = z_0 + \rho e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , se tiene



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (z - z_0)^{k-n-1} dz &= \int_0^{2\pi} \rho^{k-n-1} e^{i(k-n-1)t} i \rho e^{it} dt = \\ &= i \rho^{k-n} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ 2\pi i & \text{si } k = n, \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que la (3) queda reducida a la

$$\int_{\Gamma} f(z) (z - z_0)^{-n-1} dz = 2\pi i a_n$$

y, de aquí,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

Esta es la expresión que buscábamos de los coeficientes de la serie (1).

De la (4) sigue obviamente que la integral del segundo miembro no debe depender de la elección de la circunferencia  $\Gamma$ . Se puede dar una demostración directa de este hecho recurriendo al primer teorema de Cauchy. En efecto; elegidas dos

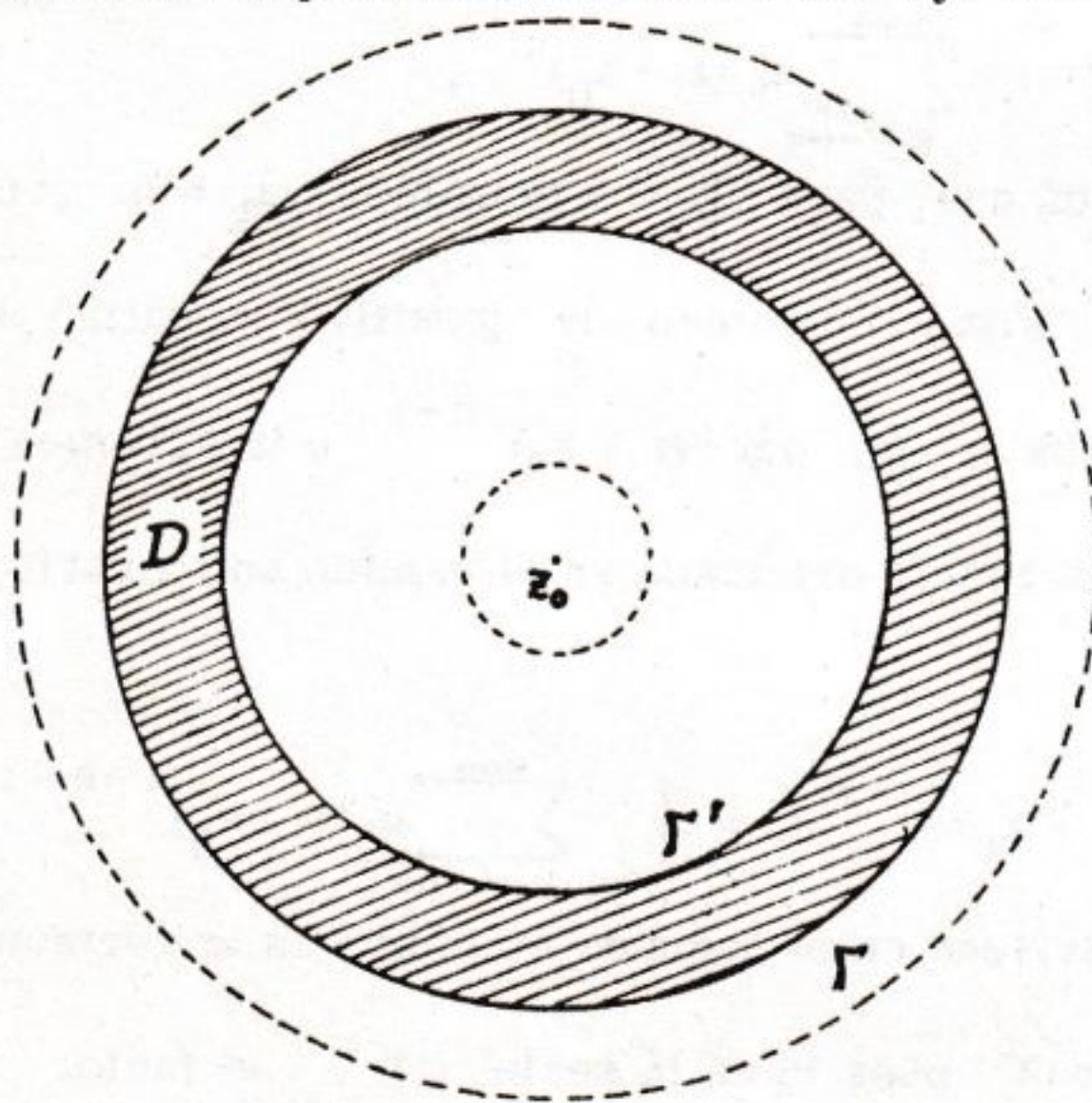


Fig. 72

circunferencias distintas  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  de centro  $z_0$ , contenidas en el campo de convergencia de la serie (1), las mismas constituyen la frontera de un dominio

$D$  perteneciente a un campo en el que la función  $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$  es holomorfa<sup>(\*)</sup>;

-----

(\*) Tal campo es la corona circular (abierta) de convergencia, si la serie es bilátera; es el círculo (abierto) de convergencia, privado del centro  $z_0$ , si la serie es unilátera.



por el teorema recién citado resultará

$$\int_{\Gamma_D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 0 ,$$

o sea,

$$\int_{+\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz + \int_{-\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 0 ,$$

$$\int_{+\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \int_{+\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz ,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Observemos también que, si la serie dada (1) es unilátera, la (4) debe dar  $a_n = 0$  para  $n < 0$ . También de esto podemos dar una demostración directa. En efecto, si la serie (1) es unilátera, la  $f(z)$  es holomorfa en el dominio<sup>(\*)</sup> circular encerrado por  $\Gamma$  y, para  $n < 0$ , o sea  $-(n+1) \geq 0$ , lo será también la función  $f(z)(z - z_0)^{-(n+1)}$ ; sigue, por el primer teorema de Cauchy, que la integral del segundo miembro de (4) vale cero.

En el caso de una serie unilátera, sabemos además (Cap. XXVI, n° 9) que los coeficientes  $a_n$  pueden expresarse con esta otra fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} , \quad (n = 0, 1, 2, \dots) ; \quad (5)$$

confrontando con la (4) se deduce

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz . \quad (6)$$

Esta fórmula puede demostrarse directamente, aplicando el segundo teorema de Cauchy. En efecto, por la holomorfa de  $f(z)$  en el dominio limitado por  $\Gamma$ , se tiene para todo punto  $\zeta$  interior de tal dominio

(\*) De ahora en adelante diremos brevemente que una función es holomorfa en un dominio  $D$ , cuando sea holomorfa en un campo que contenga  $D$ .



$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz ,$$

de la que, derivando  $n$  veces con respecto a  $\zeta$  y aplicando el teorema de derivación bajo el signo de integral  $\int$  lo que es lícito ya que, cuando  $z$  varía en  $\Gamma$  y  $\zeta$  en el interior del dominio, el integrando es una función continua de  $(z, \zeta)$ , junto con las derivadas respecto de  $\zeta$ , se obtiene

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz , \quad (7)$$

y ésta, para  $\zeta = z_0$ , proporciona la (6).

Nótese por último que el razonamiento hecho para deducir la (4) prueba también que, si una función  $f(z)$ , holomorfa en una corona circular abierta (o en un círculo abierto) de centro  $z_0$ , es allí desarrollable en serie de potencias de  $z - z_0$ , bilátera (o unilátera) el desarrollo es necesariamente único puesto que sus coeficientes no pueden ser sino los proporcionados por la (4).

## 6 - DESARROLLO LOCAL EN SERIE DE TAYLOR; EXISTENCIA DE TODAS LAS DERIVADAS; TEOREMA DE MORERA.

Sabemos que toda función definida como suma de una serie de potencias (unilátera) resulta holomorfa en el campo circular de convergencia correspondiente. Hasta este momento, tales funciones representan ejemplos particulares de funciones holomorfas; entre otras cosas están definidas solamente en campos circulares y, además, admiten todas las derivadas.

Queremos ahora hacer ver que de ningún modo se trata de funciones holomorfas de un tipo muy particular pues vale el siguiente teorema:

I - Sea  $f(z)$  holomorfa en un campo (conexo)  $A$  dado, y sea  $z_0$  un punto arbitrario de  $A$ . Llamando  $C_0$  al mayor círculo abierto con centro en  $z_0$  contenido en  $A^{(*)}$ , la  $f(z)$

(\*) El radio de  $C_0$  es igual a la distancia de  $z_0$  a  $\mathcal{F}A$ . Tal radio resultará infinito si



será en  $C_0$  desarrollable en serie de potencias (unilátera) de punto inicial  $z_0$ .

Dem. Admitiendo que en  $C_0$  valga un desarrollo del tipo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (1)$$

sabemos (ver el final del n<sup>o</sup> precedente) que necesariamente los coeficientes  $a_k$  estarán dados por la fórmula

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

donde  $\Gamma$  es una circunferencia cualquiera, de centro  $z_0$ , contenida en  $C_0$ .

Para probar el teorema falta hacer ver que la serie de potencias que tiene estos coeficientes (2) converge en todo punto  $\zeta$  de  $C_0$  y tiene  $f(\zeta)$  por suma.

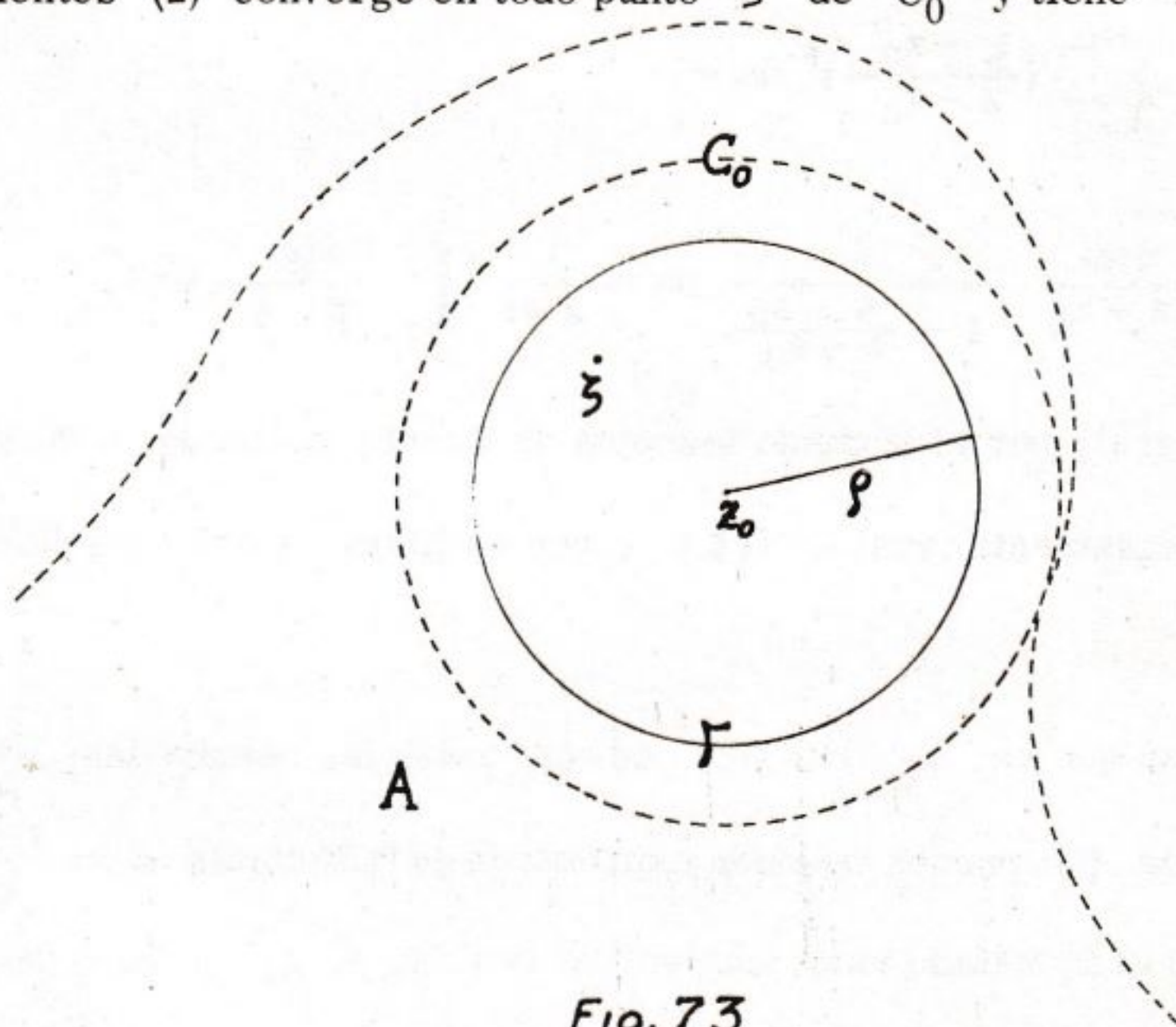


Fig. 73

Fijado  $\zeta$ , elijamos  $\Gamma$  de modo que  $\zeta$  resulte interior a ella y consideremos la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \cdot (\zeta - z_0)^k. \quad (3)$$

La misma es convergente puesto que, llamando  $\rho$  al radio de  $\Gamma$  y  $M$  al máximo de  $|f(z)|$  sobre  $\Gamma$ , el módulo de su término general resulta (n<sup>o</sup> 3, teor. I)

-----  
sólo si  $A$  coincide con todo el plano.



menor que

$$\frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{k+1}} \cdot 2\pi\rho \cdot |\xi - z_0|^k = M \left( \frac{|\xi - z_0|}{\rho} \right)^k,$$

y la serie formada por estos números es una serie geométrica de razón  $\frac{|\xi - z_0|}{\rho} < 1$ .

La suma de la serie (3) resulta, además, igual a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} \left( \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^k dz, \quad (4)$$

puesto que la serie bajo el signo de integral es uniformemente convergente para  $z$  variando en  $\gamma$  [su término general es, en módulo, menor que  $\frac{M}{\rho} \left( \frac{|\xi - z_0|}{\rho} \right)^k$ ] y entonces es lícita la integración término por término.

Pero la expresión (4) vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^k dz &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz, \end{aligned}$$

siendo esta última integral, por el segundo teorema de Cauchy aplicado al dominio limitado por  $\gamma$ , precisamente igual a  $f(\xi)$ , que es lo que queríamos demostrar.

De este teorema sigue que en  $C_0$  la  $f(z)$  admite todas las derivadas y que los coeficientes  $a_k$  de (1) pueden también expresarse en la fórmula  $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ . Teniendo en cuenta que el resultado vale, cualquiera sea  $z_0 \in A$ , puede enunciarse:

II - Sea  $f(z)$  holomorfa en el campo (conexo)  $A$ . Tal función admitirá en dicho campo derivadas de cualquier orden y, fijado arbitrariamente un punto  $z_0 \in A$ , la serie de Taylor de la  $f(z)$ , escrita con el punto inicial  $z_0$ , converge en el antes citado círculo  $C_0$ , y tiene por suma la  $f(z)$ . Es decir que se tiene

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad (\text{para } z \in C_0) \quad (5)$$



Téngase bien presente que la (5) representa  $f(z)$  solamente en el campo circular  $C_0$ , que en general no coincide con el campo  $A$ ; para representar  $f(z)$  en puntos de  $A - C_0$  será necesario otros desarrollos de Taylor, deducidos eligiendo convenientemente un nuevo punto inicial. En otras palabras: con la serie de Taylor se puede representar cualquier función holomorfa; pero, en general, tal cosa es posible sólo localmente, es decir, en un entorno oportuno  $C_0$  de cualquier punto  $z_0$  del campo  $A$  donde sea holomorfa. Por eso es que se dice desarrollo local en serie de Taylor<sup>(\*)</sup>.

El teor. II permite obtener inmediatamente los clásicos desarrollos en serie ya estudiados en el Cap. XXVI, n° 9.

El hecho que una función holomorfa admita derivadas de cualquier orden<sup>(\*\*)</sup> puede también enunciarse diciendo que la derivada de una función holomorfa es, todavía, una función holomorfa. De esta observación surge la posibilidad de invertir el primer teorema de Cauchy con el siguiente teorema de Morera:

III - Sea  $f(z) = f(x, y)$  una función continua en un campo (conexo) dado  $A$ . Si para todo dominio regular  $D$  contenido en  $A$  resulta

$$\int_{\gamma D} f(z) dz = 0, \quad (6)$$

la  $f(z)$  será holomorfa en  $A$ .

Dem. Basta demostrar que  $f(z)$  es holomorfa en todo campo rectangular  $R$  contenido en  $A$ . Fijado  $R$ , tracemos en él una curva simple y cerrada arbitraria  $\gamma$ ; puesto que  $R$  es simplemente conexo, tal curva  $\gamma$  constituye la

(\*) Es evidente que el radio de convergencia  $r$  de la serie de potencias (5) es, seguramente no inferior al radio  $r_0$  del círculo  $C_0$ .

(\*\*) También este hecho no tiene análogo en el campo de las funciones de variable real, en el que una función puede admitir derivada primera sin aceptar derivadas sucesivas.



frontera de un dominio regular  $D$  contenido en  $R$  y, por ende, en  $A$ . Por la hipótesis (6) resulta  $\int_Y f(z) (dx + i dy) = 0$ , de lo que sigue (Cap. XXIII, n° 3, teor. I) que la forma lineal  $f(z) (dx + i dy)$  es, en  $R$ , un diferencial exacto. Se puede, entonces, definir en  $R$  una función  $F(z) = f(x, y)$  uniforme, continua junto con  $F_x$  y  $F_y$  tal de tenerse  $F_x = f$ ,  $F_y = if$ . Como de éstas sigue  $F_x = \frac{1}{i} F_y = f$ , tal  $F(z)$  es holomorfa en  $R$  y se tiene  $F'(z) = f(z)$ . Pero entonces la  $f(z)$ , como derivada de la función holomorfa  $F(z)$ , será también holomorfa en  $R$ , que es lo que queríamos demostrar.

Señalemos, por último, otra propiedad notable que generaliza el segundo teorema de Cauchy:

IV - Si  $f(z)$  es holomorfa en el campo (conexo)  $A$  y  $D$  es un dominio regular contenido en  $A$ , para todo punto  $\zeta$  interior de  $D$  se tendrá

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Dem. Basta partir de la fórmula integral de Cauchy

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz$$

y derivar los dos miembros  $n$  veces respecto de  $\zeta$ , aplicando el teorema de derivación bajo el signo de integral. Tal aplicación es lícita puesto que para  $z \in \partial D$ ,  $\zeta \in D - \partial D$ , la función  $\frac{f(z)}{z - \zeta}$  es continua y derivable cuantas veces se desee respecto de  $\zeta$ , con derivadas continuas<sup>(\*)</sup>.

## 7 - DESARROLLO DE LAURENT.

Junto a los desarrollos de una función holomorfa en series uniláteras de potencias, pueden también considerarse desarrollos en series biláteras, según el si-

(\*) Este razonamiento ya fue hecho en un caso particular (véase la (7) del n° 5). El mismo puede también ser utilizado para probar directamente la existencia de todas las derivadas de  $f(z)$ .



guiente teorema:

I - Sea  $f(z)$  holomorfa en un campo (conexo) dado  $A$  y sea  $C_0$  una corona circular abierta, de centro  $z_0$ , contenida en  $A$ .

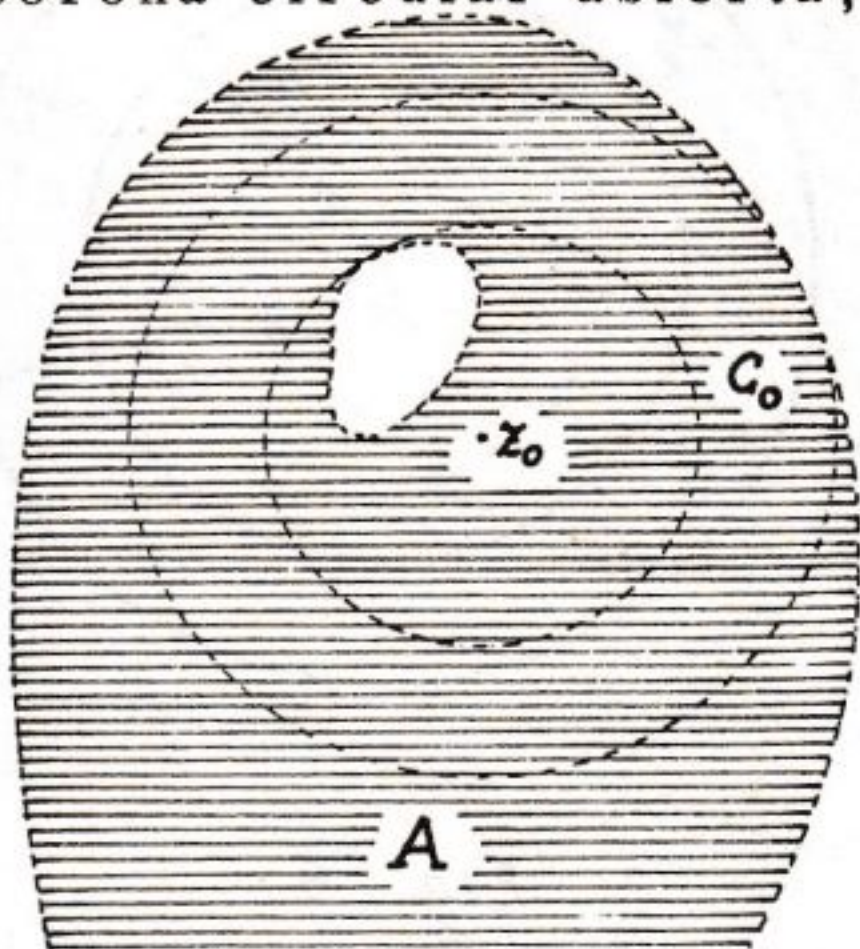


Fig. 74

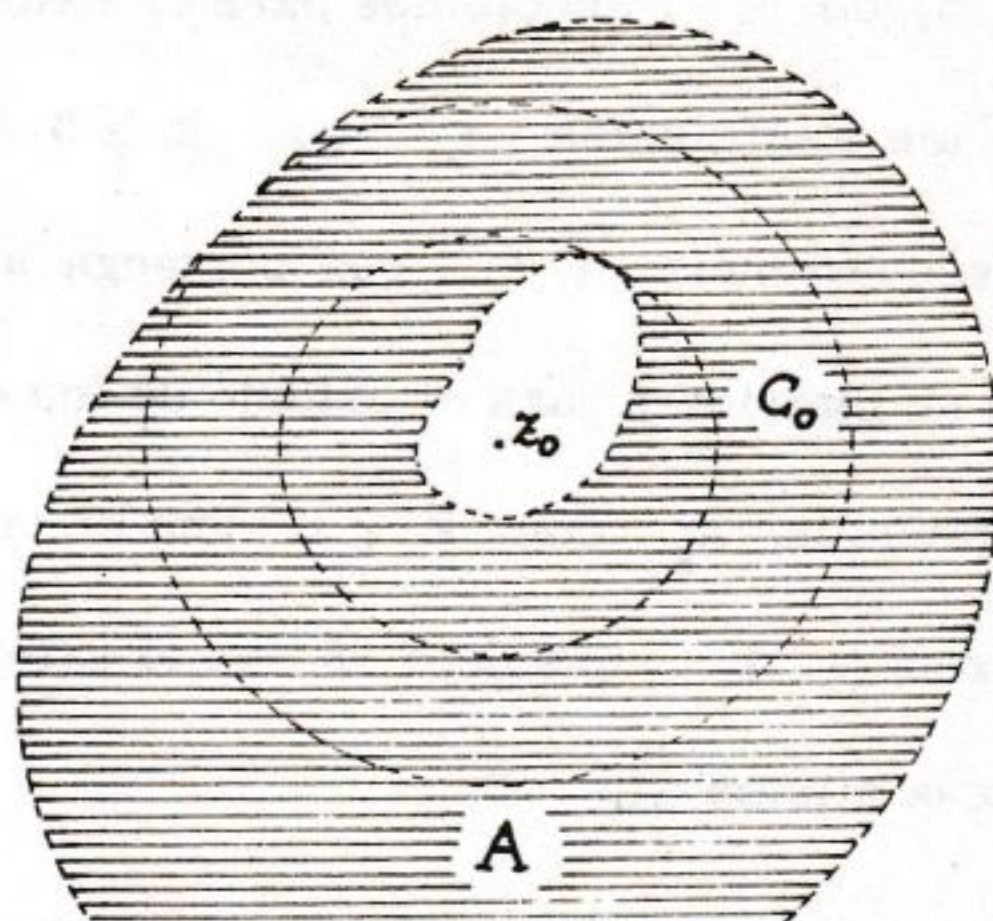


Fig. 75

En  $C_0$  la función  $f(z)$  será desarrollable en serie bilátera de potencias de  $z - z_0^{(*)}$ .

Dem. Admitiendo que sea posible en  $C_0$  un desarrollo del tipo

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (1)$$

sabemos (nº 5) que los coeficientes  $a_k$  son necesariamente proporcionados por la fórmula

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2)$$

donde  $\Gamma$  es una circunferencia, arbitrariamente elegida, de centro  $z_0$  contenida en  $C_0$ .

Queda por hacer ver que la serie (1), escrita con estos coeficientes (2), con-

-----

(\*) El punto  $z_0$  puede pertenecer o no pertenecer a  $A$  (ver fig. 74 y 75). En el caso  $z_0 \in A$  se supone que la circunferencia interna de  $C_0$  contenga o encierre también puntos no pertenecientes a  $A$ . Si no fuera así la  $f(z)$  sería holomorfa en todo el círculo abierto  $C'_0$  limitado por la circunferencia externa de  $C_0$ , siendo entonces fácil ver que el desarrollo bilátero válido en  $C_0$  se reduciría al unilátero de Taylor válido en  $C'_0$  (puesto que, por el primer teorema de Cauchy, los coeficientes  $a_k$  dados por la (2) serían nulos para  $k < 0$ ).



verge en todo punto  $\zeta$  de  $C_0$  y tiene por suma  $f(\zeta)$ .

Fijado  $\zeta$ , adoptemos para el cálculo de los coeficientes  $a_k$  con  $k \geq 0$  una circunferencia  $\Gamma''$  que contenga a  $\zeta$  en su interior y para el cálculo de los coeficientes  $a_k$  con  $k < 0$  una circunferencia  $\Gamma'$  que deje  $\zeta$  en el exterior de la misma (fig. 76).

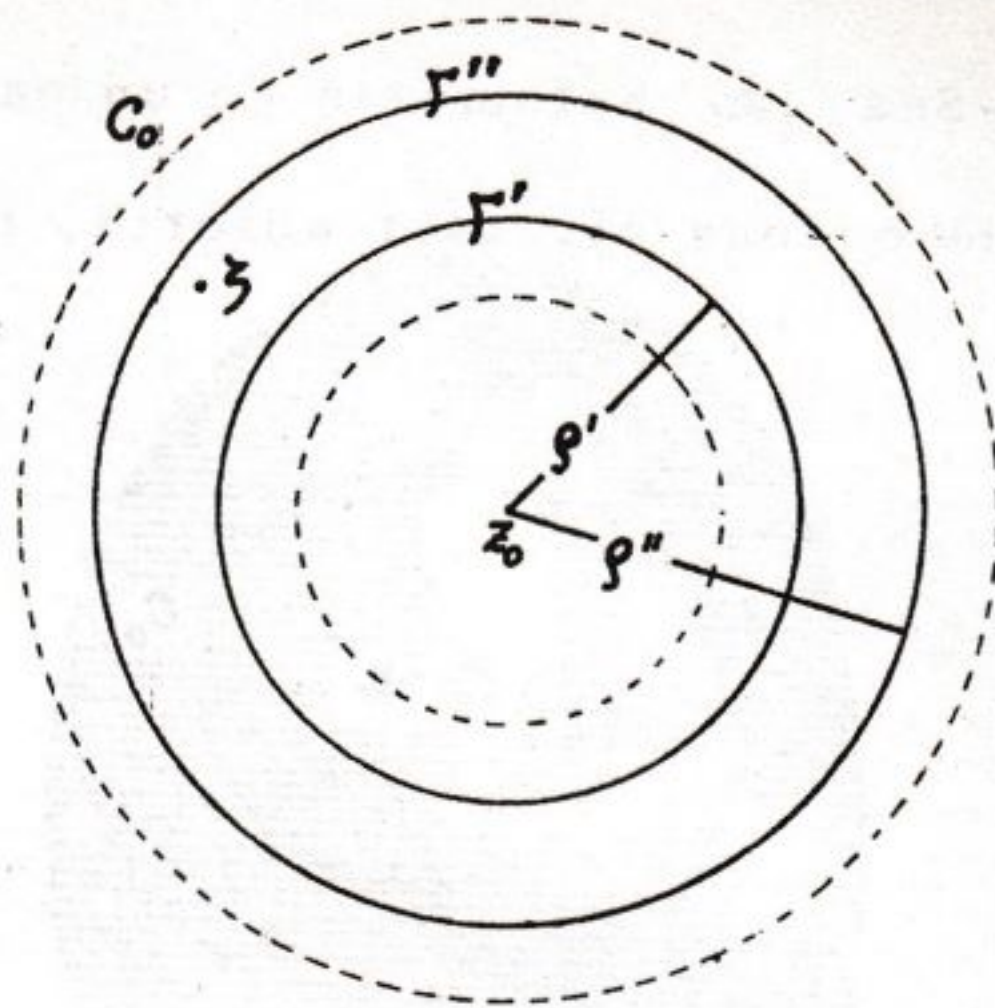


Fig. 76

Por lo tanto, la serie en consideración

puede escribirse

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} (\zeta - z_0)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz (\zeta - z_0)^k. \quad (3)$$

Razonando como en el teorema I del n<sup>o</sup> precedente se ve que ambas series aquí escritas son convergentes<sup>(\*)</sup> y que la (3) puede escribirse

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{k=-1}^{-\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma'} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \end{aligned}$$

(\*) Téngase presente que, llamando  $\rho'$ ,  $\rho''$  los radios de  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$ , se tiene  $\frac{\rho'}{|\zeta - z_0|} < 1$ ,  $\frac{|\zeta - z_0|}{\rho''} < 1$ .



Pero, por el segundo teorema de Cauchy, aplicado al dominio limitado por  $\Gamma'$  y  $\Gamma''$ , esta última expresión vale  $f(\xi)$ , que es lo que queríamos demostrar.

El desarrollo bilátero de la  $f(z)$  asegurado por este teorema, toma el nombre de desarrollo de Laurent de la  $f(z)$ , relativo a la curva circular  $C_0$ .

## 8 - SUCESSIONES Y SERIES DE FUNCIONES HOLOMORFAS; TEOREMA DE WEIERSTRASS.

Supongamos dada una sucesión

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z), \dots \quad (1)$$

de funciones holomorfas en un campo (conexo)  $A$ , que sea convergente en todo punto de  $A$ . La función límite

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z), \quad (2)$$

¿ será también holomorfa en  $A$  ? Una condición suficiente para que tal caso suceda está dada por el siguiente teorema de Weierstrass:

I - Si la sucesión (1), de funciones holomorfas en  $A$ , es uniformemente convergente en todo conjunto cerrado y acotado contenido en  $A$ , la función límite  $f(z)$  será holomorfa en  $A$ . Se tendrá, además,

$$f^{(n)}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(n)}(z), \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

siendo esta relación de límite también uniforme para todo conjunto cerrado y acotado contenido en  $A$ .

Dem. Sea  $D$  un dominio regular cualquiera contenido en  $A$ ; de la holomorfía de  $f_k(z)$  y del primer teorema de Cauchy sigue

$$\int_{\partial D} f_k(z) dz = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

Por otra parte  $\partial D$  es un conjunto cerrado y acotado contenido en  $A$ ; también en tal conjunto la (1) converge uniformemente y entonces, de la (2) sigue

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial D} f_k(z) dz. \quad (5)$$



De las (4) , (5) sigue, obviamente,  $\int_{\mathcal{F}D} f(z) dz = 0$  y de aquí, por el teorema de Morera, la  $f(z)$  es holomorfa en  $A$  .

Para probar la (3) , fijemos arbitrariamente un punto  $\zeta \in A$  e indiquemos con  $D$  un dominio regular de  $A$  , que contenga  $\zeta$  en su interior. Por el teorema IV del n° 6 y por la (2) , puede escribirse

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}D} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}D} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_k(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz . \quad (6)$$

El límite aquí indicado es (para  $\zeta$  y  $n$  fijos) uniforme cuando  $z$  varía sobre  $\mathcal{F}D$  , ya que tal es el  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z)$  por hipótesis y resulta  $\left| \frac{1}{(z - \zeta)^{n+1}} \right| < \frac{1}{\delta^{n+1}}$  , donde  $\delta$  indica la distancia desde  $\zeta$  a  $\mathcal{F}D$  . Por lo tanto de la (6) se obtiene

$$f^{(n)}(\zeta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}D} \frac{f_k(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz ,$$

o sea, por el ya citado teor. IV del n° 6 ,

$$f^{(n)}(\zeta) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(n)}(\zeta) . \quad (7)$$

que coincide con la (3) .

Probemos, por último, que para  $n$  fijo la (7) subsiste uniformemente para  $\zeta$  variable en cualquier conjunto cerrado y acotado  $E$  , contenido en  $A$  . Fijado un dominio regular  $D$  contenido en  $A$  y que contenga a  $E$  en su interior, se tendrá para  $\zeta \in E$  :

$$\left| f^{(n)}(\zeta) - f_k^{(n)}(\zeta) \right| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}D} \frac{f(z) - f_k(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi i} \frac{\max_{z \in \mathcal{F}D} |f(z) - f_k(z)|}{\sigma^{n+1}} \quad (8)$$

donde  $\sigma > 0$  indica la distancia entre los dos conjuntos cerrados  $E$  ,  $\mathcal{F}D$  y  $l$  la longitud de  $\mathcal{F}D$  . Por otra parte, como la (2) vale uniformemente para  $z \in \mathcal{F}D$  podemos decir que, dado  $\varepsilon > 0$  , existe un índice  $\nu_\varepsilon$  tal que, para  $k > \nu_\varepsilon$  resulta  $\max_{z \in \mathcal{F}D} |f(z) - f_k(z)| < \varepsilon$  ; entonces, para  $k > \nu_\varepsilon$  y para todo

$\zeta \in E$  , la (8) nos dice que

$$\left| f^{(n)}(\zeta) - f_k^{(n)}(\zeta) \right| < \frac{n!}{2\pi \sigma^{n+1}} \varepsilon ,$$



lo que traduce, precisamente, que la (7) vale uniformemente para  $\xi \in E$ , que es lo que queríamos demostrar.

El teorema de Weierstrass puede también enunciarse con referencia a una serie de funciones holomorfas. Se tiene:

II - Sea  $\sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(z)$  una serie de funciones holomorfas en un campo  $A$ , que supondremos convergente uniformemente en todo conjunto cerrado y acotado contenido en  $A$ . Bajo estas hipótesis la suma  $\varphi(z)$  de la serie es una función holomorfa en  $A$ . Además será

$$\varphi^{(n)}(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r^{(n)}(z), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

resultando la serie del segundo miembro, para cada  $n$ , también uniformemente convergente en todo conjunto cerrado y acotado contenido en  $A$ .

Basta, para la demostración, aplicar el teor. I a la sucesión  $f_k(z) = \sum_{r=1}^k \varphi_r(z)$ , de las sumas parciales de la serie dada.

## 9 - CEROS DE UNA FUNCION HOLOMORFA.

Dada una función holomorfa  $f(z)$  en un campo conexo  $A$ , queremos estudiar el conjunto  $H$  constituido por los ceros de  $f(z)$ , es decir, por los puntos  $z \in A$  en los que resulta  $f(z) = 0^{(*)}$ .

No se excluye, naturalmente, la posibilidad que tal conjunto  $H$  sea vacío, sirviendo como ejemplo de este hecho la función  $e^z$ , holomorfa en todo el plano.

Precedamos tal estudio con el siguiente teorema:

I - Sea la función  $f(z)$  holomorfa en el campo conexo  $A$ . Si

(\*) Con mayor generalidad podría estudiarse el conjunto de los puntos  $z \in A$  en los que resulta  $f(z) = c$  con  $c$  constante asignada previamente; pero este estudio equivale al de los ceros de la función  $f(z) - c$ .



en un punto  $z_0 \in A$  la  $f(z)$  es nula junto con todas sus derivadas, tal función será idénticamente nula en  $A$ .

Dem. El desarrollo local de Taylor de la  $f(z)$ , con punto inicial  $z_0$ , tiene todos los coeficientes nulos por hipótesis y de ahí que podemos afirmar que resulta  $f(z) \equiv 0$  en el máximo círculo abierto  $C_0$  que tiene centro en  $z_0$  y está contenido en  $A$ .

Una vez dicho eso, llamemos  $B$  al conjunto de todos los puntos de  $A$  donde la  $f(z)$  es nula junto con todas sus derivadas. Tal conjunto  $B$  sabemos que no es vacío, y será un campo pues acabamos de ver que si contiene a un punto  $z_0$  contiene también todos los puntos del entorno circular  $C_0$  de  $z_0$ .

El teorema quedará demostrado si hacemos ver que  $B \equiv A$ . Si  $B$  no coincidiese con  $A$  existiría en  $A$  un punto  $z_1$  no perteneciente a  $B$ . Una vez trazada en  $A$  (conexo) una poligonal de extremos  $z_0$  y  $z_1$ , sobre la misma existiría con seguridad un punto  $\xi$  de la frontera de  $B$ . Tal punto  $\xi$  no pertenecería a  $B$ , que es un campo. Por otra parte, siendo  $\xi$  un punto de  $A$  es también un punto de acumulación de  $B$ , por lo que resultaría

$$f^{(k)}(\xi) = \lim_{z \rightarrow \xi} f^{(k)}(z) [\text{sobre } A] = \lim_{z \rightarrow \xi} f^{(k)}(z) [\text{sobre } B], \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

con este último límite igual a cero, puesto que en todos los puntos de  $B$  se tiene

$$f^{(k)}(z) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \text{ Entonces debería ser } f^{(k)}(\xi) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

es decir, el punto  $\xi$  debería pertenecer a  $B$ . Esto contradice una afirmación anterior; de ahí que sea absurdo suponer que  $B$  no coincide con  $A$ , que es lo que queríamos demostrar.

Establecido este teorema, consideremos una función  $f(z)$  holomorfa en un campo conexo dado  $A$  y supongamos que no sea idénticamente nula. Si  $z_1$  es un cero de  $f(z)$ , supuesto existente, por lo menos una de las derivadas de la  $f(z)$  será, en dicho punto, distinta de cero. Al cero  $z_1$  queda, por lo tan



to, asociado el entero  $n \geq 1$  que da el orden de la primera, entre las sucesivas derivadas de  $f(z)$  que no se anulan en dicho punto; se dice, en este caso, que  $z_1$  es, para  $f(z)$ , un cero de orden  $n$ . Esto significa, entonces, que se tiene

$$f(z_1) = f'(z_1) = f''(z_1) = \dots = f^{(n-1)}(z_1) = 0, \quad f^{(n)}(z_1) \neq 0. \quad (1)$$

Demostremos el siguiente teorema:

II - Sea  $f(z)$  holomorfa y no idénticamente nula en un campo conexo dado  $A$ . El conjunto  $H$  de los ceros de  $f(z)$ , si no es vacío, está constituido exclusivamente por puntos aislados y no posee puntos de acumulación pertenecientes a  $A^{(*)}$ .

Dem. Comencemos probando que todos los puntos de  $H$  son aislados. Es necesario hacer ver que, si  $z_1$  es un cero de  $f(z)$ , existirá un entorno circular  $C$  de  $z_1$ , contenido en  $A$ , que no contiene otros ceros de  $f(z)$ . Llamando  $n$  al orden de  $z_1$ , valdrán las (1) y entonces, en el mayor círculo abierto  $C_1$  de centro  $z_1$  contenido en  $A$  valdrá para  $f(z)$  el desarrollo

$$f(z) = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n + \frac{f^{(n+1)}(z_1)}{(n+1)!} (z - z_1)^{n+1} + \dots = (z - z_1)^n \varphi(z),$$

donde se ha puesto

$$\varphi(z) = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} + (z - z_1) \frac{f^{(n+1)}(z_1)}{(n+1)!} + \dots$$

Puesto que  $\varphi(z_1) = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} \neq 0$ , existirá un entorno circular  $C$  de  $z_1$  contenido en  $C_1$ , en el que la  $\varphi(z)$  se mantiene distinta de cero. En  $C$  puede entonces escribirse  $f(z) = (z - z_1)^n \varphi(z)$ , con  $\varphi(z) \neq 0$ ,

y esto expresa que en  $C$  la  $f(z)$  puede anularse solamente en el punto  $z_1$ , o sea la tesis.

Probemos ahora que  $H$  no puede tener puntos de acumulación en  $A$ . Si exis

(\*) Esto no excluye que  $H$  acepte puntos de acumulación pertenecientes a  $\mathbb{C} \setminus A$ . Por ejem - plo la función  $\sin \frac{1}{z}$  es holomorfa en todo el plano, excluyendo el origen (donde  $\mathbb{C} \setminus A$  se reduce al único punto  $z = 0$ ); tal función se anula en los puntos  $z = \frac{1}{k\pi}$ , ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), que tienen como punto de acumulación, el punto  $z = 0$ .



tiese un punto  $\zeta \in A \cap \partial H$ , se tendría  $f(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)$  (sobre  $A$ )  $= \lim_{z \rightarrow \zeta} f(z)$  (sobre  $H$ ) lo que implicaría, dado que éste último límite es obviamente igual a cero, que  $f(\zeta) = 0$ . Entonces el punto  $\zeta$  sería un cero de la  $f(z)$  no aislado, y esto es absurdo, con lo que queda demostrada la segunda parte de la tesis.

Del teorema precedente siguen estos otros:

III - Sea  $f(z)$  holomorfa en un campo conexo dado  $A$ . Si la  $f(z)$  se anula en un conjunto de puntos de  $A$  que admite en  $A$  un punto de acumulación (al menos), tal función será idénticamente nula en  $A$ .

IV - Sean  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  dos funciones holomorfas en un campo conexo dado  $A$ . Si resulta  $f_1(z) = f_2(z)$  en un conjunto de puntos de  $A$  que admiten en  $A$  (por lo menos) un punto de acumulación, las dos funciones coinciden en todo  $A$ .

A este último teorema también puede dársele la siguiente forma:

V - Sean  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  funciones holomorfas en los campos conexos  $A_1$ ,  $A_2$  respectivamente, y sea el campo  $A_1 \cap A_2$  no vacío y conexo<sup>(\*)</sup>. Si resulta  $f_1(z) = f_2(z)$  en un conjunto de puntos de  $A_1 \cap A_2$  que tengan en éste (por lo menos) un punto de acumulación, la función  $f(z)$  definida por

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{para } z \in A_1 \\ f_2(z) & \text{para } z \in A_2 \end{cases}, \quad (2)$$

resulta holomorfa en el campo (conexo)  $A_1 \cup A_2$ <sup>(\*\*)</sup>.

Dem. Ante todo es necesario hacer ver que la (2) define en  $A_1 \cup A_2$  una función uniforme, es decir que debemos probar que resulta  $f_1(z) = f_2(z)$  en los

(\*) La intersección  $A_1 \cap A_2$  de dos campos, si no es vacía, es evidentemente un campo. Si  $A_1$  y  $A_2$  son conexos no significa, sin embargo, que lo sea su intersección, como es inmediato verificarlo sobre ejemplos.

(\*\*) La unión  $A_1 \cup A_2$  de dos campos es un campo. Si  $A_1$  y  $A_2$  son conexos y  $A_1 \cap A_2$  no es vacío, también resulta conexo el conjunto suma.



puntos de  $A_1 \cap A_2$ .

Pero esto se obtiene aplicando el teor. IV a las funciones  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  y al campo conexo  $A_1 \cap A_2$ , de lo que sigue la holomorfia de  $f(z)$  en  $A_1 \cup A_2$ , dado que a todo punto  $z$  de tal campo se le puede asociar un entorno circular  $C$  totalmente constituido o por puntos de  $A_1$  o por puntos de  $A_2$ , de modo que en  $C$  se tiene  $f(z) \equiv f_1(z)$ , o  $f(z) \equiv f_2(z)$ , que es lo que queríamos demostrar.

#### 10 - PROLONGACION DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS.

Sea  $f(z)$  una función holomorfa en campo conexo  $A$  dado. Se dice que tal función es prolongable en un campo conexo  $A'$  que contenga propia mente al  $A$ , cuando es posible definir en  $A'$  una función holomorfa  $g(z)$  que en  $A$  coincida con  $f(z)$ . Observemos que si tal prolongación es posible, lo será ciertamente de modo único. En efecto, si  $g(z)$ ,  $g_1(z)$  son holomorfas en  $A'$ , y se tiene  $g(z) = f(z)$ ,  $g_1(z) = f(z)$  en  $A$ , por el teor. IV del n° precedente debe ser  $g(z) = g_1(z)$  en  $A'$ .

Con respecto a este concepto de prolongación surge el problema de estudiar si la misma es posible y, en caso que lo sea, cuál es el procedimiento a seguir para su realización. Sobre este punto nos limitaremos a estudiar un caso muy particular demostrando el siguiente teorema:

I - Sea  $A$  un campo conexo,  $z_0$  un punto del mismo y sea la función  $f(z)$  holomorfa en  $A - z_0$ . Si la  $f(z)$  se mantiene acotada en un entorno de  $z_0$ , será prolongable en  $A$  [es decir que también  $z_0$  podrá considerarse como punto de holomorfia para  $f(z)$ ].

Dem. Llamemos  $C'_0$  al máximo círculo abierto con centro en  $z_0$  y contenido en  $A$ , y consideremos la corona circular abierta  $C_0 = C'_0 - z_0$ ; ésta resul-



ta contenida en el campo  $A - z_0$  y entonces en  $C_0$  vale para  $f(z)$  el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k . \quad (1)$$

Demostraremos que, bajo las hipótesis hechas, resulta

$$a_k = 0 \quad \text{para} \quad k < 0 . \quad (2)$$

Por hipótesis  $f(z)$  está acotada en un entorno de  $z_0$ , o sea que existen un círculo  $C$  con centro en  $z_0$ , contenido en  $A$  y una constante  $M > 0$  tal de tenerse

$$|f(z)| \leq M \quad \text{para} \quad z \in C - z_0 . \quad (3)$$

Por otra parte es

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz ,$$

donde  $\Gamma$  es una arbitraria circunferencia de centro  $z_0$ , trazada en  $C_0$ . Podemos suponer  $\Gamma \subseteq C$  y entonces resulta la validez de la (3) sobre  $\Gamma$ ; por otra parte, llamando  $\rho$  al radio de  $\Gamma$ , resulta  $|z - z_0| = \rho$  sobre  $\Gamma$  y entonces (nº 3, teor. I):

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{k+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^k} . \quad (4)$$

El primer miembro de (4) no depende de  $\rho$  y, por otra parte,  $\rho$  puede elegirse tan pequeño como se quiera y entonces, de la (4), pasando al límite para  $\rho \rightarrow 0$  y suponiendo  $k < 0$  se obtiene  $|a_k| \leq 0$ , o sea la (2).

Establecida la (2) podemos escribir ahora la (1) bajo la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k , \quad (z \in C_0) . \quad (1')$$

Pero la serie de potencias (unilátera) aquí escrita es seguramente convergente en el círculo  $C'_0$  y representa en él una función holomorfa  $\varphi(z)$ ; si consideramos ahora las dos funciones:  $f(z)$  holomorfa en  $A - z_0$  y  $\varphi(z)$  holomorfa en  $C'_0 \subseteq A$  tendremos que, mientras  $(A - z_0) \cap C'_0 = C_0$ , la (1') expresa que  $f(z) = \varphi(z)$  en  $C_0$ . De aquí, por el teor. V del nº precedente la función



$g(z)$  definida así:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{para } z \in A - z_0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k & \text{para } z \in C'_0 \end{cases}$$

resulta holomorfa en  $(A - z_0) \cup C'_0 = A$  y proporciona la prolongación de  $f(z)$  en tal campo. Puesto que  $g(z_0) = a_0$  también puede decirse que, definiendo la  $f(z)$  en el punto  $z_0$  atribuyéndole allí el valor de  $a_0$ , se obtiene una función holomorfa en todo  $A$ , que es lo que queríamos demostrar.

Con respecto a este teorema se puede todavía observar que el valor  $a_0$  en el punto  $z_0$  de la función prolongada resulta obviamente igual a  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , de modo que el mismo teorema puede enunciarse así:

II - Bajo las hipótesis del teor. I existe determinado y finito el  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$ , y la siguiente función

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{para } z \in A - z_0 \\ a_0 & \text{para } z = z_0, \end{cases} \quad (5)$$

resulta holomorfa en  $A$ .

Obviamente también puede decirse:

III - Sea  $A$  un campo conexo,  $z_0$  un punto del mismo y la función  $f(z)$  considérese holomorfa en  $A - z_0$ . Si existe determinado y finito el  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$ , entonces  $z_0$  es un punto de holomorfía para  $f(z)$ .

Demos de inmediato una notable aplicación de este teorema:

IV - Sea  $f(z)$  una función holomorfa en el campo conexo  $A$  y sea  $z_1$  un punto de  $A$ . Condición necesaria y suficiente para que  $z_1$  sea un cero de orden  $n$  para la  $f(z)$  es que exista, distinto de cero, el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z)}{(z - z_1)^n}. \quad (6)$$



Dem. La condición es necesaria. Se ha visto en la demostración del teor. II del n<sup>o</sup> precedente que, en un oportuno entorno circular de  $z_1$ , puede ponerse  $f(z) = (z - z_1)^n \varphi(z)$  con  $\varphi(z)$  holomorfa y  $\varphi(z_1) \neq 0$ , de lo que sigue  $\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z)}{(z - z_1)^n} = \varphi(z_1) \neq 0$ .

La condición es suficiente. La función  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)^n}$  es holomorfa en  $A - z_1$  y como por hipótesis existe el  $\lim_{z \rightarrow z_1} \varphi(z) = l \neq 0$ , el teor. precedente nos asegura que  $\varphi(z)$  resulta holomorfa también en el punto  $z_1$  cuando se imponga  $\varphi(z_1) = l$ . Entonces, de la  $f(z) = (z - z_1)^n \varphi(z)$  es fácil extraer, con sucesivas derivaciones, la conclusión de que valen las (1) del n<sup>o</sup> precedente.

## 11 - PUNTOS SINGULARES AISLADOS Y SU CLASIFICACION.

Sea  $A$  un campo conexo,  $z_0$  un punto del mismo y sea  $f(z)$  una función holomorfa en  $A - z_0$ . Si la  $f(z)$  no es prolongable en  $A$  diremos que  $z_0$  es un punto singular aislado de  $f(z)$ .

Para estudiar tal punto llamemos  $C'_0$  al máximo círculo abierto, con centro en  $z_0$ , contenido en  $A$  y consideremos después la corona circular abierta  $C_0 = C'_0 - z_0$ ; ésta resulta contenida en el campo  $A - z_0$  y de ahí que vale el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \text{para } z \in C_0 \equiv C'_0 - z_0. \quad (1)$$

Este desarrollo (que será denominado desarrollo de Laurent relativo al punto singular aislado  $z_0$ ) es ciertamente bilátero (o sea que al menos para un  $k < 0$  resulta  $a_k \neq 0$ ) puesto que, de no ser así, se ha visto en la demostración del teor. I del n<sup>o</sup> precedente que la  $f(z)$  sería prolongable en  $A$  y esto estaría contra las hipótesis hechas.

Viceversa, si el desarrollo (1) es bilátero la  $f(z)$  no es prolongable en  $A$



ya que, de serlo, llamando  $g(z)$  a la función prolongada se tendría para  $k < 0$  y con el significado de costumbre para  $\Gamma$  :

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = 0 ,$$

en virtud del primer teorema de Cauchy; pero entonces el desarrollo (1) sería unilátero, contradiciendo la hipótesis.

Podemos entonces asegurar que

I - Condición necesaria y suficiente para que  $z_0$  sea un punto singular aislado de  $f(z)$  es que, en el desarrollo de Laurent (1) relativo a tal punto, por lo menos uno de los coeficientes  $a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$  sea distinto de cero.

Otro teorema a tener presente es el siguiente:

II - Condición necesaria y suficiente para que  $z_0$  sea un punto singular aislado de  $f(z)$  es que la  $f(z)$  no se mantenga acotada en ningún entorno de  $z_0$ .

Dem. La necesidad de la demostración sigue inmediatamente del teor. I del n° precedente. La condición es también suficiente puesto que si  $f(z)$  no se mantiene acotada en los entornos de  $z_0$ , no puede existir el  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , de lo que sigue que la  $f(z)$  no es prolongable en  $A$ .

Por ejemplo, el teor. I nos dice que la función  $e^{\frac{1}{z}}$  (holomorfa en todo el plano con exclusión del punto  $z = 0$ ) tiene en  $z = 0$  un punto singular aislado. Basta observar que, en base a la conocida serie exponencial, se puede escribir la fórmula

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots, \text{ (para } z \neq 0) \quad (2)$$

la que proporciona sin más el desarrollo de Laurent de  $e^{\frac{1}{z}}$  relativo al punto  $z = 0$  (con  $a_{-1} = 1$ ,  $a_{-2} = \frac{1}{2!}$ ,  $a_{-3} = \frac{1}{3!}$ , .....)(\*) .

(\*) En este ejemplo y en los sucesivos de este n° 11, los desarrollos de Laurent serán obteni-



Análogamente para las funciones  $\frac{1}{e^{z^n}}$ ,  $\operatorname{sen} \frac{1}{z^n}$ ,  $\cos \frac{1}{z^n}$ , con  $n$  entero y positivo.

El teor. II nos dice inmediatamente que la función  $\frac{1}{z^n}$  tiene el punto singular aislado  $z = 0$ ; basta observar que  $\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{1}{z^n} \right| = +\infty$ . Esto queda confirmado por el hecho que para esta función el desarrollo de Laurent, relativo al punto  $z = 0$ , se reduce obviamente al único término  $\frac{1}{z^n}$  (o sea que resulta  $a_{-n} = 1$ ).

Volviendo al caso general es obvio que, en base al teor. I, dos casos son posibles: 1<sup>o</sup>) entre los coeficientes  $a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$  del desarrollo de Laurent relativo al punto  $z_0$  existe un número finito distintos de cero; 2<sup>o</sup>) entre tales coeficientes existen infinitos que son distintos de cero.

En el 1<sup>er</sup> caso, llamando  $a_{-n}$  (con  $n \geq 1$ ) al último de los coeficientes  $a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$  que es distinto de cero, el desarrollo (1) puede ser escrito en la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (3)$$

$(a_{-n} \neq 0; z \in C'_0 - z_0)^{(*)}$

y el punto  $z_0$  es denominado una singularidad polar de orden  $n$  (o, simplemente, un polo de orden  $n$ ) de la  $f(z)$ .

En el 2<sup>o</sup> caso, el desarrollo (1) se escribe

$$f(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_{-h}}{(z - z_0)^h} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (z \in C'_0 - z_0), \quad (4)$$

con la condición que sea  $a_{-h} \neq 0$  para infinitos valores de  $h$  (o sea

dos aprovechando desarrollos ya conocidos (series geométricas, exponenciales, etc.); no haremos uso, entonces, de las fórmulas integrales que proporcionan los coeficientes  $a_k$ .

(\*) La única condición es que sea  $a_{-n} \neq 0$ ; los otros coeficientes  $a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-(n-1)}, a_0, a_1, \dots$  pueden, todos o algunos, ser nulos.



que la  $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_{-h}}{(z - z_0)^h}$  sea una serie efectiva), y el punto  $z_0$  se denomina una singularidad esencial de la  $f(z)$ .

Por ejemplo, de la (2) sigue, obviamente, que el punto  $z = 0$  es una singularidad esencial para la función  $e^{\frac{1}{z}}$ . La función  $\frac{1}{z^n}$  tiene, por el contrario, en  $z = 0$ , un polo de orden  $n$ .

Como otro ejemplo citemos la función  $\frac{1}{z^2 - 1}$ , holomorfa en todo el plano, privado de los puntos  $1$  y  $-1$ ; ella tiene, en cada uno de los dos puntos citados un polo de 1<sup>er</sup> orden. En efecto, refiriéndonos al punto  $1$ , el desarrollo de Laurent relativo al mismo puede obtenerse inmediatamente escribiendo

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2(z - 1)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z - 1}{2}}$$

y observando que, con la hipótesis  $|z - 1| < 2$  el segundo factor es la suma de una serie geométrica de razón  $-\frac{z - 1}{2}$ . Para  $|z - 1| < 2$ ,  $z \neq 1$  vale entonces el desarrollo

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{2^2} + \frac{z - 1}{2^3} - \frac{(z - 1)^2}{2^4} + \dots,$$

que es del tipo (3) con  $n = 1$ ,  $a_{-1} = \frac{1}{2}$ .

Notemos, por último, que las fórmulas (3), (4) pueden escribirse bajo la forma

$$f(z) = G\left(\frac{1}{z - z_0}\right) + P(z - z_0), \quad (z \in C_0 - z_0), \quad (5)$$

donde  $G\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$  es una serie de potencias de  $\frac{1}{z - z_0}$  (reducida a un polinomio de grado  $n$  si  $z_0$  es un polo de orden  $n$ ) y  $P$  es una serie de potencias de  $z - z_0$ . Teniendo en cuenta lo que se dijo en el n<sup>o</sup> 2, podemos agregar que, poniendo  $\frac{1}{z - z_0} = w$ , la  $G(w)$  tiene radio de convergencia infinito, mientras la  $P(z - z_0)$  tiene radio de convergencia por lo menos igual al radio de  $C_0$  (es decir a la distancia del punto  $z_0$  a la  $\mathcal{F}A$ ).

La  $G\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$  proporciona lo que se denomina la parte singular (o simplemente la característica) del desarrollo de Laurent relativo al punto



singular aislado  $z_0$  ; la  $P(z - z_0)$  se llama, en cambio, la parte regular de tal desarrollo.

## 12 - SINGULARIDADES POLARES.

Demos algunos teoremas relativos a las singularidades polares. En tales teoremas queda sobreentendido que se considera un campo conexo  $A$  , un punto del mismo  $z_0$  y una función holomorfa en  $A - z_0$ ; será además indicado con  $C'_0$  al máximo círculo abierto que tiene centro en  $z_0$  y está contenido en  $A$  .

I - Condición necesaria y suficiente para que  $z_0$  sea un polo de orden  $n$  es que exista, finito y distinto de cero el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] . \quad (1)$$

Dem. La condición es necesaria. Si  $z_0$  es para  $f(z)$  un polo de orden  $n$  , vale la (3) del  $n^\circ$  precedente, de la que sigue:

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + \dots + a_{-n} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{n+k} , \quad (a_{-n} \neq 0 , z \in C'_0 - z_0) .$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que la serie de potencias aquí indicada converge uniformemente en todo círculo cerrado de centro  $z_0$  contenido en  $C'_0$  (lo que permite efectuar, término por término, el pasaje al límite para  $z \rightarrow z_0$  ), se deduce

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = a_{-n} \neq 0 .$$

La condición es suficiente. Indicando con  $l \neq 0$  al límite (1) y considerando la función  $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$  , es obvio que  $g(z)$  es holomorfa en  $A - z_0$  ; pero, como existe finito el límite  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = l$  , tal función resultará también holomorfa en el punto  $z_0$  , cuando se imponga  $g(z_0) = l$  ( $n^\circ 10$ , teor. III) . En el círculo  $C'_0$  la  $g(z)$  es entonces desarrollable en serie de Taylor con punto inicial  $z_0$  :



$$g(z) = 1 + g'(z_0)(z - z_0) + \dots + \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} + \\ + \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots, \quad (z \in C'_0);$$

sigue, entonces

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} = \frac{1}{(z - z_0)^n} + \frac{g'(z_0)}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots \\ \dots + \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} \frac{1}{(z - z_0)} + \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} + \dots, \quad (z \in C'_0 - z_0),$$

y, como  $1 \neq 0$ , esta fórmula muestra que para  $f(z)$  el punto  $z_0$  es un polo de orden  $n$ , que es lo que queríamos demostrar.

II - Condición necesaria y suficiente para que  $z_0$  sea un polo para la función  $f(z)$  es que resulte

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty. \quad (2)$$

Dem. La condición es necesaria. Si  $z_0$  es un polo, llamando  $n$  al orden del mismo, se tiene por el teor. precedente  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = 1 \neq 0$ , y entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} (|z - z_0|^{-n} |f(z)| \frac{1}{|z - z_0|^{-n}}) = +\infty.$$

La condición es suficiente. Si vale la (2) existe un entorno circular  $C$  de  $z_0$  tal de tenerse  $f(z) \neq 0$  en  $C - z_0$ . Por otra parte la (2) implica

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$  y, por lo tanto, ( $n^\circ 10$ , teor. III) la  $\frac{1}{f(z)}$  resulta holomorfa en  $C$  cuando se le imponga que sea nula en  $z_0$ . La  $\frac{1}{f(z)}$  tiene así un

cero en el punto  $z_0$ , con cierto orden  $n$ , de modo que ( $n^\circ 10$ , teor. IV) existe

finito y distinto de cero el  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{f(z)}}{(z - z_0)^n} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(z - z_0)^n f(z)} = \lambda$ . Re-

sulta así que también existe finito y distinto de cero el  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = \frac{1}{\lambda}$ ,

de donde (teor. I) el punto  $z_0$  es para  $f(z)$  un polo de orden  $n$ , que es lo

que queríamos demostrar.

Nótese que la última parte del razonamiento recién hecho prueba que si  $\frac{1}{f(z)}$



tiene un cero en  $z_0$  de orden  $n$ ,  $f(z)$  tendrá en el mismo punto un polo de orden  $n$ ; pero vale también el viceversa puesto que de  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = 1 \neq 0$  se deduce la existencia de un entorno circular  $C$  de  $z_0$  tal que en  $C - z_0$  resulte  $f(z) \neq 0$  y, por ende, la holomorfía de  $\frac{1}{f(z)}$  en  $C$ , y como otra consecuencia se tendrá  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(z - z_0)^n f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{f(z)}}{(z - z_0)^n} = \frac{1}{1} \neq 0$  y, de aquí, ( $n^\circ 10$ , teor. IV) el punto  $z_0$  es efectivamente un cero de orden  $n$  para  $\frac{1}{f(z)}$ .

Podemos entonces enunciar:

III - Condición necesaria y suficiente para que el punto  $z_0$  sea para  $f(z)$  un polo de orden  $n$  es que el mismo punto sea un cero de orden  $n$  para la función recíproca  $\frac{1}{f(z)}$ . (\*)

Mostremos una simple aplicación de los teor. precedentes. La función  $\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$  es holomorfa en el campo que se obtiene a partir del plano privándolo de los puntos  $z_k = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Para uno cualquiera de estos puntos se tiene

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_k} [(z - z_k) \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}] = \\ & = \operatorname{sen} z_k \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{\cos z_k + (-\operatorname{sen} z_k)(z - z_k) + \frac{(-\cos z_k)}{2!} (z - z_k)^2 + \frac{\operatorname{sen} z_k}{3!} (z - z_k)^3 + \dots} = \\ & = \operatorname{sen} z_k \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{(-\operatorname{sen} z_k)(z - z_k) + \frac{\operatorname{sen} z_k}{3!} (z - z_k)^3 + \dots} = \\ & = \operatorname{sen} z_k \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{-\operatorname{sen} z_k + \frac{\operatorname{sen} z_k}{3!} (z - z_k)^2 + \dots} = -1, \end{aligned}$$

(\*) Entonces las singularidades polares desaparecen al pasar de la  $f(z)$  a la  $\frac{1}{f(z)}$ . Esta es una propiedad característica de las singularidades polares. En efecto: si  $z_0$  es un punto singular aislado de  $f(z)$  y no lo es más para la función  $\frac{1}{f(z)}$ , debe existir, determinado y finito el  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \lambda$ . No puede ser  $\lambda \neq 0$  pues, en ese caso, existiría también determinado y finito el  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \frac{1}{\lambda}$  y el punto  $z_0$  no sería singular para  $f(z)$ . Entonces, es  $\lambda = 0$ , de lo que sigue la (2) y, sucesivamente, que  $z_0$  es un polo de  $f(z)$ .



y entonces, por el teor. I, los puntos  $z_k$  son todos polos de 1<sup>er</sup> orden para la función  $\operatorname{tg} z$ , resultando además (teor. III) ceros de 1<sup>er</sup> orden para la función  $\frac{1}{\operatorname{tg} z} = \operatorname{cotg} z$ .

### 13 - SINGULARIDADES ESENCIALES.

Como en el n<sup>o</sup> precedente supongamos que  $A$  sea un campo conexo,  $z_0$  un punto de  $A$  y  $f(z)$  una función holomorfa en  $A - z_0$ ; supongamos, además, que  $z_0$  sea un punto singular esencial para  $f(z)$ . El estudio del comportamiento de  $f(z)$  en las proximidades de  $z_0$  requiere desarrollos más profundos que los ya hechos y de un carácter elevado que no expondremos en este volumen; nos limitaremos a enunciar, sin dar la demostración, el teorema que resume tal estudio, es decir, el célebre teorema de Picard:

I - Si  $z_0$  es un punto singular esencial para la función  $f(z)$ , fijados arbitrariamente un número  $w$  (excluido a lo sumo un valor excepcional  $\lambda$ ) y un entorno circular  $C$  del punto  $z_0$ , existen en  $C$  infinitos puntos  $z$  en los que la función  $f(z)$  asume el valor  $w$ .

Este teorema pone en evidencia el modo extremadamente complicado con que la  $f(z)$  se comporta en las vecindades de  $z_0$ : en todo entorno de  $z_0$ , por pequeño que sea, la  $f(z)$  asume todos los valores posibles, excluido a lo sumo uno particular.

Ilustremos el teorema de Picard con un ejemplo, considerando la función  $e^{\frac{1}{z}}$  que, como ya sabemos (n<sup>o</sup> 11), tiene una singularidad esencial en  $z = 0$ .

Esta función no asume jamás el valor cero (existe, entonces, en este caso el valor excepcional mencionado en el teorema de Picard y se tiene  $\lambda = 0$ ). Para estudiar el comportamiento de la función en las vecindades del punto  $z = 0$ , ponga-



mos  $\frac{1}{z} = \zeta = \xi + i\eta$ , y observemos que la función  $e^\zeta$ , siendo periódica con período  $2\pi i$ , asume todos los valores posibles, excluido el cero, en toda faja  $S_k$  del plano  $(\xi, \eta)$  del tipo

$$2k\pi \leq \eta \leq 2(k+1)\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

Para ver cuáles son las figuras que en el plano  $(x, y)$  de la variable  $z$  corresponden a tal faja, observemos que de la

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

sigue

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Resulta así que a la recta  $\eta = 2k\pi$  corresponde la curva de ecuación  $2k\pi(x^2 + y^2) + y = 0$ , vale decir, una recta (eje  $x$ ) si  $k = 0$ , o una circunferencia tangente en el origen al eje  $x$ , con centro en el punto  $(0, -\frac{1}{4k\pi})$ , si  $k \neq 0$ . Por lo tanto, a una faja  $S_k$  corresponde en el plano  $(x, y)$  el dominio  $S'_k$  comprendido entre dos consecutivas de tales curvas (véanse fig. 77 y 78). Se

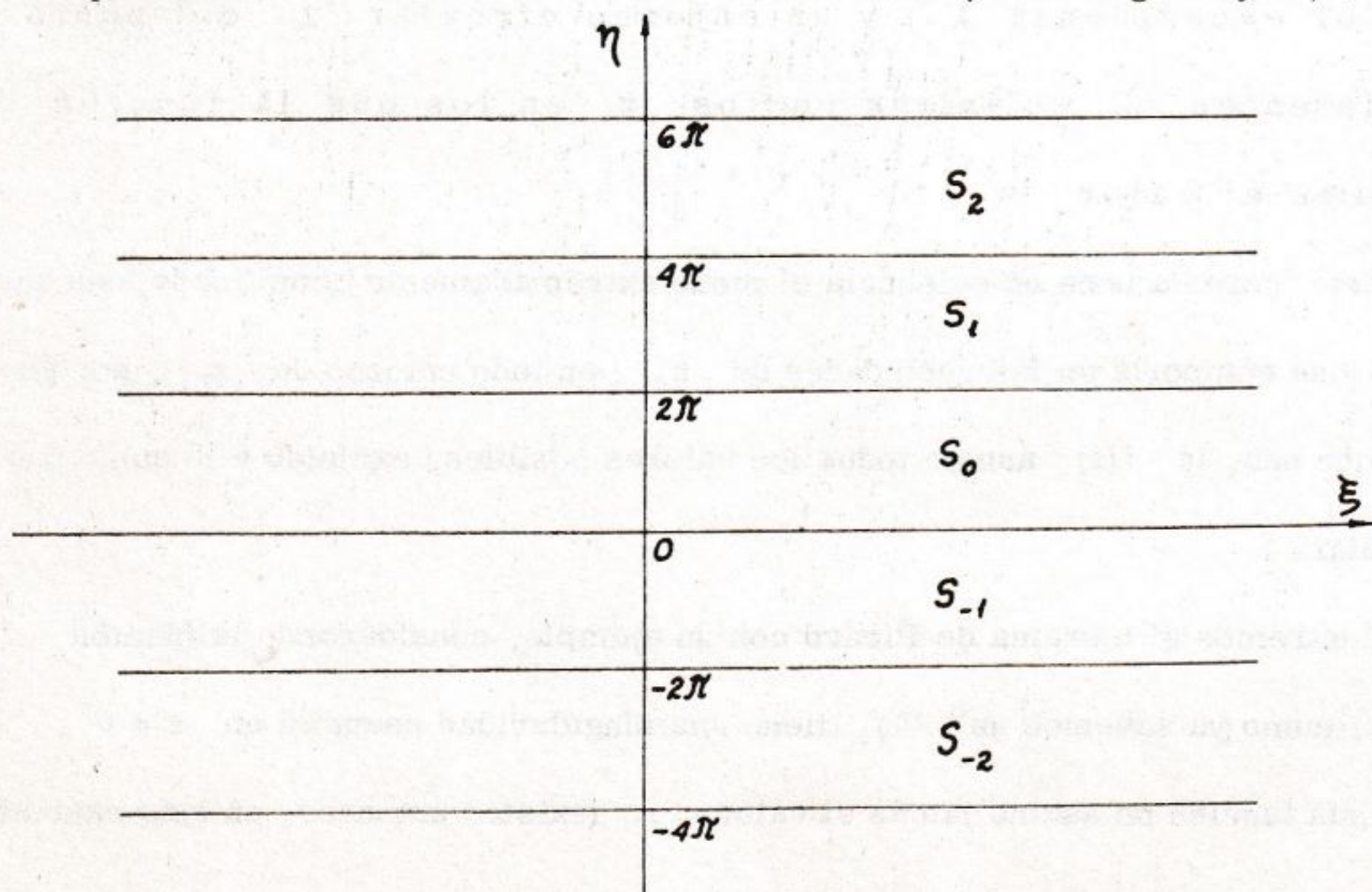


Fig. 77



ye inmediatamente que, cuando crece  $|k|$ , estos dominios  $S'_k$  resultan siempre más pequeños y se acumulan alrededor del origen. Como la función  $e^{\frac{1}{z}}$  asume todos los valores posibles (excluido el cero) en cada una de las fajas  $S_k$ , la  $e^{\frac{1}{z}}$  asumirá todos los valores posibles (cero excluido) en cada uno de los citados dominios  $S'_k$ . Se ve, por lo tanto, que en un entorno arbitrariamente pequeño del punto  $z = 0$ , la  $e^{\frac{1}{z}}$  asume todos los posibles valores (reales o complejos), excluido el valor excepcional cero. Se ha verificado perfectamente el teorema de Picard.

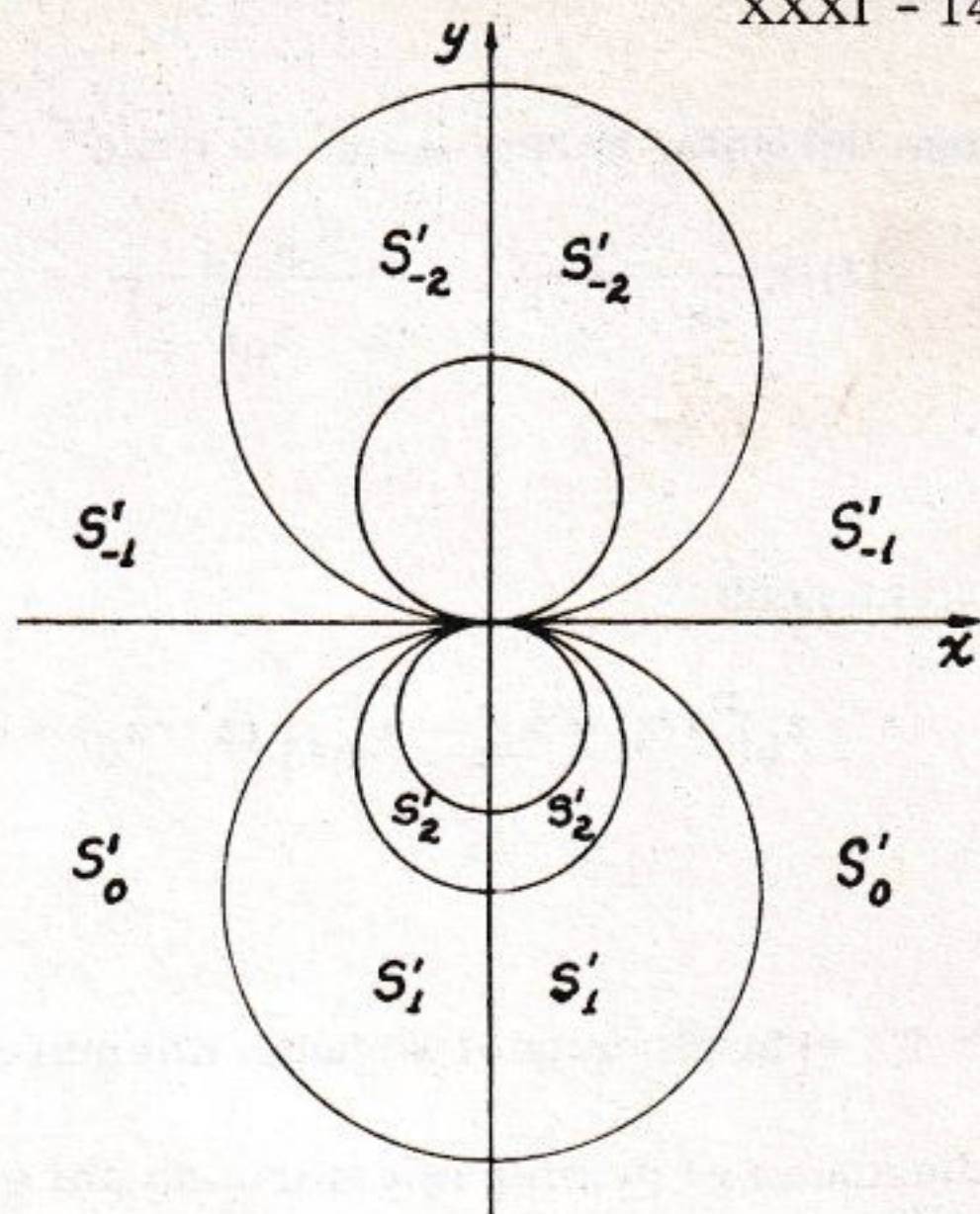


Fig. 78

#### 14 - RESIDUOS; FUNCIONES CON PUNTOS SINGULARES AISLADOS.

Sea  $A$  un campo conexo,  $z_0$  un punto de  $A$  y la función  $f(z)$ , holomorfa en  $A - z_0$ , tal de tener  $z_0$  como punto singular aislado (polar o esencial). Considerado el desarrollo de Laurent relativo al punto  $z_0$ , fijemos nuestra atención sobre el coeficiente  $a_{-1}$  (eventualmente nulo) de tal desarrollo. Tal coeficiente será denominado el residuo de la función  $f(z)$  en el punto singular aislado  $z_0$  que, por una conocida fórmula [la (4) del n° 5\_7] viene dado por

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz \quad (1)$$

donde  $\Gamma$  indica cualquier circunferencia de centro  $z_0$  contenida en el máximo círculo  $C'_0$ , de centro  $z_0$ , contenido en  $A$ .

Si el punto  $z_0$  es un polo para  $f(z)$ , el cálculo del residuo  $a_{-1}$  puede efectuarse sin aplicar la fórmula integral (1). En efecto, llamando  $n$  al or-



den del polo, sabemos que se tiene

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k ,$$

$$(a_{-n} \neq 0 , z \in C'_0 - z_0)$$

y entonces,

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1} (z - z_0) + \dots + a_{-1} (z - z_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k ,$$

$$(z \in C'_0) .$$

En esta fórmula el segundo miembro es el desarrollo de Taylor de la función indicada en el primer miembro; de ahí que

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \right\}_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)}}{(n-1)!} . \quad (2)$$

En particular, si se trata de un polo de 1<sup>er</sup> orden resulta

$$a_{-1} = [(z - z_0) f(z)]_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)] .$$

Antes de dar el denominado teorema de los residuos, que es de gran importancia aplicativa, nos conviene introducir otro concepto. Se dirá que  $f(z)$  es una función de puntos singulares aislados en un campo conexo  $A$  dado cuando exista en  $A$  un conjunto (no vacío)  $N$  totalmente formado por puntos aislados, carente de puntos de acumulación pertenecientes a  $A$ , tal que  $f(z)$  sea holomorfa en el campo  $A - N^{(*)}$  y que todo punto de  $N$  sea un punto singular aislado de  $f(z)^{(**)}$ .

Por ejemplo, la función  $\operatorname{tg} z$  (ver n<sup>o</sup> 12) es de puntos singulares aislados en

-----

(\*) Que ciertamente es conexo, como no es difícil persuadirse.

(\*\*) Todo punto  $z_0 \in N$  pertenece a un campo  $A_0$  tal que  $f(z)$  resulta holomorfa en  $A_0 - z_0$ ; por lo tanto  $z_0$  se encuentra en las condiciones mencionadas al comienzo del N<sup>o</sup> 11 y tiene sentido pedir que tal punto sea para  $f(z)$  un punto singular aislado.



todo el plano.

Tras esta definición, he aquí el anunciado teorema de los residuos:

I - Sea  $f(z)$  una función de puntos singulares aislados en un campo conexo dado  $A$ . Sea  $D$  un dominio regular contenido en  $A$  tal que su frontera  $\mathcal{F}D$  no contenga ningún punto singular de  $f(z)$ . Si designamos con  $z_1, z_2, \dots, z_p$  a los puntos singulares que son interiores al  $D^{(*)}$  y con  $R(z_1), R(z_2), \dots, R(z_p)$  a los residuos de  $f(z)$  en tales puntos, se tendrá

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} f(z) dz = R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p). \quad (4)$$

Dem. Con centro en los puntos  $z_1, z_2, \dots, z_p$  tracemos  $p$  circunferencias  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$  interiores a  $D$  y exteriores una de la otra. Sea  $D'$  el dominio (regular) obtenido de  $D$  privándolo de los puntos interiores de tales circunferencias; tal dominio está evidentemente contenido en un campo en el que  $f(z)$  es holomorfa y de ahí que, por el primer teorema de Cauchy, se tendrá

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} f(z) dz = 0,$$

o sea,

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{+\mathcal{F}D} f(z) dz + \sum_{k=1}^p \int_{-\Gamma_k} f(z) dz \right) = 0.$$

Sigue

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} f(z) dz = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma_k} f(z) dz$$

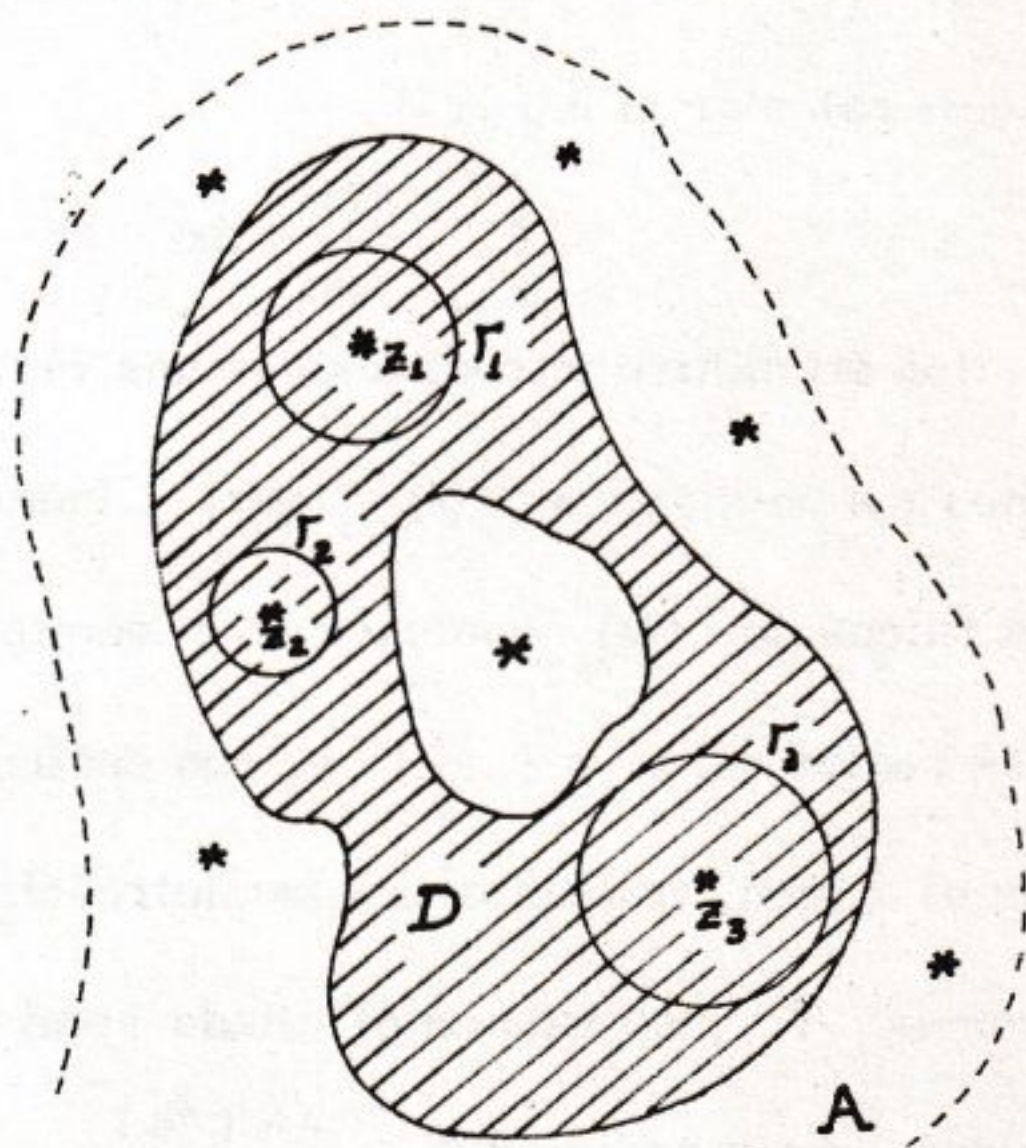


Fig. 79

(\*) El número de tales puntos es necesariamente finito (eventualmente nulo). En efecto; de ser infinitos, por el teor. de Bolzano - Weierstrass su conjunto admitiría en  $D$  (y como consecuencia en  $A$ ) un punto de acumulación, contradiciendo la hipótesis. Si  $p = 0$ , la integral (4) resulta nula de conformidad al primer teorema de Cauchy. La (4) comprende también al segundo teorema de Cauchy, como es fácil verificar.



y, puesto que en virtud de la (1) la integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} f(z) dz$  proporciona el residuo de la  $f(z)$  en el punto  $z_k$ , se obtiene la (4), que es lo que queríamos demostrar.

Este teorema de los residuos tiene muchas aplicaciones en el cálculo de las integrales definidas, como se verá mejor en las ejercitaciones. Deseamos sin embargo ilustrar desde ya su alcance con un ejemplo.

Sea  $f(x)$  un polinomio de grado  $n \geq 2$  de la variable real  $x$ , carente de raíces reales (si tiene sus coeficientes reales esto exige que su grado sea par); sea además  $g(x)$  otro polinomio de grado no superior a  $n-2$ , primo con  $f(x)$ .

La función racional  $\frac{g(x)}{f(x)}$  es sumable en  $[-\infty, +\infty]$  puesto que es continua y, para  $x \rightarrow \infty$ , resulta infinitésima, por lo menos, de 2º orden: deseamos calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{f(x)} dx. \quad (5)$$

Con tal motivo introduzcamos una variable compleja  $z = x + iy$  y consideremos los polinomios  $f(z)$ ,  $g(z)$ . Indiquemos con  $z_1, z_2, \dots, z_p$ , ( $p \leq n$ ) la raíces de  $f(z)$  que caen en el semiplano  $y > 0$  (si  $f(x)$  tiene sus coeficientes reales será  $p \leq \frac{n}{2}$ ) y, con centro

en el origen, tracemos una semicircunferencia  $\Gamma$ , situada en el citado semiplano, con un radio  $\rho > \max_{k=1, 2, \dots, p} |z_k|$ .

La función racional  $\frac{f(z)}{g(z)}$  es de puntos singulares aislados en todo el plano, y el semicírculo  $C$  contiene los puntos singulares  $z_1, z_2, \dots, z_p$  en su in-

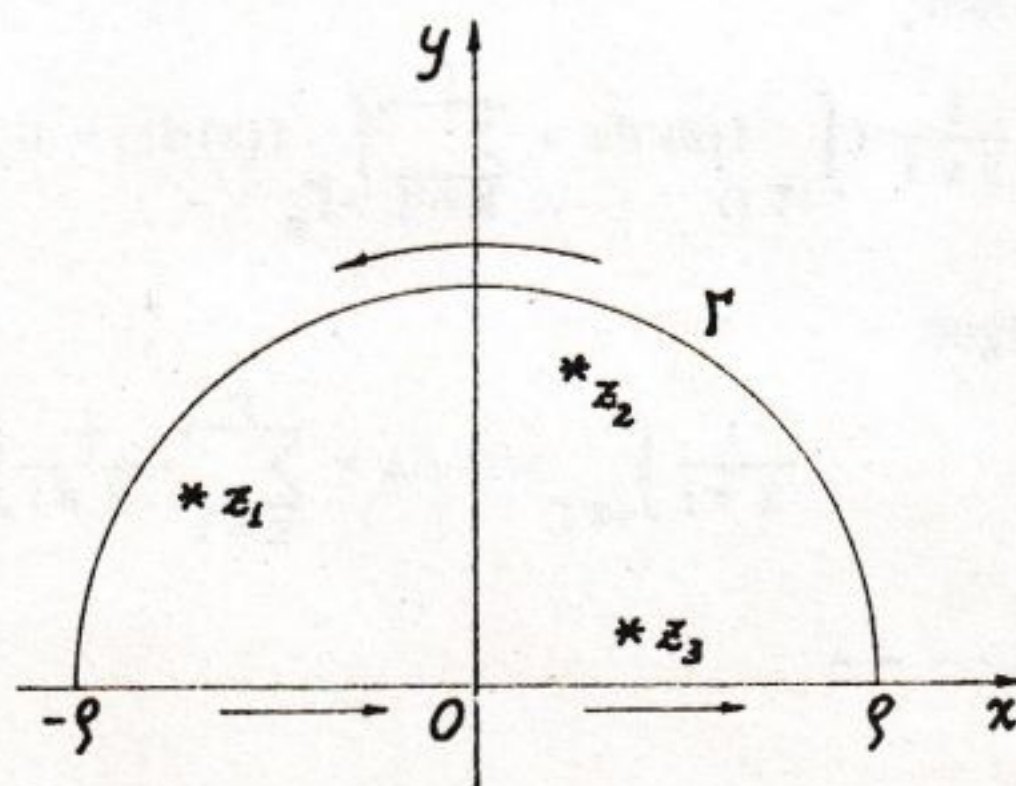


Fig. 80



terior<sup>(\*)</sup>, mientras que ningún punto singular está sobre  $\gamma_C$ . Podemos entonces aplicar el teorema de los residuos y escribir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_C} \frac{g(z)}{f(z)} dz = R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p), \quad (6)$$

donde  $R(z_1), R(z_2), \dots, R(z_p)$  son los residuos de la función a integrar, en los puntos  $z_1, z_2, \dots, z_p$ . La (6) equivale obviamente a la

$$\int_{-\rho}^{\rho} \frac{g(x)}{f(x)} dx + \int_{+\gamma} \frac{g(z)}{f(z)} dz = 2\pi i [R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p)].$$

Realicemos ahora un pasaje al límite para  $\rho \rightarrow +\infty$ . Observemos que el 2º miembro no depende de  $\rho$  y que el límite de la 1ª integral es obviamente la integral (5), por lo que se encuentra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{f(x)} dx + \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma} \frac{g(z)}{f(z)} dz = 2\pi i [R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p)]. \quad (7)$$

Para calcular el límite aquí indicado observemos que, poniendo

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{b_0 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots + b_{n-2}}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n},$$

se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{+\gamma} \frac{g(z)}{f(z)} dz &= \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{b_0(\rho e^{i\theta})^{n-2} + b_1(\rho e^{i\theta})^{n-3} + \dots + b_{n-2}}{a_0(\rho e^{i\theta})^n + a_1(\rho e^{i\theta})^{n-1} + \dots + a_n} \rho e^{i\theta} i d\theta = \\ &= i \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{b_0(\rho e^{i\theta})^{-1} + b_1(\rho e^{i\theta})^{-2} + \dots + b_{n-2}(\rho e^{i\theta})^{-(n-1)}}{a_0 + a_1(\rho e^{i\theta})^{-1} + \dots + a_n(\rho e^{i\theta})^{-n}} d\theta = 0. \end{aligned}$$

Entonces, de la (7), sigue

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{f(x)} dx = 2\pi i [R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p)] \quad (8)$$

donde, repetimos,  $R(z_1), \dots, R(z_p)$  son los residuos de  $\frac{g(z)}{f(z)}$  en los puntos singulares (polos)  $z_1, z_2, \dots, z_p$  que caen por encima del eje  $x$ .

Por ejemplo la (8) proporciona

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(\*) Tales puntos son polos (véase el nº sucesivo).



puesto que los ceros de  $z^4 + 1$  que caen por encima del eje  $x$  son  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ , tales puntos son polos de 1<sup>er</sup> orden para la función  $\frac{1}{z^4 + 1}$  y,

usando la (3) se encuentra fácilmente

$$R(z_1) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1+i}{4\sqrt{2}},$$

$$R(z_2) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{4\sqrt{2}}.$$

## 15 - FUNCIONES ENTERAS Y FUNCIONES MEROMORFAS.

En este n<sup>o</sup> deseamos indicar dos locuciones que son muy usadas en la teoría de las funciones holomorfas.

Se dice que una función  $f(z)$  es una función entera cuando es holomorfa en todo el plano. Para definir una función entera basta partir de una serie de potencias que tenga radio infinito; viceversa, el teor. I del n<sup>o</sup> 6 nos dice que, dada una función entera  $f(z)$ , su serie de Taylor, con un punto inicial arbitrario  $z_0$ , tiene radio de convergencia infinito y suma igual a  $f(z)$ . Entre las funciones enteras se encuentran los polinomios (cuando la citada serie de Taylor tiene solamente un número finito de coeficientes distintos de cero). Las funciones enteras que no son polinomios son también llamadas trascendentes enteras; tales son las funciones  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ .

Sea ahora  $f(z)$  una función de puntos singulares aislados en todo el plano; se dice que la misma es meromorfa si tales puntos singulares son todos polos. Por ejemplo, una función racional que no sea un polinomio, vale decir, una función del tipo

$$f(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n} \quad (\text{con } m \geq 0, n > 0, a_0 \neq 0, b_0 \neq 0).$$

con los polinomios indicados primos entre sí, es una función meromorfa.

Tal función tiene como polos las raíces  $z_1, z_2, \dots, z_p$ , ( $p \leq n$ ) del polino-



mio denominador, con órdenes iguales a las multiplicidades  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$ , ( $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_p = n$ ) respectivamente, de tales raíces, como se ve inmediatamente escribiendo el denominador en la forma  $b_0(z - z_1)^{\nu_1} (z - z_2)^{\nu_2} \dots (z - z_p)^{\nu_p}$ , y aplicando el teor. I del n° 12.

Las funciones  $\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ ,  $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$  son también funciones meromorfas (con infinitos polos).

Estos ejemplos caen dentro del siguiente teorema general:

I - El cociente de dos funciones enteras, si no es una función entera, es una función meromorfa.

Dem. Dadas dos funciones enteras  $f(z)$ ,  $g(z)$ , consideremos su cociente  $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ . La  $F(z)$  será evidentemente holomorfa en el campo conexo obtenido privando al plano de los eventuales ceros de  $g(z)$ . Si tales ceros no existen, la  $F(z)$  es una función entera. Si existen, en cambio, ceros de  $g(z)$  sabemos que forman un conjunto de puntos aislados carente de puntos de acumulación; considerando un  $z_0$  de tales ceros y llamando con  $n$  a su orden, sabemos además que existe un entorno circular oportuno  $C$  de  $z_0$  tal que en él puede indicarse  $g(z) = (z - z_0)^n \psi(z)$ , con  $\psi(z) \neq 0$ . Sigue que, para  $z \in C - z_0$  puede escribirse  $F(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^n \psi(z)}$  y deducir  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n F(z) = \frac{f(z_0)}{\psi(z_0)}$ , de donde, si  $f(z_0) \neq 0$ , el punto  $z_0$  resulta para  $F(z)$  un polo de orden  $n$  (teor. I del n° 12). Queda por analizar qué sucede si  $f(z_0) = 0$ ; en ese caso  $z_0$  es un cero de  $f(z)$  con cierto orden  $m$  y, restringiendo eventualmente  $C$  puede ponerse  $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ , con  $\varphi(z) \neq 0$  (para  $z \in C$ ). Se deduce

$$F(z) = (z - z_0)^{m-n} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad (z \in C - z_0).$$

Si  $n > m$  se tendrá entonces,  $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^{n-m} F(z)] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)} \neq 0$ , de donde  $z_0$  es para  $F(z)$  un polo de orden  $n - m$ . Si  $m \geq n$  se tendrá, en cambio



$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \begin{cases} \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)} & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases},$$

de donde  $z_0$  no resulta punto singular para  $F(z)$ . En definitiva es obvio que la  $F(z)$  resulta entera o meromorfa, que es lo que queríamos demostrar.

#### 16 - EL PLANO COMPLEJO DOTADO DE PUNTO AL INFINITO (ESFERA COMPLEJA).

Sea  $f(z)$  una función holomorfa en un campo conexo dado  $A$ . Si  $A$  es no acotado se presenta de modo natural la cuestión de estudiar el comportamiento de  $f(z)$  cuando el punto  $z$ , variando en  $A$ , se aleja indefinidamente.

Para tal estudio es oportuno (como resultará a posteriori de los sucesivos n° 17 y 18) imaginar al plano complejo dotado de un único punto al infinito ( $z = \infty$ ).

¿Cómo puede imaginarse al plano con un solo punto al infinito? Se puede obtener una imagen intuitiva recurriendo a la denominada proyección estereográfica de la esfera.

En el espacio cartesiano  $(x, y, u)$  consideremos la esfera que tiene centro en el origen  $O$  y radio 1, y designemos con  $N$  al punto en que dicha esfera es atravesada por el semieje positivo  $u$ . Si  $P$  es un punto cualquiera del plano  $(x, y)$ , la recta  $NP$  tendrá con la esfera una y solamente una intersección distinta de  $N$ : la que se produce en un pun

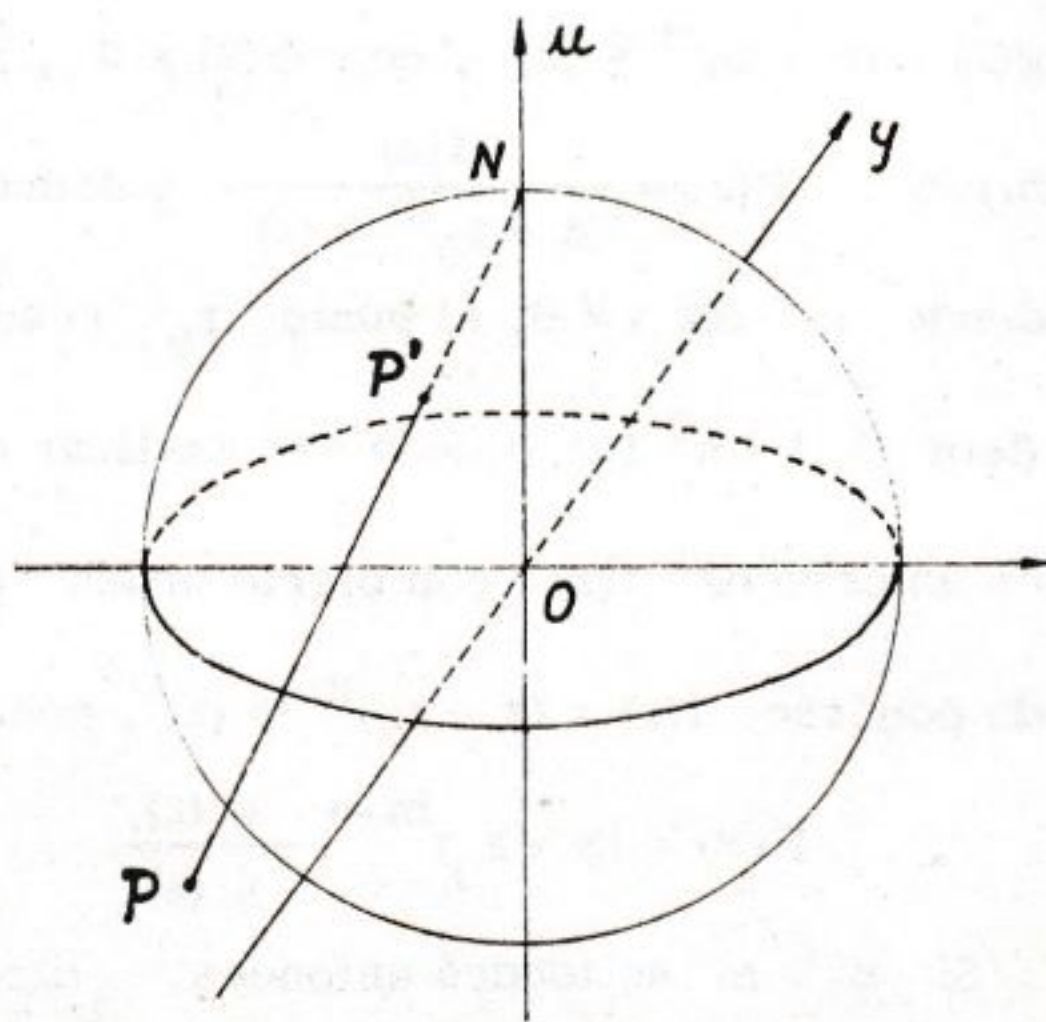


Fig. 81



to  $P'$ . Viceversa, tomado un punto  $P'$  de la esfera, distinto de  $N$ , la recta  $NP'$  encontrará al plano  $(x, y)$  en uno y solamente un punto  $P$ . Nace así una correspondencia biunívoca entre los puntos  $P$  del plano y los puntos  $P'$  de la esfera, con una sola excepción: el punto  $N$  de la esfera no tiene ningún correspondiente sobre el plano  $(x, y)$ .

Sigue, pensando  $P$  como imagen de un número complejo  $z$ , que la totalidad de los números complejos puede también representarse por los puntos de la citada esfera privada del punto  $N$ .

Con el objeto de eliminar esta excepción, podemos observar que a los puntos  $P'$  de la esfera muy próximos a  $N$  corresponden puntos  $P$  del plano muy alejados del origen, es decir, números complejos  $z$  de módulo muy grande; de esta observación surge la oportunidad de hacer corresponder al punto  $N$  de la esfera el valor  $\infty$  de la variable compleja  $z$ .

Por eso, de ahora en adelante, imaginaremos agregado al plano complejo un unico punto al infinito, el que podrá pensarse como imagen de  $z = \infty$ . Si se desea tener una visión intuitiva del plano complejo así concebido bastará pensar en la representación de los números complejos mediante los puntos de una esfera del modo antes precisado; para esta esfera usaremos el término esfera compleja.

En tal representación el número  $z = \infty$  tiene como imagen al punto  $N$  y toda calota esférica (abierta) que contenga a  $N$  puede denominarse entorno circular de  $z = \infty$ . Pasando al plano complejo, a tal calota le corresponde el campo constituido por los puntos exteriores a un círculo<sup>(\*)</sup> de modo que en

- - - - -

(\*) Se demuestra fácilmente que a cada circunferencia de la esfera, que no contenga a  $N$ , corresponde una circunferencia del plano  $(x, y)$ . Un simple cálculo muestra, en efecto, que a  $P(x, y)$  le corresponde sobre la esfera el punto  $P'$  de coordenadas

$$x' = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad y' = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \quad u' = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$



el plano complejo puede llamarse entorno circular de  $z = \infty$  al campo constituido por los puntos exteriores a cualquier círculo.

Estos entornos circulares de  $z = \infty$ , considerados en el plano complejo sin el punto al infinito, son campos no simplemente conexos; considerados, en cambio, en el plano complejo con punto al infinito resultan ser simplemente conexos (como los entornos circulares de cualquier otro punto). De esto nos convencemos inmediatamente pensando en las correspondientes imágenes sobre la esfera compleja.

Mostraremos en seguida lo oportuno de la convención introducida, analizando una transformación lineal de la variable compleja  $z$  en otra variable compleja  $z'$ , es decir, una transformación definida por una fórmula del tipo

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (\text{con } ad - bc \neq 0) . \quad (1)$$

La (1) es unívocamente invertible en la

$$z = \frac{-dz' + b}{cz' - a} \quad (2)$$

y de ahí que establezca una correspondencia generalmente biunívoca entre los puntos del plano complejo  $z$  y los puntos del plano complejo  $z'$ . Si tales planos son considerados sin punto al infinito, y si  $c \neq 0$ , pueden presentarse excepciones a tal correspondencia y, precisamente, al punto  $z = -\frac{d}{c}$  del plano  $z$  no le corresponde ningún punto del plano  $z'$ , mientras que el punto  $z' = \frac{a}{c}$  del plano  $z'$  no es el correspondiente de ningún punto del plano  $z$ . Pero de las (1), (2)

-----

de donde, si  $P'$  describe sobre la esfera una circunferencia que no contiene  $N(0,0,1)$ , vale decir, si  $P'$ , además de moverse sobre la esfera, se mueve también sobre un plano  $ax' + by' + cz' + d = 0$ , con  $c + d \neq 0$ , el punto  $P$  describirá en el plano la curva de ecuación

$$a \frac{2x}{x^2+y^2+1} + b \frac{2y}{x^2+y^2+1} + c \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} + d = 0$$

o sea,  $(c+d)(x^2+y^2) + 2ax + 2by - (c-d) = 0$ , que es lo que queríamos demostrar.



resulta obviamente que  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} z' = \frac{a}{c}$ ,  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} z = -\frac{d}{c}$ ,  $\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} |z'| = +\infty$ ,  
 $\lim_{z \rightarrow \frac{a}{c}} |z| = +\infty$  y esto nos sugiere eliminar las excepciones precedentes imagi

nando cada plano dotado del punto al infinito y conviniendo en hacerle corresponder

al punto  $z = -\frac{d}{c}$ , el punto  $z' = \infty$ , y al punto  $z = \infty$ , el punto  $z' = \frac{a}{c}$ .

Con esto la correspondencia entre los dos planos resulta biunívoca sin excepciones.

Esto vale también en el caso  $c = 0$  en el que obviamente deberá considerarse que

a  $z = \infty$  le corresponde  $z' = \infty$ .

La correspondencia biunívoca definida por (1) entre los dos planos (dotados, ca  
da uno de punto al infinito) implica una correspondencia análoga entre las dos esfe  
ras complejas.

Dejamos al lector demostrar que, en tal correspondencia, las circunferencias  
de una esfera son transformadas en circunferencias de la otra esfera.

Observemos, todavía, que si  $c \neq 0$ , la (1) puede obtenerse realizando sucesi  
vamente las siguientes tres transformaciones lineales de tipo particular

$$z_1 = cz + d, \quad (3)$$

$$z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad (4)$$

$$z' = \frac{bc - ad}{c} z_2 + \frac{a}{c}. \quad (5)$$

La hipótesis  $c \neq 0$  expresa que la (1) hace corresponder a  $z = \infty$  un punto  
distinto del punto al infinito del segundo plano. Es obvio, por otra parte, que la (3)  
y la (5) dejan fijo el punto al infinito y solamente la (4) lo traslada (a  $z_1 = \infty$   
le hace corresponder el  $z_2 = 0$ ). Por lo tanto deseando considerar transforma-  
ciones lineales que trasladan el punto al infinito del plano, no es restrictivo limi-  
tarse a considerar la transformación particular

$$z' = \frac{1}{z}. \quad (6)$$



Es obvio que la (6) transforma el entorno circular  $|z| > \rho$  del punto  $z = \infty$  en el entorno circular  $|z'| < \frac{1}{\rho}$  del punto  $z' = 0$ .

## 17 - COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCION HOLOMORFA EN EL PUNTO AL INFINITO.

Sea  $f(z)$  una función holomorfa en todos los puntos finitos<sup>(\*)</sup> de un campo  $A$  conexo y no acotado; propongámonos estudiar el comportamiento de  $f(z)$  en el punto  $z = \infty$ . Nos limitaremos a estudiar los casos análogos a los ya examinados cuando se trataba de un punto  $z_0$  finito, es decir, el caso de holomorffa y el de punto singular aislado. Recordemos que en estos dos casos existe un entorno circular  $C$  de  $z_0$  tal que la  $f(z)$  resulta holomorfa en  $C$  o en  $C - z_0$ ; sigue, entonces, que para el estudio que nos hemos propuesto deberemos suponer que el citado campo sea tal que contenga todos los puntos finitos de un entorno circular de  $z = \infty$ . Se ve inmediatamente que esto equivale a requerir que los puntos finitos de la frontera de  $A$  constituyan un conjunto acotado.

Conviene hacer otra observación preliminar. Si se realiza sobre la variable  $z$  una transformación lineal

$$z = \frac{az' + b}{cz' + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

la  $f(z)$  se transforma en la  $g(z') = f\left(\frac{az' + b}{cz' + d}\right)$ . Suponiendo  $c \neq 0$ , si  $z_0$  es un punto de holomorffa (o singular aislado) para  $f(z)$  y es  $z_0 \neq \frac{a}{c}$ , se ve inmediatamente que el punto correspondiente  $z'_0$  (que es finito y  $\neq -\frac{d}{c}$ ) es punto de holomorffa (o singular aislado) para  $g(z')$ <sup>(\*\*)</sup>.

- - - - -

(\*) Indicaremos, abreviadamente, con la locución punto finito a todo punto del plano distinto del punto al infinito.

(\*\*) Es también fácil ver, valiéndose de los teoremas de los números 12 y 13, que un polo de orden  $n$  se transforma en un polo del mismo orden y que un punto singular esencial se transforma en un punto singular esencial.



Teniendo en cuenta que, por lo que se dijo al final del n<sup>o</sup> precedente, basta consi  
derar la transformación lineal particular  $z = \frac{1}{z'}$ , daremos las siguientes defini  
ciones:

Sea  $f(z)$  holomorfa en un campo  $A$  conexo, no acotado y con frontera acota-  
 da; diremos que el punto  $z = \infty$  es para  $f(z)$  un punto de holomo  
morffa, o un polo de orden  $n$ , o un punto singular esencial  
 según que el punto  $z' = 0$  sea, para la función  $g(z') = f(\frac{1}{z'})$ , un  
 punto de holomorffa, un polo de orden  $n$ , o un punto singu-  
 lar esencial, respectivamente.

En los tres casos recién mencionados existe un entorno circular  $C'$  de  $z' = 0$   
 (contenido en el campo  $A'$  transformado de  $A$ ) de modo que valen, respectivame  
nte, estos desarrollos:

$$g(z') = \alpha_0 + \alpha_1 z' + \alpha_2 z'^2 + \dots, \quad (z' \in C') ; \quad (1')$$

$$g(z') = (\alpha_0 + \alpha_1 z' + \alpha_2 z'^2 + \dots) + \frac{\alpha_{-1}}{z'} + \frac{\alpha_{-2}}{z'^2} + \dots + \frac{\alpha_{-n}}{z'^n},$$

$$(\alpha_{-n} \neq 0, \quad z' \in C' - 0) ; \quad (1'')$$

$$g(z') = (\alpha_0 + \alpha_1 z' + \alpha_2 z'^2 + \dots) + \frac{\alpha_{-1}}{z'} + \frac{\alpha_{-2}}{z'^2} + \dots, \quad (1''')$$

(con infinitos coeficientes  $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \dots$  distintos de cero,  $z' \in C' - 0$ ).

Pongamos ahora  $z' = \frac{1}{z}$  en estas fórmulas, con lo que la  $g(z')$  se transfor-  
 ma en la  $g(\frac{1}{z}) = f(z)$ , mientras al citado entorno circular  $C'$  del punto  $z' = 0$   
 le corresponderá, en el plano  $z$ , cierto entorno  $C$  del punto  $z = \infty$  (conte-  
 nido en el campo  $A$ ). Teniendo esto en cuenta, las (1'), (1'') y (1''') se transforman,  
 respectivamente, en las

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots, \quad (z \in C) ; \quad (2')$$

$$f(z) = (\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots) + \alpha_{-1} z + \alpha_{-2} z^2 + \dots + \alpha_{-n} z^n, \quad (2'')$$

$$(\alpha_{-n} \neq 0, \quad z \in C - \infty) ;$$



$$f(z) = \left( \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \frac{\alpha_{-2}}{z^2} + \dots \right) + \alpha_{-1}z + \alpha_{-2}z^2 + \dots, \quad (2^m)$$

(con infinitos coeficientes  $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \alpha_{-3}, \dots$  distintos de cero,  $z \in C - \infty$ ).

Conviene ahora poner

$$\alpha_k = a_{-k} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3)$$

y reunir las (2'), (2''), (2''') en la única fórmula

$$f(z) = \left( a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \right) + (a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots) \quad (4)$$

válida en un entorno  $C \subseteq A$  de  $z = \infty$ , con exclusión del punto  $z = \infty$  cuando al menos uno de los coeficientes  $a_1, a_2, a_3, \dots$  sea distinto de cero.

La (4) muestra que en un oportuno entorno de  $z = \infty$  del que eventualmente se excluya al punto  $z = \infty$ , la  $f(z)$  admite un desarrollo en serie bilátera de potencias (análogamente a lo que sucedía para un punto finito). Según las definiciones introducidas poco más arriba, podemos agregar que si en el segundo miembro de (4) falta la segunda parte del desarrollo, el punto  $z = \infty$  es, para  $f(z)$ , un punto de holomorffia; si tal segunda parte es un polinomio  $a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$  de grado  $n$  ( $a_n \neq 0$ ), el punto  $z = \infty$  es, para  $f(z)$ , un polo de orden  $n$ ; por último si la segunda parte es una serie efectiva (es decir si entre los coeficientes  $a_1, a_2, a_3, \dots$  existen infinitos distintos de cero), el punto  $z = \infty$  es para  $f(z)$  un punto singular esencial<sup>(\*)</sup>.

El desarrollo (4) será denominado el desarrollo de Laurent (o de Taylor, si falta la segunda parte) de la  $f(z)$ , relativo al punto  $z = \infty$ ; la primera parte del segundo miembro es la parte regular, la segunda la parte singular. Obsérvese que ahora sucede lo contrario de lo que habíamos encontrado en el caso de los puntos finitos: en este caso son las potencias de  $z$  con expo-

- - - - -

(\*) El lector verificará fácilmente que cada uno de estos tres casos presenta caracteres de invariancia también respecto de las transformaciones lineales del tipo  $z' = az + b$  que transforman  $z = \infty$  en  $z' = \infty$ .



nente negativo las que forman la parte regular, mientras aquellas con exponente positivo dan lugar a la parte singular.

Podemos también dar la expresión integral de los coeficientes  $a_k$  que figuran en (4), ya que se obtiene fácilmente a partir de la de los coeficientes  $\alpha_k$  que intervienen en las (1'), (1''), (1''').

En efecto; sabemos que

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{g(z')}{z'^{k+1}} dz'$$

donde  $\Gamma'$  es cualquier circunferencia con centro en  $z' = 0$ , contenida en  $C'$ .

Por la (3) se tiene, entonces,

$$a_k = \alpha_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{g(z')}{z'^{-k+1}} dz',$$

y realizando en la integral la sustitución  $z' = \frac{1}{z}$  con lo que  $g(z')$  se transforma en  $g(\frac{1}{z}) = f(z)$  y la circunferencia  $\Gamma'$ , recorrida primeramente en sentido positivo, en una circunferencia con centro en  $z = 0$ , contenida en  $C$  y recorrida en sentido negativo:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma} \frac{f(z)}{z^{k-1}} \left(-\frac{dz}{z^2}\right)$$

o sea,

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz. \quad (5)$$

Esta es la expresión integral que buscábamos de los coeficientes  $a_k$  del desarrollo (4). Obsérvese que, en ella,  $\Gamma$  indica una circunferencia cualquiera con centro en el punto  $z = 0$  que contenga en su interior a todos los puntos de la frontera (acotada) del campo  $A$ .

Se extienden inmediatamente al caso del punto  $z = \infty$  muchos de los resultados vistos en los <sup>os</sup> 9, 10, 12, 13, 14 en el caso de un punto  $z_0$  finito.

Haremos ahora una reseña rápida de estos resultados, dejando al lector la tarea de desarrollar las simples demostraciones.

Suponiendo que  $z = \infty$  sea punto de holomorfía para la función  $f(z)$ , se di-



rá que dicho punto es para  $f(z)$  un cero de orden  $n$  cuando el desarrollo (4) (además de ser  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$ ) resulta  $a_0 = a_{-1} = a_{-2} = \dots = a_{-(n-1)} = 0$ ,  $a_{-n} \neq 0$ . Condición necesaria y suficiente para que esto se verifique es que el  $\lim_{z \rightarrow \infty} [z^n f(z)]$  exista finito y distinto de cero (cfr. n° 10, teor. IV).

Condición necesaria y suficiente para que  $z = \infty$  sea para  $f(z)$  un polo de orden  $n$  es que exista finito y distinto de cero el límite  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n}$ ; o que sea  $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = +\infty^{(*)}$ ; o que  $z = \infty$  sea un cero de orden  $n$  para la función recíproca  $\frac{1}{f(z)}$  (cfr. n° 12, teor. I, II, III). Si  $z = \infty$  es punto singular esencial de  $f(z)$ , en todo entorno del mismo vale la propiedad expresada por el teorema de Picard (cfr. n° 13).

Se puede también dar la noción de residuo de la función  $f(z)$  en el punto  $z = \infty$ . En el caso de un punto singular aislado  $z_0$  finito ya se ha visto (n° 14) que el residuo  $R(z_0)$  está dado por

$$R(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma} f(z) dz \quad (6)$$

donde  $\Gamma$  es una circunferencia arbitraria de centro  $z_0$  tal que todos sus puntos, como también los interiores a la misma (excluido  $z_0$ ) sean de holomorfia para  $f(z)$ . Recordemos además que en (6) la  $\Gamma$  se recorre en sentido anti-horario, es decir, de modo de dejar a la izquierda el punto considerado  $z_0$  y que  $R(z_0)$  coincide con el coeficiente  $a_{-1}$  de  $\frac{1}{z - z_0}$  en el desarrollo de Laurent relativo a  $z_0$ . Para el punto  $z = \infty$  se dará una definición análoga y

-----

(\*) Conviene aquí observar que, habiendo admitido el valor  $z = \infty$  entre los que pueden ser asumidos por la variable  $z$ , no habría razón para excluirlo como valor de la función  $w = f(z)$  y, por lo tanto, en un polo (finito o al infinito) se podría decir que resulta  $w = \infty$ . En cierto sentido los polos no seguirían apareciendo como puntos singulares; sin embargo, nosotros no adoptaremos aquí tal punto de vista.



se llamará residuo a una integral del tipo (6) extendida sobre una circunferencia con centro en el origen tal que todos sus puntos y los exteriores a la misma (con la exclusión eventual de  $z = \infty$ ) sean de holomorfía para  $f(z)$ ; quedará entendido además, que  $\Gamma$  sea recorrida de modo de dejar al punto  $z = \infty$  a su izquierda, vale decir, en sentido horario. Se pone, entonces,

$$R(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma} f(z) dz, \quad (7)$$

que, confrontada con la (5), pone en evidencia que resulta

$$R(\infty) = -a_{-1},$$

o sea que el residuo en  $z = \infty$  es el coeficiente de  $\frac{1}{z}$  en el correspondiente desarrollo (4) de Laurent, pero cambiado de signo.

Nótese la diferencia con el caso de los puntos finitos: además del cambio de signo recién mencionado se tiene que el coeficiente en consideración  $a_{-1}$  figura en la parte regular del desarrollo (4) y no en la singular, con lo que  $R(\infty)$  puede ser distinto de cero aunque  $z = \infty$  sea punto de holomorfía y puede ser nulo aunque  $z = \infty$  sea punto singular aislado.

Volvamos a analizar la definición, dada en el n° 14, de función de puntos singulares aislados en un campo conexo dado  $A$ , en el caso que  $A$  sea no acotado, con frontera acotada. Puesto que en tal definición se prescindía del punto  $z = \infty$ , la misma no excluía que el conjunto  $N$  de puntos singulares pudiese tener un punto de acumulación en  $z = \infty$ . Si debemos ahora tener en cuenta al punto  $z = \infty$  como formando parte de  $A$ , se debe excluir tal eventualidad y entonces se dirá que  $f(z)$  es de puntos singulares aislados en un campo conexo dado  $A$ , no acotado con frontera acotada, cuando existe en  $A$  un conjunto no vacío  $N$  (que comprende eventualmente el punto  $z = \infty$ ) totalmente formado por puntos aislados y carente de puntos de acumulación (finitos o al infinito) pertenecientes a  $A$ , de forma tal que  $f(z)$  sea holomorfa en  $A - N$  y que cada punto de  $N$  sea un punto



singular aislado de  $f(z)$ . Por ejemplo, la función  $\operatorname{tg} z$  no es de puntos singulares aislados en el plano dotado de punto al infinito; lo es, en cambio, la función  $\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}$  en el mismo plano, privado del origen.

Podemos ahora completar el teorema de los residuos del n° 14 con el siguiente teorema exterior de los residuos:

I - Sea  $f(z)$  una función de puntos singulares aislados en un campo conexo dado  $A$  no acotado y con frontera acotada. Sea  $D$  un dominio regular tal que su dominio complementario<sup>(\*)</sup>  $D'$  pertenezca a  $A$  y que su frontera  $\gamma D$  no contenga ningún punto singular de  $f(z)$ . Llamando  $z_1, z_2, \dots, z_p$  a los puntos singulares finitos exteriores a  $D^{(**)}$  y  $R(z_1), R(z_2), \dots, R(z_p)$  a sus residuos, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma D} f(z) dz = -[R(z_1) + R(z_2) + \dots + R(z_p) + R(\infty)] \quad (9)$$

Dem. Con centro en el origen trazamos una circunferencia  $\Gamma$  que contenga en su interior al dominio  $D$  y los puntos  $z_1, z_2, \dots, z_p$ .

Con centro en estos puntos tracemos después otras  $p$  circunferencias, exteriores una de las otras, situadas en el exterior de  $D$  y en el interior de  $\Gamma$ . Consideremos ahora el dominio  $\Delta$  (ver fig. -----

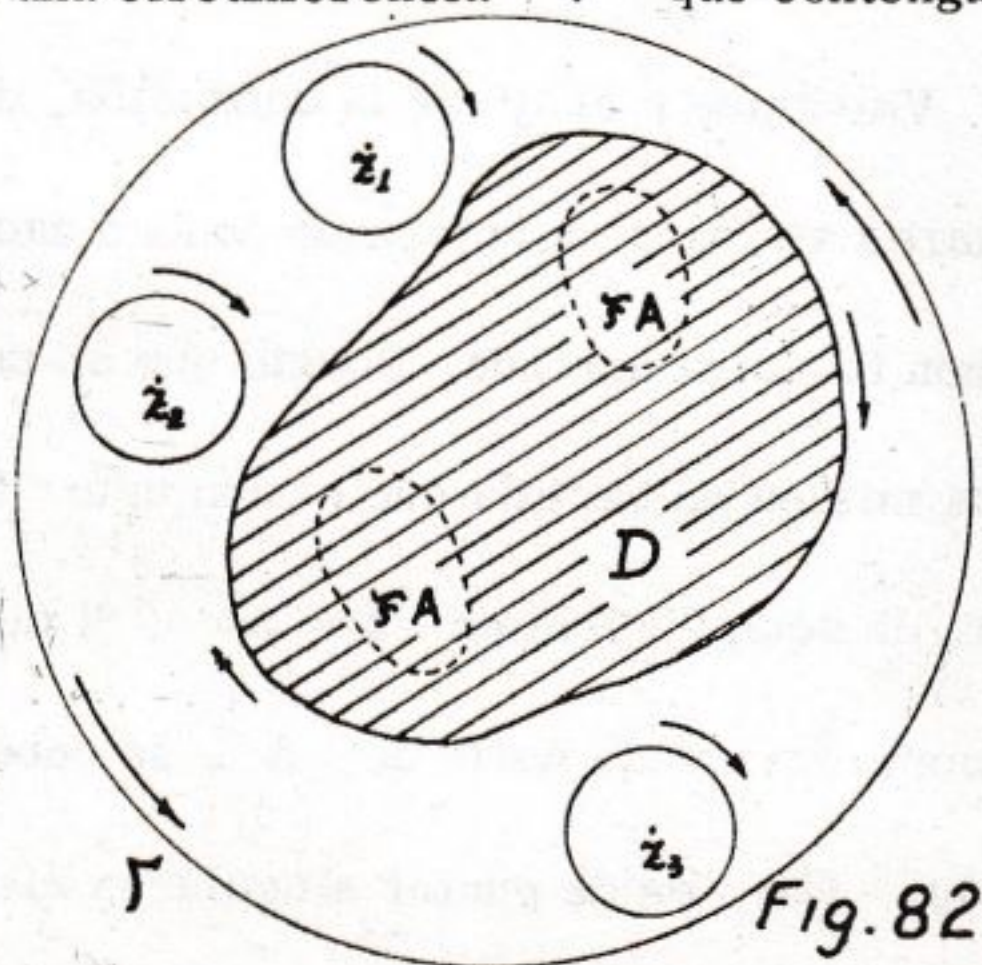


Fig. 82

(\*) El dominio complementario  $D'$  de  $D$  es la clausura del campo formado por los puntos exteriores de  $D$ . Decir que  $D' \subseteq A$  significa que  $D$  contiene en su interior todos los puntos de  $\gamma A$ .

(\*\*) El número de tales puntos es finito puesto que, en caso contrario, habría en  $D'$  (y por ende en  $A$ ) por lo menos un punto de acumulación finito o al infinito, contra la hipótesis.



82) que tiene por frontera a  $\mathcal{F}D$  y las  $p+1$  circunferencias  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ , ...,  $\Gamma_p$ ; en él la  $f(z)$  es holomorfa y, por el primer teorema de Cauchy, se tiene  $\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}A} f(z) dz = 0$ , o sea,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mathcal{F}D} f(z) dz + \sum_{k=1}^p \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_k} f(z) dz = 0.$$

De aquí,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} f(z) dz = - \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma_k} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma} f(z) dz \right),$$

y ésta, teniendo en cuenta la (7), equivale evidentemente a la tesis (9).

Combinando el teorema de los residuos del n° 14 y el actual se obtiene de inmediato otro teorema:

II - Sea la función  $f(z)$  holomorfa en todos los puntos del plano con excepción de un número finito de puntos singulares  $z_1, z_2, \dots, z_n$  finitos y, eventualmente, del punto  $z = \infty$ . Bajo estas hipótesis la suma de los residuos de la  $f(z)$  en tales puntos  $z_1, z_2, \dots, z_p$  y en el punto  $z = \infty$ , resulta nula.

Dem. Designamos con  $D$  a cualquier dominio regular tal que  $\mathcal{F}D$  no contenga los puntos  $z_1, z_2, \dots, z_n$  y distingamos estos puntos en dos categorías: los interiores a  $D$  (que indicaremos con  $z'_h$ ) y los exteriores (que indicaremos con  $z''_k$ ).

Por los dos teoremas antes citados se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} f(z) dz = \sum R(z'_h), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{F}D} f(z) dz = - \sum R(z''_k) - R(\infty);$$

de las que, sustrayendo miembro a miembro, se obtiene la tesis.

Agreguemos algún ejemplo sobre los conceptos expuestos en este n°.

Un polinomio de grado  $n$ :



$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad (a_n \neq 0)$$

tiene, evidentemente, en  $z = \infty$  un polo de orden  $n$  [basta confrontar con (4)], en cambio, una trascendente entera (como  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ ) tienen, en  $z = \infty$ , un punto singular esencial.

Dada una función racional

$$f(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}, \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

se tiene

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{n-m} f(z) = \frac{a_0}{b_0}$$

de donde, si  $m = n$ , el punto  $z = \infty$  es punto de holomorfía (no un cero); si  $m > n$  es un polo de orden  $m - n$ ; si  $m < n$  es un cero de orden  $n - m$ .

## 18 - LAS FUNCIONES HOLOMORFAS CONSIDERADAS SOBRE LA ESFERA COMPLEJA; NOCIONES GENERALES SOBRE PUNTOS SINGULARES.

Teniendo ahora la posibilidad de tratar al punto  $z = \infty$  del mismo modo que a los puntos finitos del plano complejo, la teoría de las funciones holomorfas adquiere un aspecto más completo.

Demostraremos, como primer cosa, el siguiente teorema de Liouville:

I - Una función holomorfa en todo el plano complejo (comprendido el punto  $z = \infty$ ) es una constante.

Dem. Una función  $f(z)$  tal será, por empezar, una función holomorfa en todos los puntos finitos, es decir, será una función entera. Por lo tanto, en los citados puntos, la  $f(z)$  podrá representarse mediante una serie de potencias del tipo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (1)$$

En particular este desarrollo vale para los puntos de cualquier entorno de  $z = \infty$ ; pero, por hipótesis, la  $f(z)$  es holomorfa también en  $z = \infty$  y de ahí que en (1) deba faltar la parte singular  $a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  (es decir, deba ser  $a_1 =$



$= a_2 = \dots = 0$ ). Sigue  $f(z) = a_0$ , que es lo que queríamos demostrar.

Este teorema nos dice que si  $f(z)$  es holomorfa y no constante, en un campo conexo  $A$  de la esfera compleja  $S$ , el campo  $A$  no puede coincidir con  $S$  y no hay modo de prolongar  $f(z)$  en toda la esfera  $S$ .

Se puede demostrar que a toda función  $f(z)$  holomorfa en un campo conexo dado  $A$  es siempre posible asociarle, por lo menos, un campo conexo  $\Omega \supset A$  y una función  $g(z)$  holomorfa en  $\Omega$ , de modo que la  $g(z)$  sea la prolongación de  $f(z)$  en  $\Omega$  y que la  $g(z)$  no sea prolongable fuera de  $\Omega^{(*)}$ . En otras palabras: a toda función holomorfa  $f(z)$  puede asociársele al menos un campo máximo de holomorfía  $\Omega$ , es decir, un campo conexo en el que la función admita una prolongación que no sea ulteriormente prolongable.

Individualizado un campo como el mencionado,  $\Omega$ , y considerado en él la prolongación de la  $f(z)$  [que continuaremos indicando con  $f(z)$ ], podemos decir que si la  $f(z)$  no es constante, el campo  $\Omega$  no puede coincidir con  $S$  y de ahí que la frontera  $\mathcal{F} \Omega$  no puede ser vacía. Los puntos de  $\mathcal{F} \Omega$  se denominan puntos singulares de la  $f(z)$  y entonces: una función holomorfa no constante admite, por lo menos, un punto singular, o también, las únicas funciones holomorfas carentes de puntos singulares, son las constantes.

La definición de punto singular que aquí hemos dado es relativa a la elección del máximo campo de holomorfía y tendrá, por ende, significado intrínseco solamente en el caso que  $\Omega$  resulte unívocamente determinado. Esto sucede, por ejemplo, cuando la función holomorfa está definida a priori en un campo conexo  $A$  sin po-

- - - - -

(\*) Puede ser que  $\Omega \equiv A$ ,  $f(z) \equiv g(z)$ ; esto sucede cuando  $f(z)$  no es prolongable fuera de  $A$ .



sibilidad de prolongación (o sea, como se dice en este caso, que esta definida en grande) ; es obvio, entonces, que  $\Omega \equiv A^{(*)}$ . Pero hay casos en que la función holomorfa está definida en pequeño (es decir de modo que sea posible prolongarla fuera de su campo de definición  $A$ ) y entonces puede muy bien suceder que el campo máximo de holomorfía  $\Omega$  pueda elegirse de distintos modos; en tal caso el conjunto de puntos singulares de  $f(z)$  depende de la elección de  $\Gamma$ . Demos, con referencia a este hecho, un simple ejemplo. En el campo  $A$  definido por  $y > 0$ , considérese

$$f(z) = \log |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad \text{con } 0 < \operatorname{Arg} z < \pi.$$

Esta función es holomorfa en  $A$  y es prolongable fuera de  $A$ ; lo es, por ejemplo, en el campo  $\Omega_0$  obtenido privando al plano de los puntos  $(x \leq 0, y \neq 0)$  y del punto al infinito, cuando se ponga en  $\Omega_0$ ,  $f(z) = \log z$  (logaritmo principal). Pero, fijado arbitrariamente un número  $\alpha$ , con  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , se la puede también prolongar en el campo  $\Omega_\alpha$  obtenido privando al plano de los puntos para los que  $\operatorname{Arg} z = \pi + \alpha$ , del origen y del punto al infinito, poniendo en tal campo

$$f(z) = \log |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad \text{con } -\pi + \alpha < \operatorname{Arg} z < \pi + \alpha, \quad (2)$$

resultando entonces singulares los puntos  $z = 0$ ,  $z = \infty$  y aquellos para los que  $\operatorname{Arg} z = \pi + \alpha$ .

Deseamos señalar que los puntos singulares aislados, que ya habíamos considerado, forman parte de los ahora definidos. En efecto, si  $z_0$  es un punto singular aislado, cualquier campo máximo de holomorfía  $\Omega$  contendrá todos los puntos de un entorno circular de  $z_0$ , con la exclusión de  $z_0$ , de modo

-----

(\*) En todos los ejemplos hasta aquí considerados (polinomios, funciones racionales, trascendentes enteras, funciones meromorfas, funciones de puntos singulares aislados, logaritmo principal) se verifica, precisamente, este hecho.



que  $z_0$  será seguramente un punto de  $\mathcal{F} \Omega$ , más aún, un punto aislado de  $\mathcal{F} \Omega$ .

Viceversa, se ve inmediatamente que todo punto aislado de la  $\mathcal{F} \Omega$  resulta ser un punto singular aislado según la definición dada en el n° 11.

Pero una función holomorfa puede también tener puntos singulares no aislados; se trata de los puntos no aislados de  $\mathcal{F} \Omega$ , es decir, de puntos tales que en cada uno de sus entornos caigan infinitos puntos singulares distintos. Por ejemplo, la función  $\operatorname{tg} z$  tiene los infinitos puntos singulares aislados (polos)  $z = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) y el punto singular no aislado  $z = \infty$ ; la función  $\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}$  tiene los infinitos polos  $z = \frac{1}{k\pi}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) y el punto singular no aislado  $z = 0$ ; para la función (2) todos sus puntos singulares son no aislados.

Observemos que si una función  $f(z)$  holomorfa no es idénticamente nula y  $z_0$  es punto de acumulación de ceros de la  $f(z)$ ,  $z_0$  sería ciertamente un punto singular. En efecto (ver n° 9) el punto  $z_0$  debe pertenecer necesariamente a  $\mathcal{F} \Omega$ .

Podemos agregar que un punto de acumulación de puntos singulares es un punto singular (no aislado); basta, en efecto, pensar que  $\mathcal{F} \Omega$  es un conjunto cerrado.

Por ejemplo, una función meromorfa con infinitos polos (finitos) tiene en  $z = \infty$  un punto singular no aislado, puesto que el conjunto de los polos, no teniendo puntos de acumulación finitos, tiene necesariamente como punto de acumulación a  $z = \infty$ . Conviene también observar que si la función meromorfa  $f(z)$  tiene, en cambio, un número finito de polos, el punto  $z = \infty$  puede ser un punto de holomorfía [ejemplo:  $f(z) = \frac{1}{z}$ ], o ser un polo [ejemplo:  $f(z) = z + \frac{1}{z}$ ], o un punto singular esencial [ejemplo:  $f(z) = \frac{e^z}{z}$ ].

Vale, además, el siguiente teorema:

II - Si una función meromorfa  $f(z)$  tiene en  $z = \infty$  un punto de



holomorfa o un polo, será necesariamente una función racional.

Dem. La  $f(z)$  tiene necesariamente un número finito de polos. Sean  $z_1, z_2, \dots, z_n$  dichos polos y  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  sus respectivos órdenes. Multiplicando la  $f(z)$  por  $(z - z_1)^{\nu_1}$  se obtiene una función que en  $z_1$  tiene un punto de holomorfa; análogamente si se la multiplica por  $(z - z_1)^{\nu_2}, \dots, (z - z_n)^{\nu_n}$ . Entonces la función

$$\varphi(z) = (z - z_1)^{\nu_1} (z - z_2)^{\nu_2} \dots (z - z_n)^{\nu_n} f(z) \quad (3)$$

no tiene singularidades en puntos finitos, es decir, es una función entera. Si es holomorfa en  $z = \infty$ , será una constante (teor. I); si tiene un polo en  $z = \infty$ , es un polinomio. Con respecto a ambos casos puede decirse que  $\varphi(z)$  es un polinomio de grado  $\geq 0$  y de ahí que de la (3) se obtenga que  $f(z)$  es el cociente de dos polinomios, es decir, una función racional, que es lo que queríamos demostrar.

Es también importante el siguiente teorema:

III - Sobre la circunferencia que limita el campo de convergencia  $C$  de una serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  cae por lo menos un punto singular de la función holomorfa  $f(x)$ , suma de la serie.

Dem. Si así no fuera, cualquier campo máximo de holomorfa debería contener  $C \cup \mathcal{F}C$ . Entonces, el desarrollo local de Taylor de la  $f(z)$  con punto inicial  $z_0$  (que necesariamente coincide con la serie de potencias asignada) debería converger en el círculo abierto de centro  $z_0$  y radio igual a la distncia de  $z_0$  a  $\mathcal{F}\Omega$ ; pero esto es absurdo porque esta distancia es mayor que el radio de  $C$ , quedando así demostrado el teorema.

Observemos, por último, una propiedad notable relativa a las funciones de pun-



tos singulares aislados; aún limitándonos a enunciarla en el caso más elemental, la misma servirá para poner en evidencia la importancia de la consideración de los puntos singulares en el estudio de una función holomorfa. Se trata del siguiente teorema:

IV - Si una función holomorfa  $f(z)$  tiene un número finito de puntos singulares, estará dada, salvo una constante aditiva, por la suma de las características de tales puntos.

Dem. Recordemos, ante todo, (ver. n<sup>o</sup> 11) que si  $z_0$  es un punto singular aislado de la  $f(z)$ , su característica es la parte singular  $G\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$  del relativo desarrollo de Laurent; recordemos, además, que tal característica es una función holomorfa en todo el plano, con exclusión del punto  $z_0$ . Análogamente en el caso del punto  $z = \infty$  (ver n<sup>o</sup> 17) en el que la característica  $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$  es holomorfa en todo el plano con exclusión del punto  $z = \infty$ .

Dicho lo cual, supongamos que  $z_1, z_2, \dots, z_n$  y, eventualmente  $z = \infty$ , sean los puntos singulares y  $G_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right), G_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right), \dots, G\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$  y  $G(z)$  las respectivas características. Ahora, la función

$$f(z) - G_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) - G_2\left(\frac{1}{z-z_2}\right) - \dots - G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - G(z),$$

resulta holomorfa, evidentemente, sobre toda la esfera compleja. Por el teor. I tal función será una constante, de lo que sigue la tesis.

## 19 - ALGUNAS NOCIONES SOBRE LAS TRANSFORMACIONES PLANAS REGULARES.

Supongamos tener una transformación puntual entre dos planos  $(x, y)$  y  $(u, v)$ , es decir, tener dos funciones

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, \quad (1)$$



definidas en un campo  $A$  del plano  $(x, y)$ , que hacen corresponder a cada punto  $(x, y)$  de tal campo uno y solamente un punto del plano  $(u, v)$ .

Nos limitaremos a considerar transformaciones planas regulares, es decir, tales que verifiquen las siguientes hipótesis: las funciones  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ , continuas con derivadas parciales primeras continuas en el campo  $A$ , tienen en éste su jacobiano  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$  siempre distinto de cero.

Deseamos ante todo demostrar que, en tales condiciones, el conjunto  $A'$ , lugar de los puntos del plano  $(u, v)$  que corresponden a los puntos de  $A$ , es también un campo.

Fijemos en  $A$  un punto cualquiera  $P_0(x_0, y_0)$  y sea  $P'_0(u_0, v_0)$  el punto correspondiente de  $A'$ ; de tal modo  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  será un punto solución del sistema

$$\begin{cases} u(x, y) - u = 0, \\ v(x, y) - v = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Bajo las hipótesis hechas el sistema (2) es, por el teorema de Dini, en un entorno del citado punto solución  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$ , unívocamente resoluble con respecto a  $x$  y a  $y$ . Esto significa que existen un entorno  $J \subseteq A$  del punto  $P_0(x_0, y_0)$  y un entorno  $I'$  del punto  $P'_0(u_0, v_0)$  tales que a cada punto  $(u, v) \in I'$  se le puede asociar un y solamente un punto  $(x, y) \in J$  de modo de obtener con  $(x, y, u, v)$  un punto solución del sistema (2). Quedan, de tal modo, definidas en  $I'$  dos funciones  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  (continuas con sus derivadas primeras) tales de tenerse

$$\begin{cases} u[x(u, v), y(u, v)] - u = 0 \\ v[x(u, v), y(u, v)] - v = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(u_0, v_0) = x_0 \\ y(u_0, v_0) = y_0 \end{cases}. \quad (3)$$

Sigue que todo punto  $(u, v) \in I'$  pertenece a  $A'$ , ya que por las (3) él es el



correspondiente del punto  $[x(u, v), y(u, v)] \in J \subseteq A$ . Entonces el punto  $P'_0(u_0, v_0)$  es interior de  $A'$ , y como esto vale cualquiera sea el punto  $P'_0 \in A'$ , se concluye precisamente que  $A'$  es un campo, que es lo que queríamos demostrar.

Observemos ahora que cuando  $(u, v)$  varía en  $I'$ , el punto  $[x = x(u, v), y = y(u, v)]$  describe cierto conjunto  $I \subseteq J$ ; demostremos que también  $I$  es un campo.

El conjunto  $I$  es el correspondiente del campo  $I'$  en la transformación

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (4)$$

definida por funciones continuas con derivadas primeras continuas y de ahí que, si probáramos que en  $I'$  resulta  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ , estaríamos en las mismas condiciones que estábamos con referencia a la transformación (1); podríamos en ese caso decir que la (4) transforma campos en campos, de donde seguiría la tesis.

Pero que sea  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$  es fácil de demostrar pues basta tener en cuenta la relación

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}.$$

Podemos, entonces, enunciar el siguiente teorema:

I - Sea la transformación plana (1) regular. Tomado arbitrariamente un punto  $P_0 \in A$  y designando con  $P'_0$  a su correspondiente en  $A'$ , puede construirse un entorno  $I \subseteq A$  de  $P_0$  tal que, cuando  $P(x, y)$  varía en él, el punto correspondiente  $P'(u, v)$  describirá un entorno  $I'$  de  $P'_0$ , resultando los dos entornos  $I$  e  $I'$  en correspondencia biunívoca.

Se puede expresar brevemente este hecho diciendo que la transformación regular (1) es invertible en pequeño. En general no hay correspondencia biuní-



voca entre los dos campos  $A$  y  $A'$ , es decir que la transformación (1) no es invertible en grande, como podemos verificar con un ejemplo.

Consideremos la transformación

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy \quad (5)$$

definida por funciones continuas con sus derivadas primeras. El jacobiano  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 4(x^2 + y^2)$  es distinto de cero en todo el plano, excluido el origen; por lo tanto la transformación (5) es regular, por ejemplo, en la corona circular  $A$  con centro en el origen y radios  $r, R$  ( $r < R$ ). Un fácil cálculo muestra que a  $A$  corresponde en el plano  $(u,v)$  la corona circular  $A'$  con centro en el origen y radios  $r^2, R^2$ . La correspondencia entre  $A$  y  $A'$  no es biunívoca en grande puesto que cada punto  $(u,v) \in A'$  proviene, manifiestamente de dos puntos  $(x,y)$  y  $(x',y')$  de  $A$ .

Volviendo a la transformación regular (1), tomados dos puntos correspondientes  $P_0, P'_0$  y llamando con  $I, I'$  dos entornos de los mismos biunívocamente referidos, pongamos en evidencia que tal transformación muta curvas regulares trazadas en  $I$  en curvas regulares trazadas en  $I'$ .

Sea, en efecto,  $C[x = x(t), y = y(t)]$  una curva regular del plano  $(x,y)$  trazada en  $I$ , dicha curva resulta transformada por la (1) en el conjunto  $C'$  del plano  $(u,v)$  que está definido por las ecuaciones paramétricas

$$u = u[x(t), y(t)] = \varphi(t), \quad v = v[x(t), y(t)] = \psi(t),$$

y debemos hacer ver que  $C'$  resulta ser una curva regular (trazada en  $I'$ ). Y es así puesto que las funciones  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  son continuas (ya que son compuestas con funciones continuas), tienen las derivadas primeras  $\varphi'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y'$ ,  $\psi'(t) = \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y'$  continuas y jamás simultáneamente nulas [puesto que el anularse requeriría, dado que  $x'^2 + y'^2 > 0$ , el anulamiento del



jacobiano  $\frac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} \neq 0$ , y además hay correspondencia biunívoca entre los puntos  $(u,v)$  de  $C'$  y los puntos  $(x,y)$  de  $C$ , como también entre estos últimos y los valores del parámetro  $t$ .

Transformaciones planas regulares particulares son las realizadas mediante funciones holomorfas. Sea  $w = f(z)$  una función holomorfa en el campo  $A$  del plano  $(x,y)$  y supongamos que sea  $f'(z) \neq 0$  en todo  $A$ . Hagamos ver que tal función define una transformación regular entre el campo  $A$  del plano  $(x,y)$  y un cierto campo  $A'$  de la variable compleja  $w = u + iv$ .

Poniendo, en efecto,  $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ , la transformación resulta definida por las  $u = u(x,y)$ ,  $v = v(x,y)$ , con las  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  funciones continuas con sus derivadas primeras en  $A$  y con jacobiano igual a

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2 \neq 0,$$

(habiendo tenido en cuenta las condiciones de holomorfa y el hecho que  $f'(z) = u_x + iv_x$ ), con lo que queda demostrado lo deseado.

Sigue que, fijado un par de puntos correspondientes  $z_0$ ,  $w_0$ , se pueden construir dos entornos,  $I$  de  $z_0$  e  $I'$  de  $w_0$ , contenidos en  $A$  y  $A'$  respectivamente y en correspondencia biunívoca entre sí. Queda así definida una función  $z = g(w)$  tal que resulta  $f[g(w)] = w$ ,  $z_0 = g(w_0)$ .

Esta función  $g(w)$  resulta continua en  $I'$  y se tiene además, por la hipótesis hecha poco antes,  $f'[g(w)] \neq 0$ . Estamos en condiciones entonces de aplicar el teor. II del Cap. XVI, n° 6 y concluir que la  $z = g(w)$  es holomorfa en  $I'$ .

Queda así demostrado, bajo la condición  $f'(z) \neq 0$ , que toda función holomorfa  $w = f(z)$  admite, en pequeño, función inversa  $z = g(w)$ , también holomorfa.



## 20 - TRANSFORMACIONES CONFORMES.

Queremos ocuparnos ahora de las denominadas transformaciones planas conformes, o sea de aquellas transformaciones regulares entre dos planos que gozan de la propiedad de conservar los ángulos.

Esto significa que tomados arbitrariamente dos puntos correspondientes  $P, P'$  y dos curvas regulares  $\gamma, \gamma_1$  que parten de  $P$ , las curvas regulares correspondientes  $\gamma', \gamma'_1$  (que parten de  $P'$ ) son tales que sus tangentes en  $P'$  forma el mismo ángulo que están formando las tangentes en  $P$  a las curvas  $\gamma, \gamma_1$ .

En esta definición se ha simplemente hablado de magnitud de los ángulos sin precisar el sentido. Se pueden, sin embargo, distinguir dos tipos de transformaciones conformes: las que conservan también el sentido de los ángulos y las que, por el contrario, lo cambian. Las primeras se llaman transformaciones conformes directas; las segundas, inversas.

Demostremos ahora el siguiente teorema fundamental en el que queda sobreentendido que se consideran transformaciones regulares entre un campo  $A$  del plano  $(x, y)$  y un campo  $A'$  del plano  $(u, v)$ :

I - Condición necesaria y suficiente para que una transformación regular entre dos planos sea una transformación conforme directa es que la misma se realice mediante una función holomorfa  $w = f(z)$ , con  $f'(z) \neq 0$ .

Dem. La condición es necesaria. Sea dada la transformación regular

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad \text{con} \quad \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \neq 0 \quad (1)$$

y supongamos que sea conforme directa. Considerados dos puntos correspondien-



tes  $P$ ,  $P'$  y las curvas regulares  $\gamma$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma'_1$  ya mencionadas anteriormente, indiquemos con  $\theta$  y  $\theta_1$  los ángulos que las tangentes en  $P$  a

$\gamma$  y  $\gamma_1$  forman con el eje  $x$  y, análogamente, con  $\theta'$  y  $\theta'_1$  los ángulos que las tangentes en  $P'$  a  $\gamma'$  y  $\gamma'_1$  forman con el eje  $u$ . El ángulo de las tangentes en  $P$  a las curvas  $\gamma$  y  $\gamma_1$  resulta igual a  $\theta_1 - \theta$  y el de las tangentes en  $P'$  a las  $\gamma'$  y  $\gamma'_1$  resulta  $\theta'_1 - \theta'$ . Por hipótesis debe ser  $\theta_1 - \theta = \theta'_1 - \theta'$ , o sea,  $\theta' - \theta = \theta'_1 - \theta_1$ ; esto muestra que teniendo fijos los puntos  $P$  y  $P'$  y haciendo variar el par de curvas correspondientes  $(\gamma, \gamma')$  la diferencia  $\theta' - \theta$  se mantiene constante. Podemos entonces poner  $\theta' - \theta = \alpha$ , o sea,

$$\theta' = \alpha + \theta \quad (2)$$

donde  $\alpha$  no depende de  $(\gamma, \gamma')$ , mientras dependerá en general de  $P, P'$ .

Dicho lo cual, y teniendo en cuenta que es  $\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}$  (con los diferenciales calculados sobre  $\gamma$ ) y  $\operatorname{tg} \theta' = \frac{dv}{du}$  (con los diferenciales calculados sobre  $\gamma'$ ), sustituyamos  $\theta'$  por el valor proporcionado por la (2) y expresemos  $du, dv$  por medio de las (1).

Obtendremos

$$\operatorname{tg} (\alpha + \theta) = \frac{v_x dx + v_y dy}{u_x dx + u_y dy} \quad (3)$$

o sea

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta} = \frac{v_x + v_y \operatorname{tg} \theta}{u_x + u_y \operatorname{tg} \theta}, \quad (4)$$

debiendo ésta subsistir idénticamente respecto de  $\theta$  (ya que la (2) vale para cualquier curva  $\gamma$  que salga de  $P$ ) y para un oportuno valor de  $\alpha$  (que será función de las coordenadas  $(x, y)$  del punto  $P$ , en el que se consideran calculadas las  $u_x, u_y, v_x, v_y$ ).

Poniendo  $\theta = 0$  la (4) proporciona  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_x}{u_x}$  y de aquí que la (4) toma la forma



$$\frac{v_x + u_x \operatorname{tg} \theta}{u_x - v_x \operatorname{tg} \theta} = \frac{v_x + v_y \operatorname{tg} \theta}{u_x + u_y \operatorname{tg} \theta} \quad (5)$$

Pero esta identidad en  $\theta$  puede ser válida solamente si  $u_x = v_y$ ,  $v_y = -v_x$  y como esto debe ser cierto para todo punto  $P(x, y)$  del campo  $A$ , se concluye que la función  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  es una función holomorfa en  $A$ . Como se ha visto en el n° precedente se tiene además  $\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = |f'(z)|^2$ , de donde [por (1)] se llega a  $f'(z) \neq 0$ , que es lo que queríamos demostrar.

La condición es suficiente. Supongamos dada una transformación regular  $w = f(z)$ , con  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  holomorfa en el campo  $A$  y en  $f'(z) \neq 0$ . Para todo punto  $(x, y) \in A$  y cualquiera sea  $\theta$  subsiste la (5) (en virtud de las hipótesis de holomorfía) y entonces, tras poner  $\frac{v_x}{v_y} = \operatorname{tg} \alpha$ , vale la (4), que podrá escribirse bajo la forma (3).

Se tiene, entonces,  $\operatorname{tg} (\alpha + \theta) = \frac{dv}{du}$ , o sea,  $\operatorname{tg} (\alpha + \theta) = \operatorname{tg} \theta'$ , y entonces,  $\theta' = \alpha + \theta$ ; está última expresa precisamente, como es fácil convenirse de inmediato, que la transformación considerada es conforme directa, que es lo que queríamos demostrar.

En referencia a las transformaciones uniformes inversas se tiene, en cambio, el siguiente teorema:

**II - Condición necesaria y suficiente para que una transformación regular entre dos planos sea una transformación conforme inversa es que la misma sea realizada mediante una función holomorfa  $w = f(\bar{z})$  de la variable compleja  $\bar{z}$ , conjugada de  $z$ , con  $f'(\bar{z}) \neq 0$  (\*) .**

Dem. La demostración es idéntica a la precedente, con una sola variante: en

-----

(\*) Se puede también decir que toda transformación uniforme inversa es el producto de una simetría respecto del eje  $x$  por una transformación uniforme directa.



lugar de la  $\theta_1 - \theta = \theta'_1 - \theta'$  debe ahora considerarse la  $\theta_1 - \theta = -(\theta'_1 - \theta')$  que se puede escribir  $\theta' + \theta = \theta'_1 + \theta_1$ , de modo que la (2) viene sustituida por la  $\theta' = \alpha - \theta$ .

Es obvio entonces que, en lugar de la (5) se encuentra la

$$\frac{v_x - u_x \operatorname{tg} \theta}{u_x + v_x \operatorname{tg} \theta} = \frac{v_x + v_y \operatorname{tg} \theta}{u_x + u_y \operatorname{tg} \theta},$$

de donde debe ser  $u_x = -v_y$ ,  $u_y = v_x$ . Estas dos relaciones pueden también escribirse  $u_x = v_{-y}$ ,  $u_{-y} = -v_x$  y bajo esta forma expresan obviamente que  $u(x, y) + iv(x, y)$  es función holomorfa de  $\bar{z} = x - iy$ . Se tiene además,

$$\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ v_x & -u_x \end{vmatrix} = -(u_x^2 + v_x^2) = -|f'(z)|^2$$

donde la condición de regularidad impone que sea  $f'(z) \neq 0$ . Con esto queda probado que la condición es necesaria; invirtiendo el razonamiento se prueba la suficiencia, llegándose así a la tesis.

Refiriéndonos, por ejemplo, a las transformaciones conformes directas, detengámonos a ilustrar la condición  $f'(z) \neq 0$  que figura en el teor. I. La misma sirve para garantizar que la transformación resulte regular y podría pensarse que cabría la posibilidad de eliminarla refiriéndose a transformaciones más generales.

En cambio no es así, siendo tal condición esencial puesto que en los puntos donde resulta  $f'(z) = 0$  falta, en general, la conservación de los ángulos. Considérese, por ejemplo, la función  $w = z^2$  cuya derivada es nula en el punto  $z = 0$  que tiene, como correspondiente, el punto  $w = 0$ . Como  $\operatorname{Arg} w = 2 \operatorname{Arg} z$  es obvio que, al pasar del plano  $z$  al plano  $w$ , los ángulos de vértice  $z = 0$  no se conservan, sino que se duplican.

Agreguemos una última observación. Una transformación conforme (directa o inversa) puede pensarse como una semejanza entre los entornos infinitesimales de dos puntos correspondientes, con un factor de semejanza en general varia-



ble, cuando varían dichos puntos. En efecto, dados dos puntos correspondientes  $z$  y  $w$ , considérese un par de elementos lineales correspondientes que partan de ellos. Tales elementos tienen sus medidas dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ ds' &= \sqrt{du^2 + dv^2} = \sqrt{(u_x dx + u_y dy)^2 + (v_x dx + v_y dy)^2} = \\ &= \sqrt{(u_x dx \mp v_x dy)^2 + (v_x dx \pm u_x dy)^2} = \sqrt{(u_x^2 + v_x^2)(dx^2 + dy^2)} = |f'| ds \quad (*) \end{aligned}$$

Resulta así que al pasar del punto  $z$  al punto  $w$  los elementos lineales resultan multiplicados por el factor no nulo  $|f'|$ . Considerando otros pares de puntos correspondientes vale siempre la misma propiedad; pero, en general, con un factor distinto. Sólo en el caso que sea  $|f'| = \text{constante}$ , se tendrá una semejanza en grande.

Dejamos al lector probar que  $|f'| = \text{constante}$  implica  $f' = \text{constante}$  o sea que  $f$  es una función lineal de  $z$  o de  $\bar{z}$ .

## 21 - FUNCIONES ANALITICAS POLIDROMAS.

Consideremos ahora funciones  $w = f(z)$  polídromas, o sea tales que a cada valor  $z$  de un cierto campo le hagan corresponder varios valores de  $w$ , en número finito o infinito, pero formando un conjunto discreto (es decir, carente de puntos de acumulación).

Ejemplo importante de tal función es la  $w = \text{Log } z$  que, para  $z \neq 0$  y  $z \neq \infty$ , toma infinitos valores; en efecto, como es sabido (cfr. Cap. XI n° 9), se tiene  $\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z$ , de donde  $\text{Log } z$  queda determinado salvo múltiplos de  $2\pi i$ .

Supongamos dada una función polídroma  $w = f(z)$  definida en un cierto campo.

(\*) Los signos superiores valen para una transformación directa; los inferiores para una inversa. En el primer caso  $f'$  significa  $f'(z)$ ; en el segundo  $f'(\bar{z})$ .



Fijado en éste un punto  $z_0$ , elijamos un valor  $w_0$  entre aquellos que la  $f(z)$  asume en tal punto. Supongamos, además, que exista un campo  $A$ , que contenga  $z_0$ , tal que a cada punto  $z$  del mismo sea posible asociarle un valor  $w$  entre aquellos que en él asume la  $f(z)$ , de modo que para  $z = z_0$  resulta  $w = w_0$  y que la correspondencia unívoca entre  $z$  y  $w$  así obtenida genere una función continua en todo  $A$ .

Esta función monódroma y continua  $w = w(z)$ , con  $w_0 = w(z_0)$ , toma el nombre de rama o determinación de la función polídroma y el campo  $A$  en que ha sido definida toma el nombre de campo de monodromía.

Naturalmente tal rama (con su correspondiente campo de monodromía) depende de la elección del valor inicial  $w_0$  fijado en el punto  $z_0$ ; variando la elección de  $w_0$  obtendremos distintas ramas de la  $f(z)$ . La función polídroma  $f(z)$  será denominada analítica si, siendo posible la construcción antedicha, fijados arbitrariamente  $z_0$  y el valor inicial correspondiente  $w_0$  (entre los posibles), la rama que queda así definida resulta ser una función holomorfa en el correspondiente campo de monodromía.

## 22 - ESTUDIO DE LA FUNCION LOGARITMO.

Para aclarar los precitados conceptos los aplicaremos ahora a la función  $\text{Log } z$  de la que queremos separar las distintas determinaciones y elegir los campos de monodromía.

Recordemos que en el Cap. XI, n° 9 se había definido ya el logaritmo principal,  $\log z$ ; el mismo no es sino una rama de la función  $\text{Log } z$  que tiene como campo de monodromía al plano privado del origen, de los puntos del semieje real negativo y del punto al infinito. Sabemos que en tal campo el logaritmo principal es una función holomorfa.



Pero procedamos ahora como se dijo en el  $n^o$  precedente. Fijado el punto  $z_0 \neq 0$  (finito), sea  $A$  el campo circular de centro  $z_0$  y radio  $|z_0|$ .

Hagamos ver que  $A$  es un campo de monodromía para nuestra función. En efecto, elegido un valor  $\theta_0$  de  $\arg z_0$ ; asumamos como valor inicial de la función

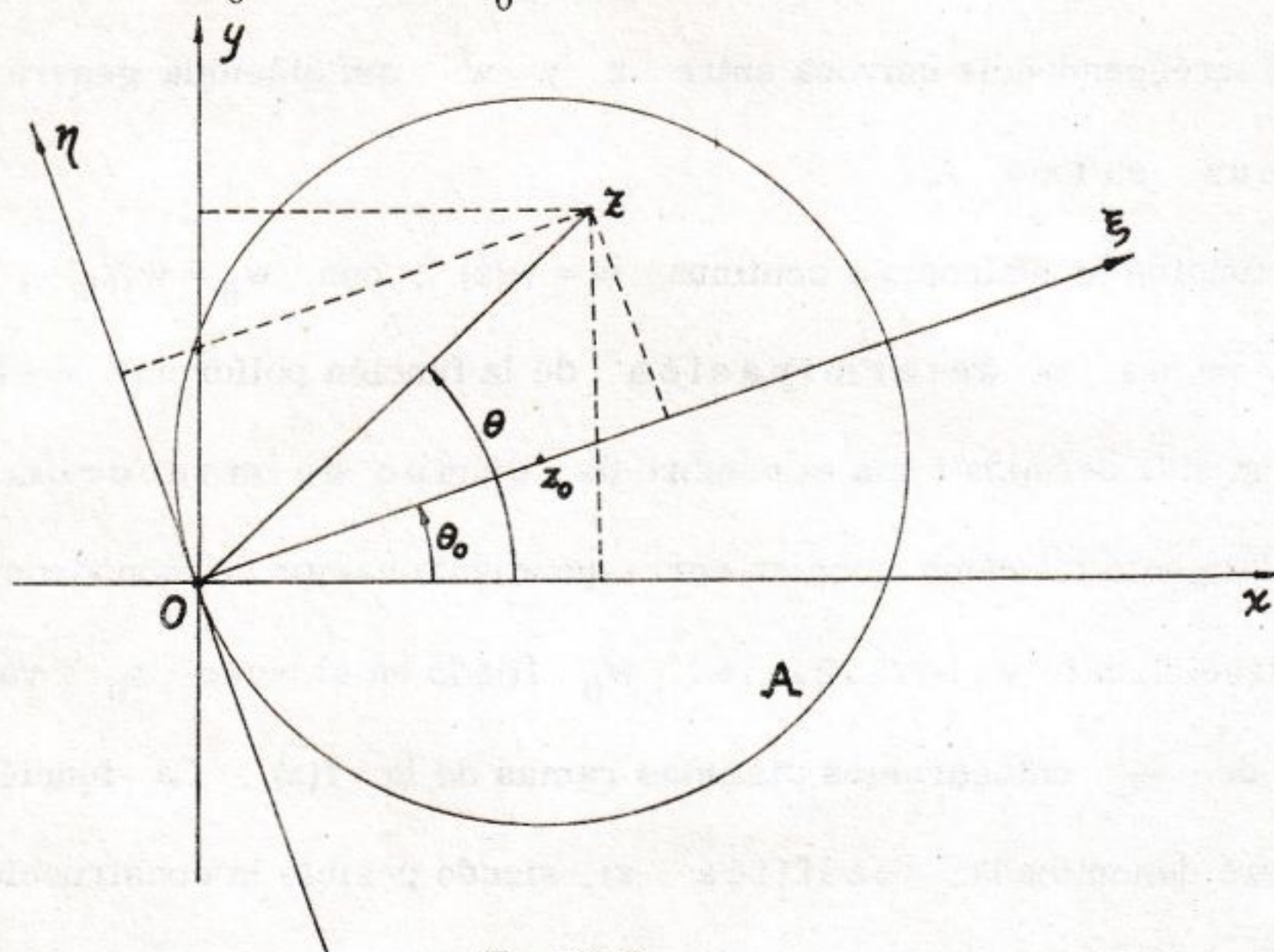


Fig. 83

ción a

$$\log z_0 + i \theta_0 . \quad (1)$$

Para todo otro punto de  $A$  tomemos como valor de  $\arg z$  aquel valor  $\theta$  perfectamente determinado por la desigualdad  $\theta_0 - \frac{\pi}{2} < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{2}$ , y entonces, como valor de  $\text{Log } z$  asumimos el siguiente

$$w = \log |z| + i \theta , \quad (\text{con } \theta_0 - \frac{\pi}{2} < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{2}) . \quad (2)$$

Es evidente que variando  $z$  en  $A$ , esta función monódroma (2) resulta continua y que, para  $z = z_0$ , asume el valor inicial fijado (1). Entonces la (2) define una rama de nuestra función polídroma  $\text{Log } z$  y  $A$  es un campo de monodromía.

Demostremos ahora que la función (2) es holomorfa en  $A$ . Considerando, junto con los ejes coordenadas  $x$  e  $y$  otros dos ejes  $\xi$ ,  $\eta$  obtenidos de



los precedentes con una rotación de amplitud  $\theta_0$  alrededor del origen, la (2) puede evidentemente escribirse

$$w = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2) + i (\theta_0 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi}) . \quad (3)$$

Las coordenadas originales  $(x, y)$  y las nuevas  $(\xi, \eta)$  del punto  $z$  están vinculadas por las conocidas relaciones

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \theta_0 - \eta \operatorname{sen} \theta_0 & \xi &= x \cos \theta_0 + y \operatorname{sen} \theta_0 \\ y &= \xi \operatorname{sen} \theta_0 + \eta \cos \theta_0 & \eta &= -x \operatorname{sen} \theta_0 + y \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (4)$$

que provienen de la  $x + iy = (\xi + i\eta) e^{i\theta_0}$ , por lo que se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cos \theta_0 - \frac{\partial}{\partial \eta} \operatorname{sen} \theta_0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{sen} \theta_0 + \frac{\partial}{\partial \eta} \cos \theta_0. \quad (4')$$

De las (3), (4') sigue, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left( \frac{-\eta}{\eta^2 + \xi^2} \cos \theta_0 - \frac{\xi}{\eta^2 + \xi^2} \operatorname{sen} \theta_0 \right), \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2} + i \left( \frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2} \operatorname{sen} \theta_0 + \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \cos \theta_0 \right), \end{aligned}$$

vale decir, teniendo en cuenta el primer grupo de fórmulas (4) y del hecho que  $x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2$ :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{i}{x + iy}$$

Se ve que las derivadas parciales  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$  son continuas en  $A$  y verifican las relaciones  $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y}$ ; entonces la rama (2) que hemos construido en  $A$  es una función holomorfa con derivada  $\frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}$ .

Teniendo en cuenta la arbitrariedad de la elección de  $z_0$  (distinto de cero y de  $\infty$ ) y del valor inicial (1) (entre los posibles), llegamos a la conclusión que la función polídroma  $\operatorname{Log} z$  es analítica en el sentido precisado en el n° 1.

Teniendo fijo  $z_0$  y variando la elección de  $\theta_0$ , es claro que el valor inicial (1) queda cambiado por múltiplos de  $2\pi i$  y de la (2) resulta también evidente que la nueva rama que se obtiene difiere de la precedente solamente por una cons-



tante, igual al citado múltiplo de  $2\pi i$ .

Entonces, en el campo  $A$  recién mencionado se pueden definir infinitas ramas de la función  $\text{Log } z$  diferentes entre sí por múltiplos de  $2\pi i$  y, por ende, todos con la misma derivada  $\frac{1}{z}$ . Si después se hace variar  $z_0$ , para cada nueva posición se obtendrán otras infinitas ramas con otros campos de monodromía.

Examinemos ahora si es posible ampliar los citados campos circulares de monodromía y vincular entre sí las distintas ramas obtenidas en correspondencia con distintas posiciones de  $z_0$ .

Elegidos arbitrariamente en el plano complejo dos puntos  $z_0, z'$  (distintos de cero y de  $\infty$ ), unámoslos con una curva  $L$  regular, simple, que no contenga al origen.

Consideremos la familia de todos los círculos (abiertos)  $C_p$  que tienen sus centros en un punto cualquiera de  $L$  y un radio fijo  $r$ . Ciertamente será posible elegir  $r$  de modo que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

1<sup>o</sup>) Ninguno de los  $C_p$  contiene al origen; 2<sup>o</sup>) cada círculo  $C_p$  tiene puntos comunes solamente en aquellos círculos  $C_{p'}$  cuyo centro  $P'$  cae sobre un oportuno arco de la curva  $L$  que contiene a  $P$  (\*).

-----

(\*) Esta segunda condición expresa que no debe verificarse el caso representado en la fig. 84 en la que el círculo  $C_p$  tiene puntos comunes no sólo con todos los círculos que tienen los centros sobre el arco  $\alpha\beta$ , sino también con otros círculos  $C_{p'}$  que tienen el centro fuera de dicho arco.

(Bastará empujarse el radio de los círculos para evitar que se presente tal caso).

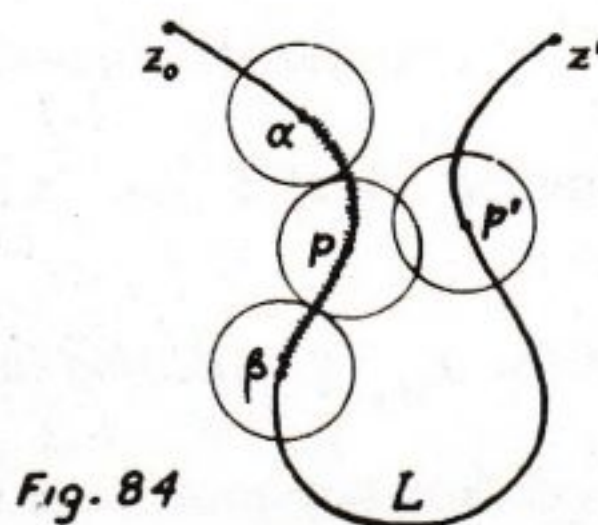


Fig. 84



Fijado  $r$  de tal modo dividamos la curva  $L$  en  $n$  arcos parciales mediante los puntos  $z_0, z_1, \dots, z_n \equiv z'$ , de modo que cada arco tenga longitud menor que  $r$ ; esto implica, entre otras cosas.

$$|z_k - z_{k-1}| < r, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

Designemos después con  $C_0, C_1, \dots, C_n$  a los círculos abiertos que tienen el centro en los puntos  $z_0, z_1, \dots, z_n$ ; ninguno de tales círculos contiene el origen y, por la (5), cada círculo  $C_k$ , ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) contiene el centro  $P_{k+1}$  del círculo sucesivo  $C_{k+1}$ . Además supondremos que el radio  $r$  se ha elegido de forma tal que la intersección entre  $C_{k+1}$  y el campo constituido por la unión de los círculos precedentes  $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$  coincida con la intersección entre  $C_{k+1}$  y el círculo precedentes  $C_k$ .

Cada círculo  $C_k$  está contenido en el campo circular  $A_k$  de centro  $z_k$  y radio  $|z_k|$  que, como ya se ha visto, es un campo de monodromía para  $\text{Log } z$ .

Por lo tanto, fijado en el punto  $z_0$  un valor  $(\text{Log } z_0)_0$  del logaritmo queda determinado (en  $A_0$  y por ende) en  $C_0$  una rama del logaritmo que indicaremos con  $(\text{Log } z)_0$ .

El círculo  $C_0$  contiene  $z_1$  y, como consecuencia, la rama citada proporciona en tal punto el valor  $(\text{Log } z_1)_0$  del logaritmo; este valor determina (en  $A_1$  y por ende) en  $C_1$  una rama del logaritmo que indicaremos con  $(\text{Log } z)_1$ , resultando  $(\text{Log } z_1)_1 = (\text{Log } z_1)_0$ . En la parte común a  $C_0$  y  $C_1$  quedan simul

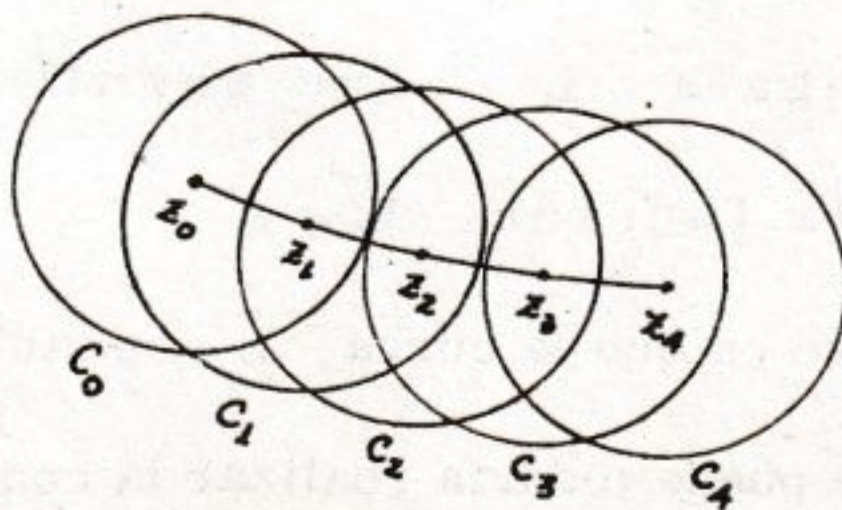


Fig. 85



táneamente definidas las dos ramas  $(\text{Log } z)_0$  y  $(\text{Log } z)_1$  que pueden, en general, coincidir o diferir en un múltiplo de  $2\pi i$ ; pero como ambas asumen el mismo valor en el punto  $z_1$ , esto excluye la segunda eventualidad. Entonces  $(\text{Log } z)_0$  en  $C_0$  y  $(\text{Log } z)_1$  en  $C_1$  definen una única función monódroma y holomorfa en  $C_0 \cup C_1$ .

El campo  $C_0 \cup C_1$  contiene al punto  $z_2$  y la precedente función proporciona en  $z_2$  el valor  $(\text{Log } z_2)_1$  del logaritmo; este valor inicial determina (en  $A_2$  y por ende) en  $C_2$  una rama del Logaritmo que indicaremos con  $(\text{Log } z)_2$ , te niéndose  $(\text{Log } z_2)_2 = (\text{Log } z_2)_1$ . Como antes se ve que en la parte común a  $C_0 \cup C_1$  y  $C_2$  (que coincide con la parte común entre  $C_1$  y  $C_2$ ) las dos ramas  $(\text{Log } z)_1$  y  $(\text{Log } z)_2$  coinciden y se deduce que  $(\text{Log } z)_0$  en  $C_0$ ,  $(\text{Log } z)_1$  en  $C_1$ ,  $(\text{Log } z)_2$  en  $C_2$  proporcionan una única función monódroma y holomorfa en  $C_0 \cup C_1 \cup C_2$ .

El campo  $C_0 \cup C_1 \cup C_2$  contiene al punto  $z_3$  y se puede repetir el razonamiento llegándose así a una función monódroma y holomorfa en  $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ .

Prosiguiendo de este modo se llega a definir en  $C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$  una única rama monódroma y holomorfa de la función  $\text{Log } z$ .

Queda entonces establecido que, fijados arbitrariamente dos puntos  $z_0, z'$  distintos de cero y de  $\infty$  o también: fijada arbitrariamente una curva simple  $L$  (que no contenga el origen) ] es siempre posible construir un campo que contenga  $z_0$  y  $z'$  ] o también: que contenga a  $L$  ] que resulta de monodromía y de holomorfía para la función  $\text{Log } z$ .

Examinemos ahora el caso en que la curva  $L$  es simple y cerrada (es decir en la que  $z' \equiv z_0$ ). Se puede todavía realizar la construcción precedente; pero es claro que, de cualquier modo que se fije el radio  $r$  de los círculos considera-



dos, se llegará siempre a un círculo  $C_{k+1}$  tal que la intersección entre  $C_{k+1}$  y el campo  $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$  no coincidirá con la intersección entre  $C_{k+1}$  y  $C_k$ . Por ejemplo, en la fig. 86, el círculo  $C_7$  tiene por intersección

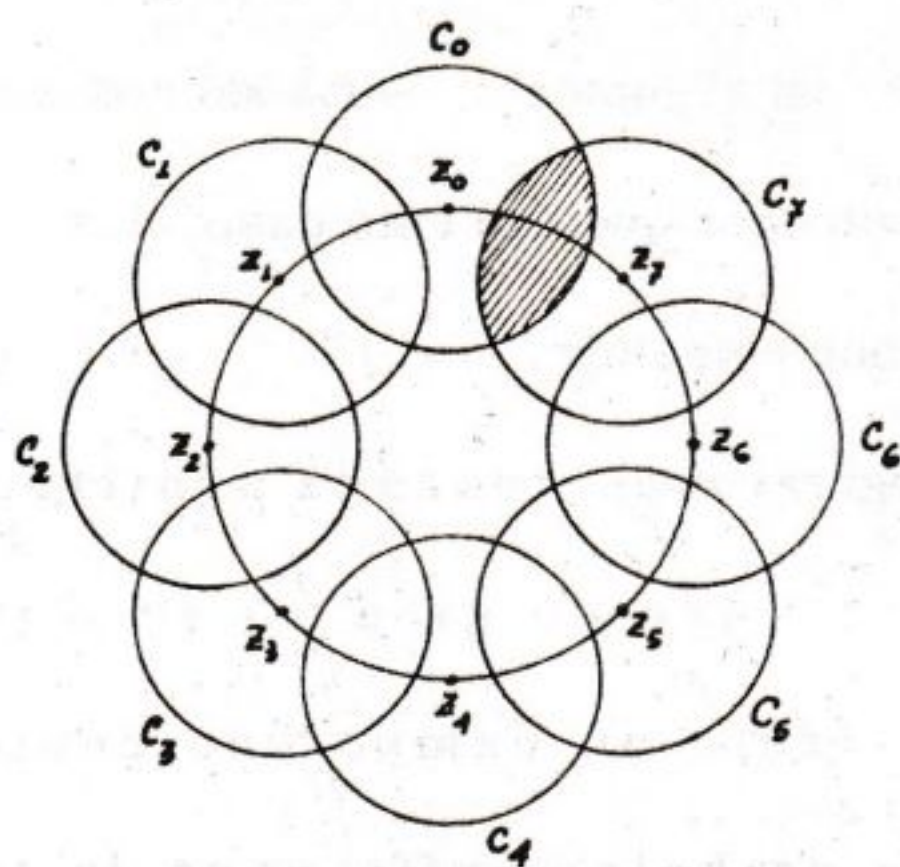


Fig. 86

con el campo  $C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_6$  no sólo la parte común a  $C_6$  y  $C_7$  sino también otra parte (la sombreada) común a  $C_0$  y  $C_7$ .

Por lo tanto, en el caso actual, en el campo  $C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$ , que contiene a  $L$  se presentan seguramente zonas en las que se han definido simultáneamente varias ramas  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  entre las  $(\text{Log } z)_0, (\text{Log } z)_1, \dots, (\text{Log } z)_n$  definidas sucesivamente en  $C_0, C_1, \dots, C_n$  y tales ramas exhiben índices no consecutivos  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  por ejemplo, en la zona sombreada en la fig. 86, están definidas  $(\text{Log } z)_0$  y  $(\text{Log } z)_7$ . En particular, como  $z_n \equiv z' \equiv z_0$ , el último círculo  $C_n$  coincide con el primero  $C_0$  de modo que en el mismo círculo resultan definidas las dos ramas  $(\text{Log } z)_0$  y  $(\text{Log } z)_n$ . ¿Se puede decir que coincidan? Nótese que las consideraciones precedentes no lo aseguran; dicho análisis establece solamente que cada rama  $(\text{Log } z)_{k+1}$  coincide con la precedente  $(\text{Log } z)_k$  en  $C_k \cap C_{k+1}$ .

Para contestar a la pregunta es necesario distinguir dos casos según que la curva simple y cerrada  $L$  gire, o no, alrededor del origen.

Supongamos que  $L$  no gire alrededor del origen; entonces, al variar  $z$  en



ella, la determinación construida etapa por etapa por  $\text{Log } z$  varía con continuidad; esto significa que varía con continuidad el argumento de  $z$ .

Ahora queda en claro que cuando  $z$  describe una curva cerrada, sin girar alrededor del origen  $z = 0$  su argumento, variando con continuidad, retorna al valor inicial. Concluimos entonces que, en este caso, las dos determinaciones  $(\text{Log } z)_0$  y  $(\text{Log } z)_n$  deben coincidir.

Podemos por lo tanto asegurar que: trazada arbitrariamente una curva simple cerrada  $L$  que no gire alrededor del origen, es siempre posible construir un campo que contenga a  $L$  que sea de monodromía y de holomorfía para la función  $\text{Log } z$ .

Si en cambio el punto  $z$  describe una curva  $L$  simple y cerrada que gire alrededor del origen es evidente que su argumento, variando con continuidad, no vuelve al valor inicial  $\theta_0$  sino que llega, luego del giro, con un valor  $\theta_0 + 2\pi$  o  $\theta_0 - 2\pi$  según que el giro se haya realizado en sentido positivo o negativo. Por lo tanto, la determinación  $(\text{Log } z)_n$  definida en  $C_n \equiv C_0$  no coincide con la  $(\text{Log } z)_0$  definida en el mismo campo, difiriendo de la misma por la constante  $\pm 2\pi i$ .

Entonces: dada una curva  $L$  simple y cerrada que gire alrededor del origen, no es posible construir para  $\text{Log } z$  un campo de monodromía que contenga dicha curva  $L$ .

Naturalmente lo mismo puede decirse para curvas  $L$  cerradas (no simples) que giren varias veces alrededor del origen en un sentido o en el otro; es fácil convencerse que, realizando la construcción antes indicada a lo largo de tal curva, sucede que, en el primer y último círculo sobrepuestos, las correspondientes determinaciones  $(\text{Log } z)_0$  y  $(\text{Log } z)_n$  no coinciden pero se tiene  $(\text{Log } z)_n = (\text{Log } z)_0 + 2k\pi i$  donde  $k$  (entero positivo o negativo) indica el número de vuel-



tas que la curva  $L$  gira (en sentido positivo o negativo) alrededor del origen.

De estas consideraciones sigue que un campo puede ser de monodromía para la función polídroma  $\text{Log } z$  solamente si en él no es posible trazar curvas cerradas que giran alrededor del origen.

Obsérvese, por ejemplo, que así son el campo constituido por todo el plano privado de los puntos  $z = x + iy$  para los que se tiene  $y = 0$ ,  $x < 0$  (en el que se ha estudiado el logaritmo principal) y el campo circular  $A$  considerado al principio de este n° 22.

---

En todo lo dicho, el punto  $z = 0$  ha cumplido un rol de gran importancia en el estudio de la función polídroma  $\text{Log } z$ , mientras no se ha puesto en evidencia la del punto  $z = \infty$  que debería tener una importancia similiar. Para explicar este hecho es necesario referirse a la esfera compleja. Es evidente que sobre tal esfera no tendría más sentido decir que una curva gire o no alrededor del punto  $z = 0$ ; cualquier curva cerrada trazada sobre la esfera (que no pase ni por  $z = 0$ , ni por  $z = \infty$ ) gira tanto alrededor del primer punto como del segundo.

Sin embargo a una curva cerrada del plano que no gire alrededor del origen corresponde una curva de la esfera que deja de una misma parte tanto al  $z = 0$  como al  $z = \infty$ , por lo que puede decirse que recorriendo tal curva se gira en el mismo sentido alrededor de ambos puntos. En cambio, a una curva cerrada del plano que gire alrededor del origen corresponde sobre la esfera una curva que deja en partes opuestas los puntos  $z = 0$  y  $z = \infty$ , de donde puede decirse que recorriendo tal curva se gira alrededor de  $z = 0$  en un sentido y alrededor de  $z = \infty$  en el sentido opuesto.

Llegamos, entonces, a que los dos puntos,  $z = 0$ ,  $z = \infty$ , tienen el mismo



papel; recorriendo una curva que gira el mismo número de vueltas alrededor de ellos, una determinación del logaritmo (variando con continuidad) regresa al valor inicial; en cambio, recorriendo una curva que gira un número opuesto de veces alrededor de los dos puntos, la fijada determinación del logaritmo no regresa al valor inicial.

---

Podemos entonces llegar a la conclusión que, para obtener un campo de monodromía para la función  $\text{Log } z$  es necesario elegir un campo en el que no se pueda girar alrededor de los puntos  $z = 0$ ,  $z = \infty$ . Para tener tal campo basta, evidentemente, unir los puntos  $z = 0$ ,  $z = \infty$  con una línea  $\Lambda$  y cortar el plano a lo largo de dicha línea (es decir, considerar el campo obtenido del plano retirándole los puntos de la línea  $\Lambda$ ). En tal campo, apenas se fije el valor de  $\text{Log } z$  en un punto, queda individualizada una determinación del logaritmo que se puede extender con continuidad a todo el campo sin que jamás llegue a confundirse con otras determinaciones.

Recordemos todavía una vez el ejemplo del logaritmo principal en el que como línea  $\Lambda$  se ha tomado el semieje real negativo; obsérvese que en ese caso debía necesariamente tomarse tal línea puesto que sobre ellas el logaritmo principal presenta una discontinuidad. Pero el caso es que en esta circunstancia se fijó primero la determinación del logaritmo y posteriormente se ha debido escoger la línea  $\Lambda$  de un modo oportuno.

En cambio se puede fijar primero la línea  $\Lambda$  y después, una vez establecido el valor inicial en un punto, considerar la determinación que resulte.

Resumiendo: para la función  $\text{Log } z$  hemos encontrado que tiene infinitas ramas que se van cambiando cuando se hace recorrer a la variable curvas que giran alrededor de los puntos  $z = 0$  y  $z = \infty$ . Por esta razón estos puntos se deno-



minan puntos críticos o de diramación para la función polídroma  $\text{Log } z$ .

### 23 - PUNTOS CRITICOS O DE DIRAMACION; OTROS EJEMPLOS DE FUNCIONES POLIDROMAS.

Si volvemos a considerar una función polídroma genérica  $w = f(z)$  veremos que se verifica en general la existencia de puntos críticos o de diramación, así como se han presentado para la función  $\text{Log } z$ .

Son puntos tales que, cuando la variable  $z$  realiza giros alrededor de ellos, las distintas determinaciones de la función  $f(z)$  se cambian entre sí. Puede suceder que el número de las determinaciones sea finito o infinito; en el primer caso el punto se denomina algebraico, en el segundo caso trascendente. Podemos entonces decir que la función  $\text{Log } z$  tiene los puntos  $z = 0$ ,  $z = \infty$  como puntos críticos trascendentes.

En general para tener campos de merodromía de la función  $f(z)$  se hace necesario cortar el plano según curvas que unan, de modo oportuno, los puntos críticos.

Sin entrar en un estudio general nos contentaremos con dar algunos otros ejemplos importantes y típicos de funciones polídromas.

---

Estudiemos la función  $z^\alpha = e^{\alpha \text{Log } z}$  que es, en general, polídroma, siéndolo el  $\text{Log } z$ , y es fácil constatar que se obtienen los mismos puntos de diramación  $z = 0$ ,  $z = \infty$  de  $\text{Log } z$ . En efecto, trazando una línea simple y cerrada que gire una vez alrededor del punto  $z = 0$ , partamos de un punto  $z_0$  de la misma fijando un valor,  $(\text{Log } z)_0$ , entre los posibles del logaritmo y, por ende, el valor  $e^{\alpha(\text{Log } z)_0}$  de nuestra función  $z^\alpha$ . Tras haber recorrido tal línea en el sentido positivo y una vez de retorno en el punto  $z_0$ , se llegará a este punto



no con el valor inicial sino con el valor

$$e^{\alpha(\text{Log } z_0)_1} = e^{\alpha[(\text{Log } z_0)_0 + 2\pi i]} = e^{\alpha(\text{Log } z_0)_0} \cdot e^{\alpha 2\pi i},$$

que es igual al inicial multiplicado por el factor  $e^{\alpha 2\pi i}$ . Análogamente, recorriendo una curva que gire  $n$  veces alrededor del origen en un cierto sentido, se retorna a  $z_0$  con el valor inicial multiplicado por  $e^{n\alpha 2\pi i}$  ( $n$  positivo o negativo).

De lo que precede se deduce que la función  $z^\alpha$  puede, inclusive, no ser polídroma; esto sucede cuando el citado factor  $e^{\alpha 2\pi i}$  resulta igual a 1, vale decir, cuando  $\alpha$  es un número entero (positivo, negativo o nulo). Si  $\alpha$  no es entero la función es polídroma y surge la cuestión de examinar si los puntos de diramación son algebraicos o trascendentes. Se verificará el primer caso si para cierto  $n > 1$  resulta

$$e^{n\alpha 2\pi i} = 1; \quad (1)$$

en este caso, suponiendo que  $n$  sea el primer entero para el que eso se verifica es evidente que nuestra función  $z^\alpha$  tendrá precisamente  $n$  valores, y los puntos de diramación resultan algebraicos. Pero la (1) puede subsistir solamente si  $n\alpha$  es un entero, vale decir, si  $\alpha$  es un número racional.

En todos los casos restantes ( $\alpha$  irracional o complejo) no existirá ningún valor  $n$  capaz de verificar la (1) y, en consecuencia, la función  $z^\alpha$  tiene infinitas determinaciones y los puntos de diramación resultan trascendentes.

Concluyendo: la función  $z^\alpha$  es monódroma para  $\alpha$  entero, tiene un número finito de determinaciones si  $\alpha$  es racional y tiene infinitas determinaciones en todos los otros casos. Excluido el caso de  $\alpha$  entero, todo giro alrededor del origen en sentido positivo altera el valor inicial por el factor  $e^{\alpha 2\pi i}$ .

Por ejemplo, la función  $\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$  es polídroma con dos valores. Cuando  $z$  gira alrededor del origen las dos determinaciones de  $\sqrt{z}$  se cambian entre sí;



tras dos giros se retorna a la determinación inicial. Análogamente para  $\sqrt[n]{z}$  que vuelve al valor inicial después de  $n$  giros.

Examinemos ahora la función  $w = \text{Arctg } z$  que está definida por la fórmula (Cap. XI, n° 9) :

$$\text{arctg } z = \frac{1}{2i} \text{Log } \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{1}{2i} \text{Log } \frac{i - z}{i + z} . \quad (2)$$

Se trata, evidentemente, de una función polídroma de tipo logarítmico cuyos puntos de diramación son aquellos donde la función  $\frac{i - z}{i + z}$  vale cero o infinito: es decir los puntos  $z = \pm i$ .

Podemos también escribir

$$\text{Arctg } z = \frac{1}{2i} [ \text{Log } (i - z) - \text{Log } (i + z) ]$$

y las permutaciones de las distintas determinaciones se obtienen recorriendo caminos cerrados alrededor de los puntos  $z = \pm i$ .

Supongamos, entonces, una vez fijados el punto  $z_0$  en el plano y un valor inicial  $(\text{Arctg } z_0)_0$ , que se haga recorrer en sentido positivo una curva simple y cerrada que gire alrededor de  $z = i$ , dejando fuera de la misma al punto  $z = -i$ .

El  $\text{log } (i - z)$ , tras un giro, aumenta en  $2\pi i$ , mientras que el  $\text{Log } (i + z)$  retorna al valor inicial, por lo que la función  $\text{Arctg } z$  toma el nuevo valor

$$(\text{Arctg } z_0)_0 + \pi .$$

Si el camino cerrado se hubiera trazado alrededor de  $z = -i$ , dejando fuera  $z = i$ , la función  $\text{Arctg } z$ , tras un giro (en el sentido positivo), habría asumido el valor

$$(\text{Arctg } z_0)_0 - \pi .$$

Si el camino se hubiera trazado alrededor de los dos puntos críticos, tras un giro la función habría retornado al valor inicial, así como sucede para la función  $\text{Log } z$  cuando se recorre una curva que no gira alrededor de  $z = 0$  (vale decir



que gira el mismo número de vueltas alrededor del origen y alrededor del punto al infinito).

Individualizado una rama monódroma las otras se obtienen, entonces, agregando o quitando múltiplos de  $\pi$ , y la derivada es la misma para todas las ramas, con el valor

$$\frac{1}{2i} \left\{ \frac{-1}{i-z} - \frac{1}{i+z} \right\} = \frac{1}{1+z^2}$$

Para obtener un campo de monodromía basta entonces considerar, por ejemplo,

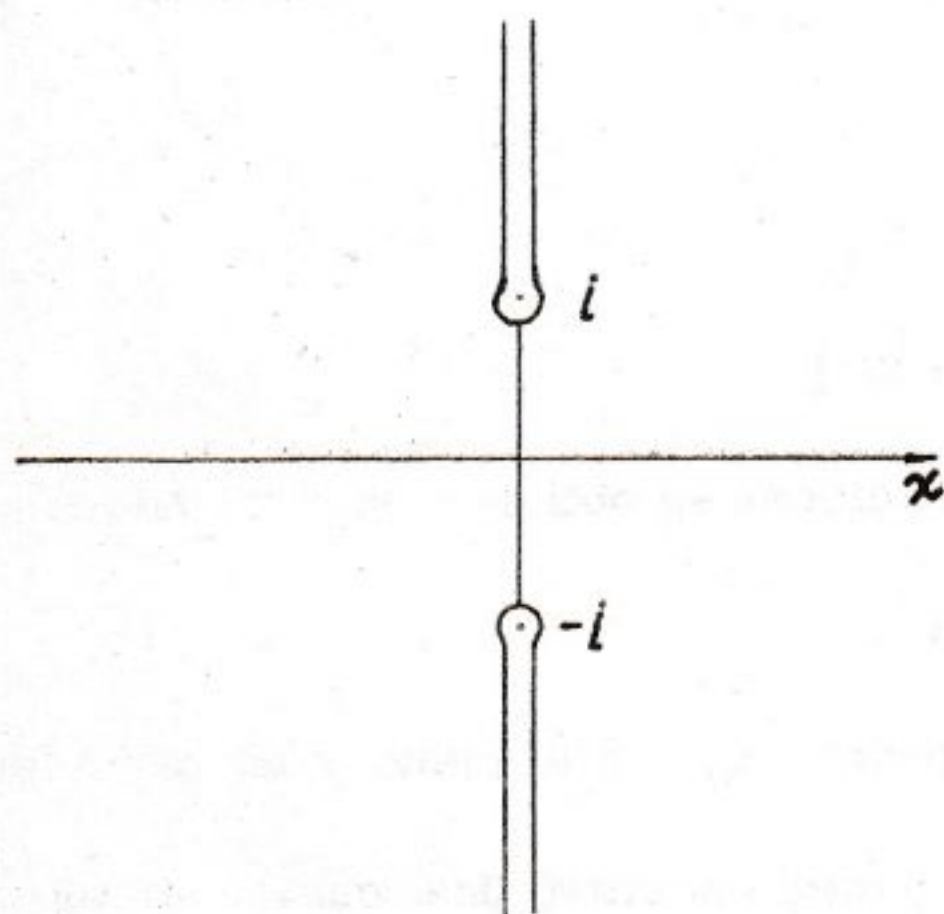


Fig. 87

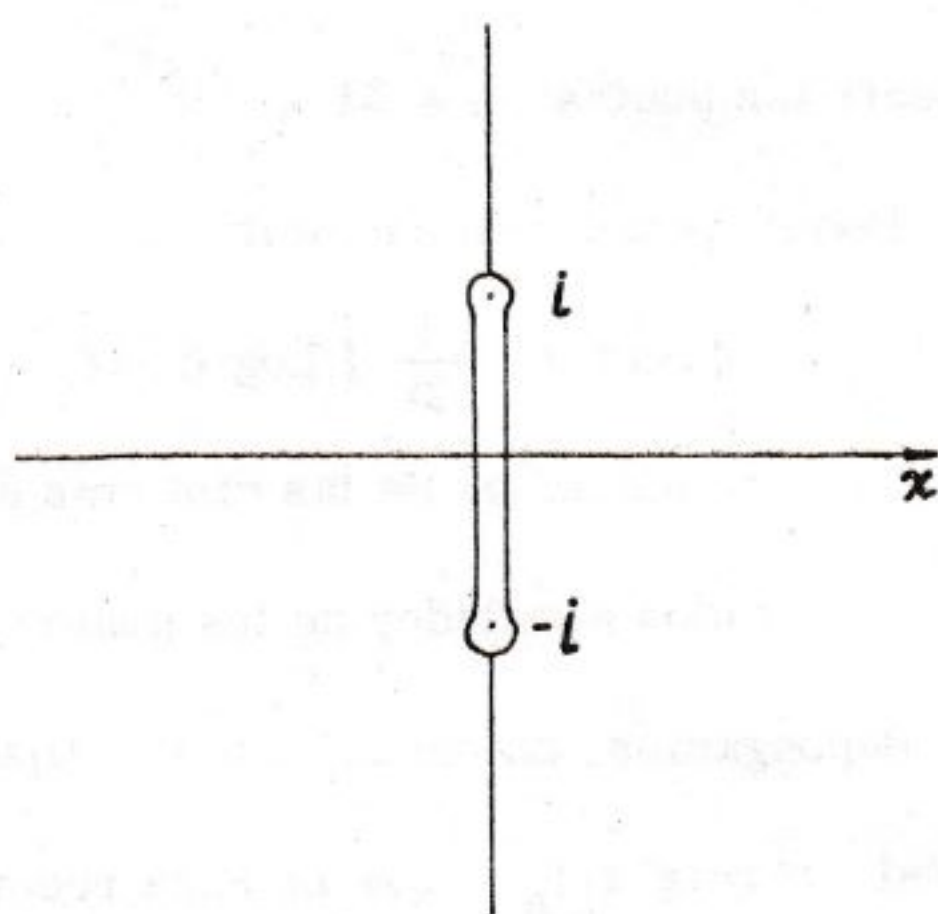


Fig. 88

el plano privado de los puntos del segmento que une  $z = i$  con  $z = -i$ ; tal segmento puede ser formado sólo por puntos finitos o contener el punto  $z = \infty$ .

En el campo real la función  $\text{Arctg } x$  tiene un gráfico formado por infinitas ramas factibles de ser superpuestas por traslación en dirección del eje de las ordenadas con amplitud igual o múltiplo de  $\pi$  y no se ve como se puede pasar con continuidad de una rama a la otra. En el campo complejo tal pasaje se efectúa claramente recorriendo una curva cerrada alrededor de  $z = i$  o de  $z = -i$ .

#### 24 - ALGUN CASO DE REPRESENTACION DE UNA FUNCION POLÍDROMA EN EL ENTORNO DE UN PUNTO CRITICO.

Sea  $f(z)$  una función polídroma,  $z_0$  un punto de diramación finito de la misma y supongamos que  $f(z)$  sea analítica en un entorno  $I$  de radio  $\rho$  de tal



punto. Deseamos señalar algunos casos en los que, para  $0 < |z - z_0| < \rho$ , la  $f(z)$  pueda ser representada mediante un oportuno desarrollo en serie.

Fijemos en  $I$  un punto  $z$  y uno de los posibles valores  $f_0(z)$ , de los que la función asume en él, y hagamos recorrer a  $z$  un camino cerrado alrededor de  $z_0$ .

Supongamos haber encontrado como valor final  $f_1(z)$  de la  $f(z)$ , uno igual al inicial aumentado en una constante, vale decir,

$$f_1(z) = f_0(z) + c.$$

Consideremos entonces, junto con la función dada, a la función  $\text{Log}(z - z_0)$ , cuyo valor aumenta, como habíamos visto (nº 22) tras un giro alrededor del punto de diramación  $z_0$ , en  $2\pi i$ ; es decir que

$$[\text{Log}(z - z_0)]_1 = [\text{Log}(z - z_0)]_0 + 2\pi i$$

y, multiplicando ambos miembros de esta igualdad por el valor  $\frac{c}{2\pi i}$ , obtenemos una función con comportamiento análogo al de la  $f(z)$ , ya que subsiste la relación

$$\left[ \frac{c}{2\pi i} \text{Log}(z - z_0) \right]_1 = \left[ \frac{c}{2\pi i} \text{Log}(z - z_0) \right]_0 + c.$$

Entonces la diferencia

$$f(z) - \frac{c}{2\pi i} \text{Log}(z - z_0) \tag{1}$$

resulta una función monódroma y holomorfa en el entorno  $I$  privado, a lo sumo, del punto  $z_0$ . Por lo tanto, para  $0 < |z - z_0| < \rho$ , la (1) es desarrollable en serie de Laurent y puede escribirse:

$$f(z) - \frac{c}{2\pi i} \text{Log}(z - z_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Observemos que al punto de diramación se le puede superponer una singularidad polar o esencial según que, en la serie, el número de los coeficientes de índice negativo (distintos de cero) sea finito o infinito, respectivamente.



Supongamos, en cambio, que fijado un valor inicial de la función,  $f_0(z)$ , y recorrida una línea cerrada alrededor del punto de diramación, se encuentra como valor final el valor

$$f_1(z) = f_0(z) \cdot c$$

donde  $c$  es una constante. En este caso se considera, junto a la función  $f(z)$  aquella  $(z - z_0)^\alpha$ , para la que, como es sabido (nº 28) se tiene

$$[(z - z_0)^\alpha]_1 = [(z - z_0)^\alpha]_0 \cdot e^{\alpha 2\pi i}.$$

Es obvio que si se elige  $\alpha$  de modo que  $e^{\alpha 2\pi i} = c$ , es decir,  $\alpha = \frac{\text{Log } c}{2\pi i}$ , se obtiene una función con comportamiento análogo a la  $f(z)$ , es decir,

$$\left[ (z - z_0)^{\frac{\text{Log } c}{2\pi i}} \right]_1 = \left[ (z - z_0)^{\frac{\text{Log } c}{2\pi i}} \right]_0 \cdot c.$$

El cociente

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{\frac{\text{Log } c}{2\pi i}}}$$

resulta entonces función monódroma y holomorfa para  $z \in I$ ,  $z \neq z_0$  y, por ende, desarrollable en serie de Laurent

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{\frac{\text{Log } c}{2\pi i}}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k;$$

es decir, en el entorno del punto de diramación, vale para la  $f(z)$  una representación del tipo .

$$f(z) = (z - z_0)^{\frac{\text{Log } c}{2\pi i}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

y también en este caso puede superponerse al punto  $z_0$  de diramación una singularidad polar o esencial.

---

Supongamos ahora que la  $f(z)$  sea polídroma con  $n$  valores y que, fijado un punto  $z_0$  y uno de los posibles valores de la función en él, la  $f(z)$  vuelva a tomar el valor inicial sólo luego de  $n$  giros alrededor del punto de diramación.



Realicemos entonces un cambio de variables poniendo  $z - z_0 = t^n$ , de donde  $f(z) = f(z_0 + t^n) = g(t)$ . Si se observa que mientras  $z$  realiza  $n$  giros alrededor del punto  $z_0$ , la variable  $t$  realiza un giro alrededor del punto  $t = 0$ , y si se tiene en cuenta la hipótesis hecha, se ve que, mientras la variable  $t$  cumple un giro alrededor del punto  $t = 0$ , la  $g(t)$  retorna al valor inicial. Es decir que el punto  $t = 0$ , que corresponde al punto  $z = 0$ , no es más punto de diramación para la  $g(t)$ , la que resulta por lo tanto holomorfa en un entorno del punto  $t = 0$ , privado de dicho punto. Se tiene, en definitiva, para  $g(t)$  un desarrollo de Laurent del tipo

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k t^k$$

y entonces, volviendo a la variable primitiva, encontramos que para nuestra  $f(z)$  vale en  $I$  (excluyendo  $z_0$ ) el siguiente desarrollo

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{\frac{k}{n}},$$

es decir, un desarrollo en serie de potencias (con exponente positivo o negativo) de la variable  $(z - z_0)^{\frac{1}{n}}$ .

Como de costumbre al punto de diramación puede superponerse una singularidad polar o esencial de la función.

En los tres casos típicos examinados se ha supuesto que el punto de diramación fuese finito. Si en cambio cayese en  $z = \infty$  basta efectuar el cambio de variable  $z = \frac{1}{t}$  para llevarlo al punto  $t = 0$  y luego aplicar los resultados precedentes. Por ejemplo, en el primer caso, se tendría para la función  $f(\frac{1}{t})$  un desarrollo del tipo

$$\frac{c}{2\pi i} \text{Log } t + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k t^k$$

y volviendo a la variable original se llega a la conclusión que en el entorno de  $z = \infty$  se tiene



$$f(z) = \frac{c}{2\pi i} \operatorname{Log} \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$$

## 25 - POLIDROMIA DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCION HOLOMORFA EN UN CAMPO VARIAS VECES CONEXO.

Retomemos las consideraciones del n<sup>o</sup> 4. Si  $f(z)$  es una función holomorfa en un campo  $A$  simplemente conexo y  $z_0, z$  son dos puntos de dicho campo sabemos que, fijada arbitrariamente una línea regular  $C$  que una los dos puntos, la integral de la  $f(z)$  a lo largo de la misma depende solamente de los extremos  $z_0, z$  y no del camino de integración elegido. Se puede poner, entonces,

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \quad (1)$$

y sabemos que esta  $F(z)$  resulta holomorfa en  $A$ , con  $F'(z) = f(z)$ .

Tengamos presente que estos resultados dependen del hecho que la forma diferencial lineal  $f_x dx + i f_y dy$  resulta en  $A$  un diferencial exacto como consecuencia de las condiciones de holomorfía y de la hipótesis que  $A$  sea simplemente conexo.

Recordemos también que esta última hipótesis interviene de modo esencial por el hecho que, tomadas en  $A$  dos curvas  $C$  y  $C_1$  que unen los dos puntos  $z_0$  y  $z$  tales de no admitir otros puntos en común, la curva simple y cerrada  $C - C_1$  constituye la frontera de un dominio  $D$  contenido en  $A$  (y, en efecto, aplicando a este dominio  $D$  las fórmulas de Green se llegaba a demostrar la integridad de la forma).

---

Veamos ahora qué sucede cuando  $A$  (conexo) no es simplemente conexo. Tal campo puede ser acotado o no; comencemos suponiendo que sea acotado y, para fijar las ideas, refirámonos al caso que  $A$  sea el interior de un dominio regular de varios contornos. Diremos que  $A$  presenta lagunas designando con tal



nombre a los dominios (que no forman parte de  $A$ ) que están delimitados por los contornos internos. Si el campo posee  $k$  lagunas, recibe el nombre de  $(k+1)$  veces conexo, ya que son necesarios  $k$  cortes (de un punto de cada uno de los contornos internos a un punto del contorno externo) para transformarlo en simplemente conexo; véase la fig. 89 donde  $k = 2$ .

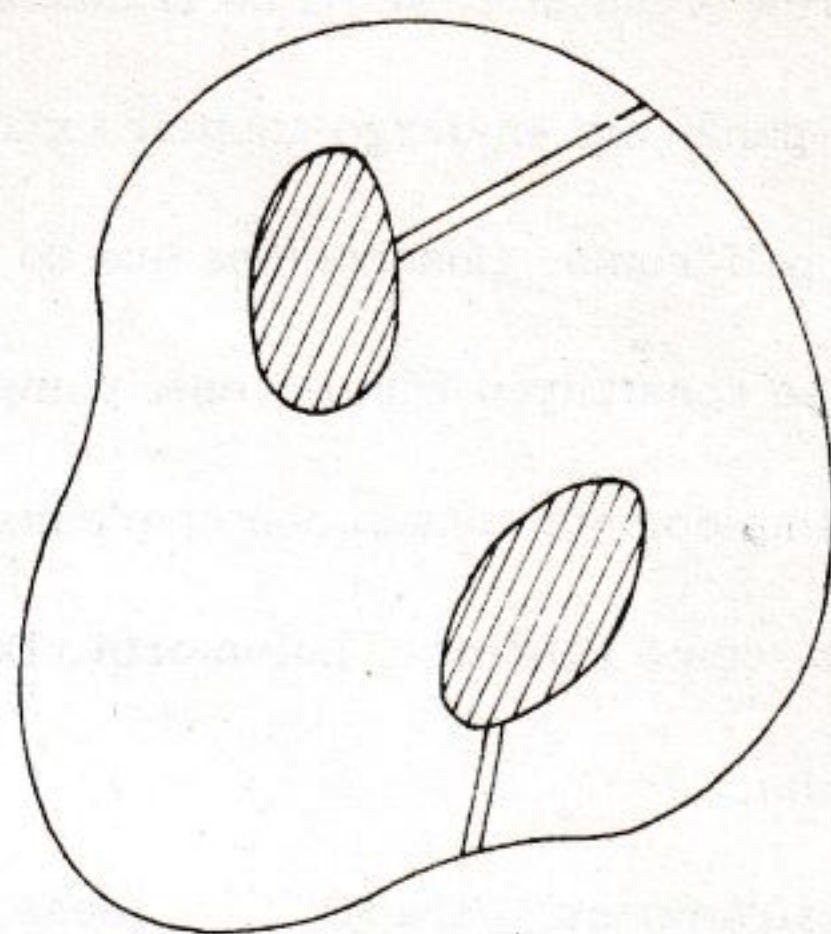


Fig. 89

Tomados en  $A$  dos puntos  $z_0$ ,  $z$  y trazada una línea regular  $C$  que los una podemos todavía considerar la integral

$$\int_{C(z_0, z)} f(\zeta) d\zeta ; \quad (2)$$

pero, en general, sucederá que el valor de la misma cambiará al cambiar el camino de integración. Por ejemplo (ver fig. 90), no puede asegurarse que las curvas  $C$  y  $C_1$  proporcionen el mismo valor a la integral (2) porque ellas no constituyen la frontera completa de un dominio contenido en  $A$ , de donde no se puede hacer el razonamiento antes recordado (que equivale a una aplicación del teorema de Cauchy).

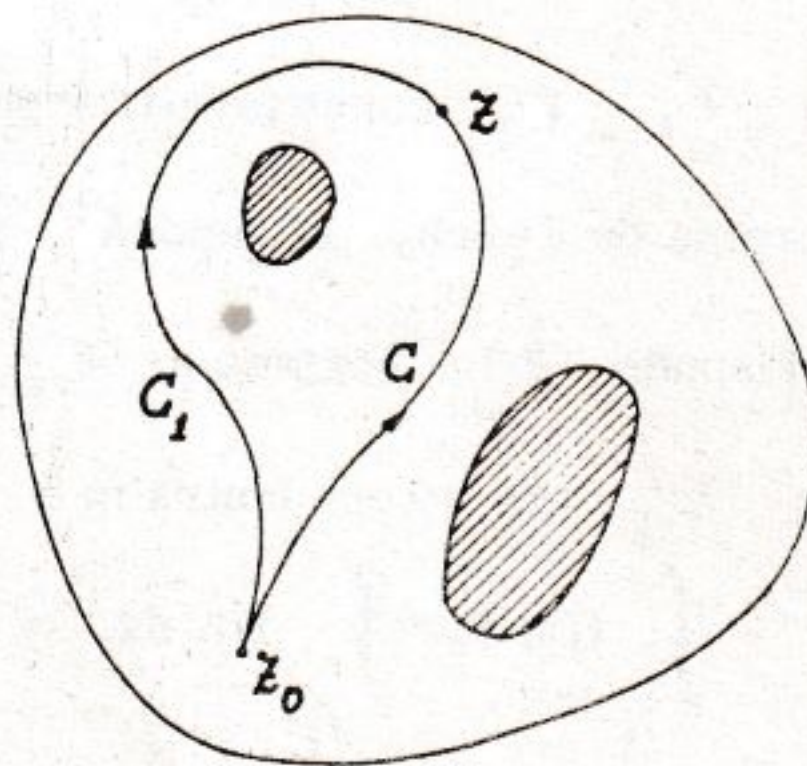


Fig. 90

Por lo tanto la integral (2) no puede designarse, en general, con el símbolo (1) puesto que no tiene más un valor bien



determinado una vez fijado  $z$ , sino que, para un mismo  $z$  puede tener varios valores según la elección de la curva  $C$  que une  $z_0$  con  $z$ .

Se puede sin embargo adoptar todavía la (1) si  $F(z)$  es considerada una función polídroma. Observemos que se trata de una función analítica, puesto que para ella se construyen rápidamente campos de monodromía (basta transformar a  $A$  en simplemente conexo con oportunos cortes) en cada uno de los que la  $F(z)$  resulta, como sabemos, holomorfa. Deseamos ahora estudiar la polidromía de esta función.

Refirámonos, para fijar las ideas, al caso de un campo 3 veces conexo (es decir con dos lagunas). Sean  $\gamma_1, \gamma_2$  dos curvas simples y cerradas que giren al rededor de la primera y de la segunda laguna, respectivamente, dejando en el exterior a la otra. Pongamos

$$\int_{+\gamma_1} f(z) dz = w_1, \quad \int_{+\gamma_2} f(z) dz = w_2 \quad (3)$$

y observemos que estos dos números dependen solamente del campo  $A$  y de la función  $f(z)$ , y no de las particulares curvas cerradas consideradas. En efecto, considerando, por ejemplo,  $w_1$  sea  $\gamma'_1$  otra curva cerrada (en las mismas condiciones que  $\gamma_1$ ) tal que no se encuentra con la propia  $\gamma_1$ ; entonces la curva  $\gamma_1 - \gamma'_1$  constituye la frontera de un dominio contenido en  $A$  y, por el teorema de Cauchy, se tendrá  $\int_{\gamma_1 - \gamma'_1} f(z) dz = 0$ , vale decir  $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma'_1} f(z) dz$ .

Si después  $\gamma'_1$  cortase a  $\gamma_1$  se podrá siempre elegir una tercera curva cerrada  $\gamma''_1$  que no encuentra ni a  $\gamma_1$  ni a  $\gamma'_1$ , teniéndose entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma''_1} f(z) dz \quad \int_{\gamma'_1} f(z) dz = \int_{\gamma''_1} f(z) dz,$$

y, por lo tanto, resultará todavía

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma'_1} f(z) dz.$$

Los números  $w_1, w_2$  definidos por la (3) se denominan los períodos



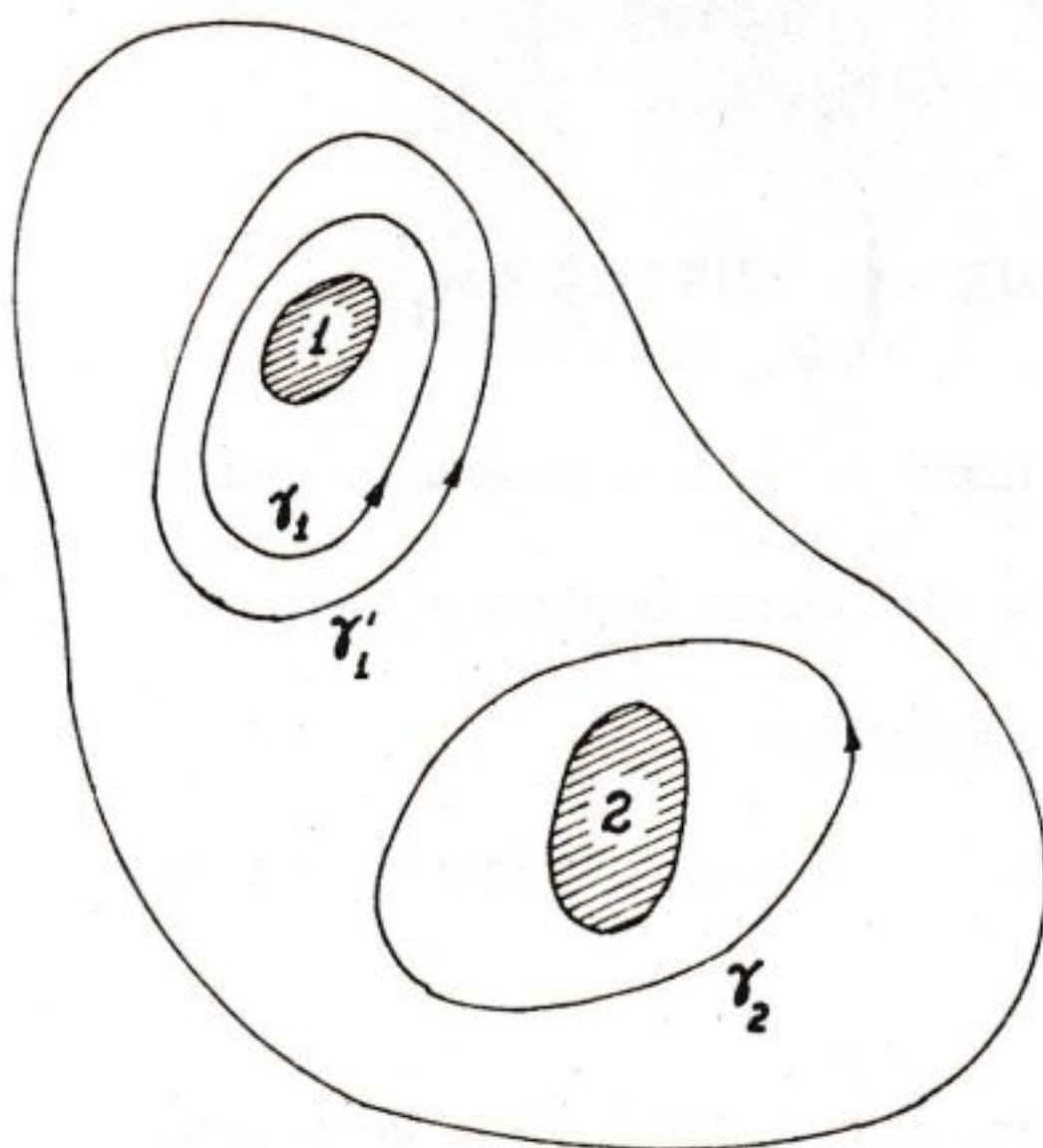


Fig. 91

de la integral (1) que estamos estudiando.

Dicho esto, si trazamos en  $A$  dos curvas  $C$  y  $C_1$ , que unan los puntos  $z_0$ ,  $z$  de modo tal que  $C - C_1$  delimite por sí sola un dominio contenido en  $A$ , resultará por el teorema de Cauchy,

$$\int_{C(z_0, z)} f(z) dz = \int_{C_1(z_0, z)} f(z) dz.$$

Supongamos, en cambio que  $C - C_1$  encierre, por ejemplo, la primer laguna; entonces, trazada una curva cerrada  $\gamma_1$  que gire alrededor de la primer laguna y sea interior a la curva  $C - C_1$  se obtendrá un dominio contenido en  $A$  tal que su frontera estará constituida por  $C$ ,  $C_1$ , y  $\gamma_1$ , teniéndose por lo tanto (en el caso de la fig. 92):

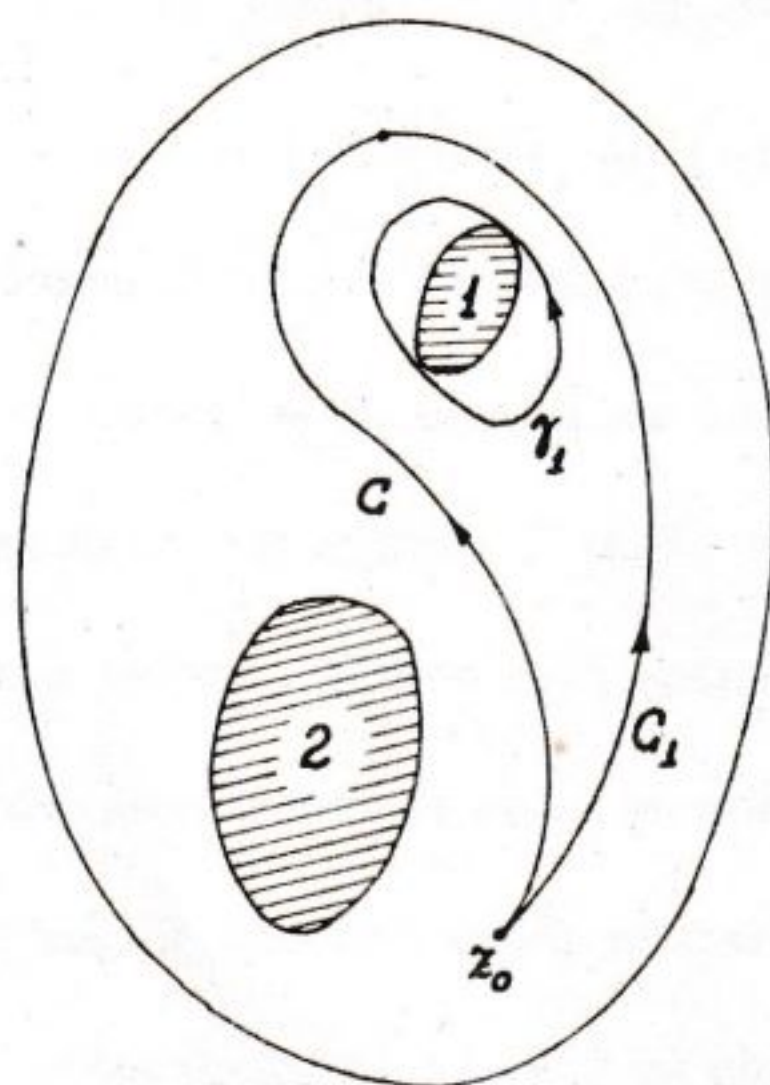


Fig. 92



vale decir

$$\int_{C_1(z_0, z)} f(\zeta) d\zeta - \int_{C(z_0, z)} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta = 0 ,$$

$$\int_{C_1(z_0, z)} f(\zeta) d\zeta = \int_{C(z_0, z)} f(\zeta) d\zeta + w_1 .$$

Usando la curva  $C_1$  en lugar de la  $C$  encontramos entonces al valor precedente aumentando en  $w_1$ ; se habría podido también encontrar una disminución en  $w_1$ , disponiendo las curvas de otro modo.

Análogamente, con referencia a la segunda laguna (aumento o disminución en  $w_2$ ).

Tras esto resulta claro que, una vez fijada para la integral (1) cierto valor, en correspondencia a una determinada elección de la curva  $C$ , cuando se vaya a elegir otra curva  $C_1$  se obtendrán, para la misma integral, otros valores que diferirán del precedente en una combinación lineal de los períodos  $w_1$  y  $w_2$ , con coeficientes enteros (positivos, negativos o nulos). Se tendrá, entonces, en general

$$\int_{C_1(z_0, z)} f(\zeta) d\zeta = \int_{C(z_0, z)} f(\zeta) d\zeta + n_1 w_1 + n_2 w_2 , \quad (4)$$

con  $n_1, n_2$  enteros relativos, proporcionando el segundo miembro de la (4) todos los posibles valores para nuestra integral (1).

Hemos así puesto en evidencia la totalidad de los valores que puede asumir la función  $F(z)$ . Nótese que no queda dicho sin más que la  $F(z)$  sea polídroma, porque muy bien podría suceder que ambos períodos fueran nulos. Pero si uno por lo menos de ellos es distinto de cero, la  $F(z)$  asume infinitos valores.

Deseamos ahora analizar mejor la naturaleza de la polidromía de la  $F(z)$ .

Fijado un camino de integración  $C$ , nace para la  $F(z)$  cierto valor en el punto  $z$ , valor que indicaremos con

$$[F(z)]_0 = \int_{C(z_0, z)} f(\zeta) d\zeta$$



Hagamos ahora recorrer a  $z$  un camino cerrado  $\gamma_1$  que gire una sola vez en el sentido positivo alrededor de la primera laguna. El valor inicial de  $F(z)$  es  $[F(z)]_0$ ; el valor final  $[F(z)]_1$  coincide evidentemente con el valor que asume la integral (2) cuando como camino de integración se asuma  $C + \gamma_1$ , teniéndose en consecuencia

$$[F(z)]_1 = \int_{C(z_0, z)} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_1} f(z) dz = [F(z)]_0 + w_1.$$

Entonces por cada giro realizado por la variable  $z$  alrededor de una (sola) laguna, en el sentido positivo, la  $F(z)$  se incrementa en el período correspondiente. La  $F(z)$  se comporta, entonces, como una función polídroma que tiene un punto de diramación de tipo logarítmico (cfr. n<sup>o</sup> 4) en el interior de cada laguna.

Continuemos refiriéndonos al caso de dos lagunas y fijemos en el interior de una de ellas un punto  $z_1$  y en el interior de la otra un punto  $z_2^{(*)}$  y junto a la función  $F(z)$  consideremos las dos funciones

$$\frac{w_1}{2\pi i} \text{Log}(z - z_1), \quad \frac{w_2}{2\pi i} \text{Log}(z - z_2)$$

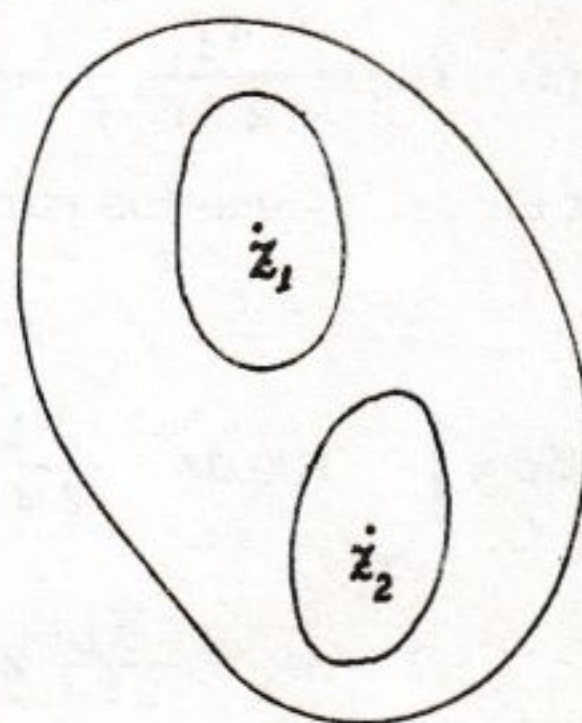


Fig. 93

que, en un giro positivo alrededor de sus respectivos puntos de diramación, se incrementan en  $w_1$  y  $w_2$ . Entonces la función

$$\Phi(z) = F(z) - \frac{w_1}{2\pi i} \text{Log}(z - z_1) - \frac{w_2}{2\pi i} \text{Log}(z - z_2)$$

resulta monódroma en  $A$  y la naturaleza de la  $F(z)$  queda en evidencia en la fórmula

$$F(z) = \frac{w_1}{2\pi i} \text{Log}(z - z_1) + \frac{w_2}{2\pi i} \text{Log}(z - z_2) + \Phi(z) + c \quad (5)$$

-----

(\*) Téngase presente que las lagunas pueden reducirse a puntos; más aún, éste es el caso más común y tales puntos son puntos singulares aislados de  $f(z)$ .



con  $\Phi(z)$  monódroma. Se ha agregado en el segundo miembro una constante arbitraria  $c$  con lo que se tiene en cuenta la arbitrariedad de la elección del límite inferior de integración  $z_0$  en la integral (1).

Como fijada una rama monódroma de la  $F(z)$  (en el campo  $A$  cortado oportunamente), su derivada  $f'(z)$  resulta igual a  $f(z)$  y puesto que, según la (4), todas las otras ramas de  $F(z)$  difieren de la precedente por constantes, se concluye que la  $f(z)$  admite en  $A$  función primitiva, en general polídroma, del tipo (5). La monodromía de la primitiva se obtiene solamente si  $A$  es simplemente conexo (por la ausencia de períodos o si, siendo  $A$  múltiplemente conexo, todos los períodos son nulos).

Se puede entonces llegar a la (5) observando que la función

$$\varphi(z) = f(z) - \frac{w_1}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1} - \frac{w_2}{2\pi i} \frac{1}{z - z_2} \quad (6)$$

es holomorfa en  $A$  y que los períodos de su integral indefinida son nulos; en efecto

$$\begin{aligned} \int_{+\gamma_1} \varphi(z) dz &= \int_{+\gamma_1} f(z) dz - \frac{w_1}{2\pi i} \int_{+\gamma_1} \frac{dz}{z - z_1} - \frac{w_2}{2\pi i} \int_{+\gamma_1} \frac{dz}{z - z_2} = \\ &= w_1 - \frac{w_1}{2\pi i} 2\pi i - \frac{w_2}{2\pi i} 0 = 0, \end{aligned}$$

ya que resultan  $\int_{+\gamma_1} \frac{dz}{z - z_1} = 2\pi i$ ,  $\int_{+\gamma_1} \frac{dz}{z - z_2} = 0$ , por el teorema de los residuos.

Entonces la primitiva  $\Phi(z)$  de la  $\varphi(z)$ , que evidentemente está expresada por la

$$\Phi(z) = F(z) - \frac{w_1}{2\pi i} \text{Log}(z - z_1) - \frac{w_2}{2\pi i} \text{Log}(z - z_2) - c,$$

es monódroma en  $A$ , reencontrándose la (5).

Estudiemos ahora el caso en que el campo  $A$  sea no acotado suponiendo, sin embargo, acotada su frontera. Continuemos suponiendo que tenga conexión 3, es



decir que la frontera esté constituida por dos curvas cerradas (constituidas por puntos finitos).

Sea  $f(z)$  una función holomorfa en  $A$ ; como antes puede considerarse la integral (1) con  $z_0, z$  ambos finitos, considerar los períodos  $w_1$  y  $w_2$  y llegar a la fórmula (5).

Queda solamente por estudiar el comportamiento de  $F(z)$  en el punto  $z = \infty$ , es decir, estudiar si puede hablarse de la integral de una curva  $C$  que una el punto  $z_0$  con el punto al infinito.

Con ese motivo volvamos a considerar la función (6). Por hipótesis la  $f(z)$  es holomorfa en el punto  $z = \infty$ ; tales son también los otros dos términos del segundo miembro y entonces  $\varphi(z)$  es holomorfa en  $z = \infty$  y se tiene  $\varphi(\infty) = f(\infty)$ . Demostremos que el residuo  $R_\infty$  de la  $\varphi(z)$  en el punto al infinito vale cero.

Por definición es

$$R_\infty = -\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \varphi(z) dz,$$

donde  $\gamma$  es una curva cerrada que contiene en su interior todas las lagunas de  $A$ . Por otra parte designando como de costumbre con  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  a dos curvas cerradas que circunden las lagunas, internas a  $\gamma$ , se tiene, por el teorema de Cauchy

$$\int_{+\gamma} \varphi(z) dz - \int_{+\gamma_1} \varphi(z) dz - \int_{+\gamma_2} \varphi(z) dz = 0;$$

pero las dos última integrales son nulas [porque la  $\varphi(z)$  tiene períodos nulos]

y, entonces  $\int_{+\gamma} \varphi(z) dz = 0$ , o sea,  $R_\infty = 0$ .

De lo dicho sigue que en el desarrollo de Laurent de la  $\varphi(z)$  en un entorno de  $z = \infty$ , debe resultar  $a_{-1} = 0$ , o sea que tal desarrollo será del tipo

$$\varphi(z) = f(\infty) + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-3}}{z^3} + \dots$$

La primitiva  $\Phi(z)$  de la  $\varphi(z)$ , que resulta holomorfa en  $A$ , tendrá como



desarrollo el siguiente

$$\Phi(z) = f(\infty) \cdot z - \frac{a_{-2}}{z} - \frac{a_{-3}}{2z^2} \dots\dots$$

y, en consecuencia, tiene en general en el punto  $z = \infty$  un polo de 1<sup>er</sup> orden (salvo que sea  $f(\infty) = 0$ ).

Sustituyendo en la (5) se concluye que si  $A$  es no acotado, la primitiva  $F(z)$  es una función polídroma con los puntos de diramación  $z_1, z_2, \infty$  (de tipo logarítmico), superponiéndose a este último un polo de primer orden en el caso que sea  $f(\infty) \neq 0$ .

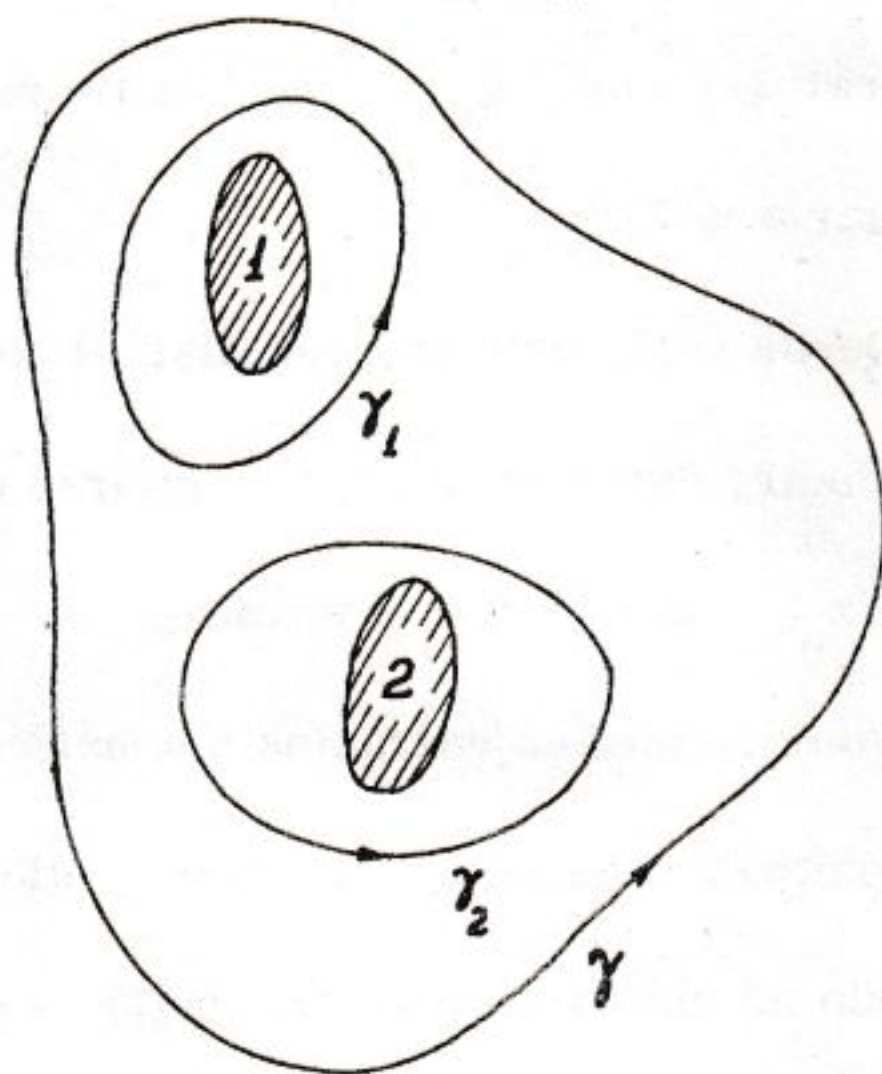


Fig. 94

## 26 - NOCIONES SOBRE LA TEORIA GENERAL DE LAS FUNCIONES ANALITICAS.

Las funciones polídromas de las que se ha hablado y las funciones holomorfas (o analíticas monódromas) constituyen en conjunto la clase de las funciones analíticas de la variable compleja  $z$ . Sabemos que toda función holomorfa es, en un entorno oportuno de su punto de holomorfía  $z_0$ , representable con una serie de potencias de  $z - z_0$ . Lo mismo vale para cada rama de una función polídroma, considerado en su campo de monodromía. Entonces, una función analítica genera infinitas series de potencias.

Weierstrass ha demostrado (con su teoría del prolongamiento analítico) que, viceversa, dada una serie de potencias con radio de convergencia no nulo, se pueden deducir de ella otras infinitas series de potencias que, en conjunto, definen una función analítica en cierto campo  $A$ , la que puede resultar monódroma o polídroma.



Por este camino (que identifica el concepto de función analítica con el de serie de potencias) se puede construir una teoría rigurosa de las funciones analíticas; pero nos dispensamos de exponerla siendo suficiente, para las aplicaciones más comunes, las consideraciones desarrolladas.



## CAPITULO XXXII

### Nociones sobre cálculo de variaciones

#### 1 - EL CONCEPTO DE FUNCIONAL Y EL CALCULO DE VARIACIONES .

En los capítulos precedentes nos hemos referido explícitamente a las funciones de punto y las funciones de dominio; pero también hemos encontrado varios otros tipos de funciones, es decir, de correspondencias entre elementos variables y números. Por ejemplo, la integral definida  $\int_a^b f(x) dx$ , con  $a$  y  $b$  fijos, tiene un valor que puede considerarse "función" de la función  $f(x)$  a integrar; el valor  $y(x_1)$ , en un punto asignado  $x_1$ , de aquella integral de la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$  que verifica la condición inicial  $y(x_0) = y_0$ , es un número que puede considerarse "función" de la función  $f(x, y)$ .

Es entonces natural introducir el siguiente concepto general de función: dado un conjunto  $E$  de elementos  $x$  de cualquier naturaleza (números, puntos, conjuntos, funciones de puntos, ...) , si existe una ley que a cada elemento  $x \in E$  le haga corresponder un bien determinado número (real o complejo)  $u$ , se dice que  $u$  es una función (real o compleja) del elemento  $x$ , definida en el conjunto  $E$ . En ese caso se usan también notaciones del tipo  $u = f(x)$ . Es necesario, sin embargo, advertir que, cuando se le da esta acepción general, es habitual sustituir la palabra función por el término funcional; se dice, en ese caso, que,  $u$  es un funcional de  $x$  definido en  $E$  y el elemento variable  $x$  se llama, a menudo, el argumento del funcional.

Introducido este concepto, es lógico que surjan para los funcionales cuestiones si



milares a las ya consideradas para las funciones de punto; en particular puede plantearse el problema de la búsqueda de los máximos y mínimos de un funcional (real). El estudio de este problema constituye el capítulo del Análisis Matemático que se denomina Cálculo de Variaciones y que tiene gran importancia, tanto teórica como aplicativa. Se trata, sin embargo, de estudios bastante difíciles y de ahí que nos contentaremos con dar una idea de los métodos más elementales (con origen en Euler y Lagrange), sin entrar en el desarrollo moderno de la teoría.

Nos referiremos, sobre todo, a una categoría particular de funcionales: a aquellos  $J(y)$ , cuyo argumento  $y$  sea una función derivable  $y = y(x)$  de una variable  $x$ , que estén expresados por una fórmula del tipo:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x)] dx \quad ; \quad (1)$$

de lo que diremos resultará clara la posibilidad de realizar algunas extensiones.

Con respecto a (1) supondremos, ahora con mayor detalle, que  $A$  sea un dominio internamente conexo del plano  $xy$ , y la función  $f(x, y, y')$  de las tres variables reales  $x, y, y'$ , sea continua para  $(x, y) \in A$ ,  $+\infty < y' < -\infty$ .

Fijados ahora dos puntos interiores de  $A$ ,  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  consideraremos la familia  $\Phi$  constituida por todas las funciones reales  $y = y(x)$  que, en  $(x_1, x_2)$ , son continuas junto con sus derivadas primeras y que tienen una gráfica, de puntos extremos  $P_1, P_2$ , constituida totalmente por puntos del dominio  $A$  (ver fig. 95).

En correspondencia a cada una de estas curvas el funcional (1) adquiere un valor determinado  $J = J(y)$ .

Trataremos de determinar qué curvas de la familia  $\Phi$  hacen asumir a  $J(y)$  el máximo y el mínimo valor. El problema así planteado consiste, entonces, en la busqueda del máximo y del mínimo absoluto (\*) de  $J(y)$ ; pero, como en el ca-

(\*) Existe un teorema general que extiende al caso de los funcionales el conocido teorema de



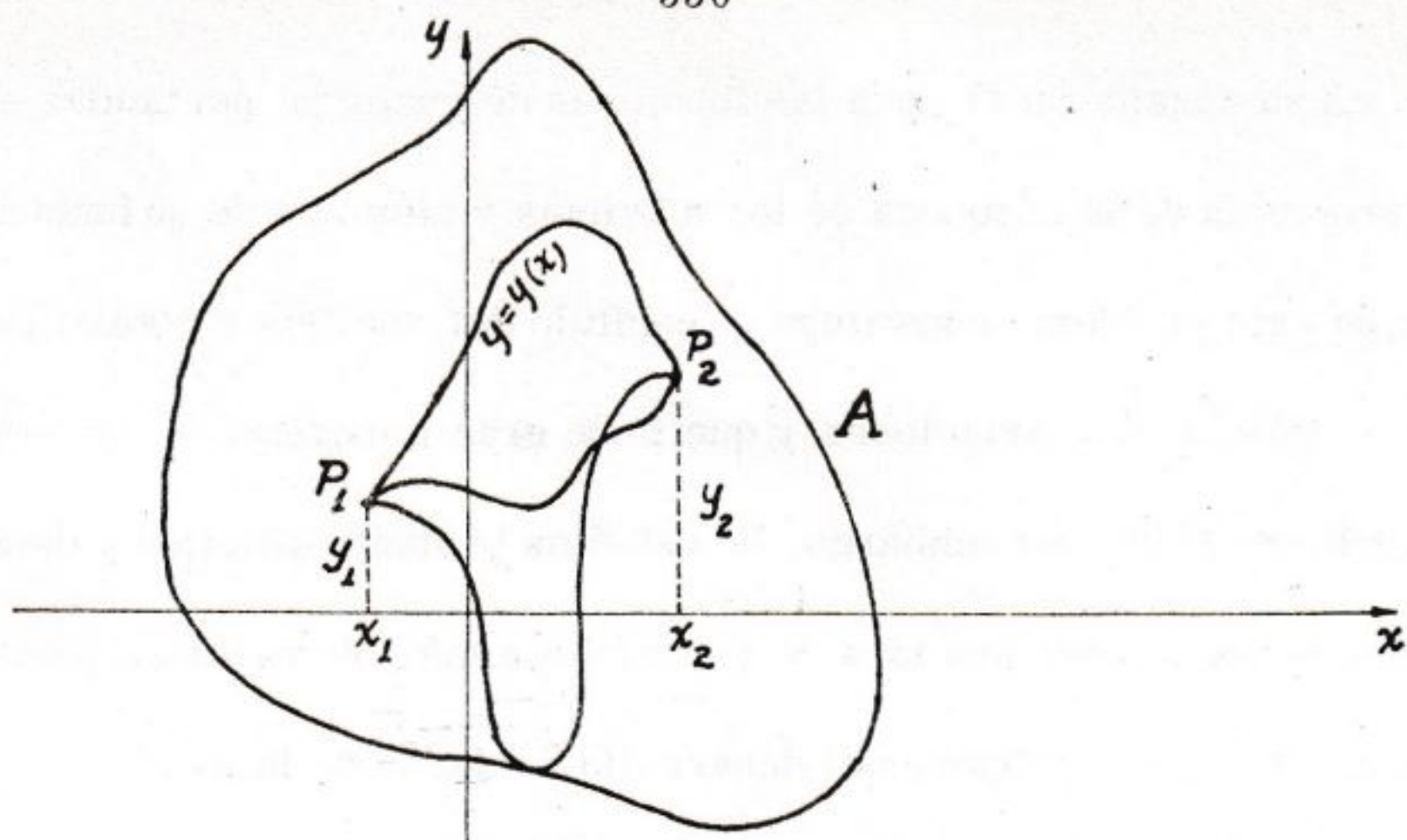


Fig. 95

so de las funciones de punto, podemos comenzar con la de las curvas  $y = y(x)$  que proporcionan para  $J(y)$  un máximo o un mínimo relativo. Una extensión muy natural de una conocida definición nos permite decir que una curva  $y = y_0(x)$  de la familia  $\Phi$  es de mínimo relativo para el funcional  $J(y)$  cuando se puede determinar un número  $\sigma > 0$  tal que, para todas las curvas  $y = y(x)$  de la familia  $\Phi$  que verifican la  $|y(x) - y_0(x)| < \sigma$  (para  $x_1 \leq x \leq x_2$ ), resulte  $J(y) \geq J(y_0)$ . Análoga definición vale para el caso del máximo relativo.

Pasemos ahora a la búsqueda de condiciones necesarias y de condiciones suficientes para que una curva  $y = y(x)$  sea de máximo o de mínimo relativo o, como se dice brevemente, sea una extremante del funcional (1).

## 2 - LA ECUACION DE EULER.

A las hipótesis ya puestas para las funciones  $f(x, y, y')$  agreguemos estas otras: que admitan las siguientes derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y'}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$  continuas para  $(x, y) \in A - \mathcal{F}A$ ,  $-\infty < y' < +\infty$ . Supongamos que

-----

Weierstrass sobre la existencia del máximo o del mínimo absoluto de una función de punto continua en un conjunto cerrado y acotado; pero no nos podemos ocupar de eso aquí. Admitamos solamente que, de acuerdo con dicho teorema, la existencia del máximo o del mínimo absoluto del funcional (1) queda asegurada solamente si la función  $f(x, y, y')$  goza de ciertas propiedades convenientes.



$y = y_0(x)$  sea una extremante para el funcional

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x)] dx, \quad (1)$$

y que su gráfico sea totalmente interior al dominio  $A$  (extremante interna);

supongamos, además, que en  $(x_1, x_2)$  la  $y_0(x)$  admita también derivada segunda continua.

Con tales hipótesis obtendremos como condición necesaria para la curva  $y = y_0(x)$  el hecho fundamental que debe ser integral de una cierta ecuación diferencial ordinaria de 2º orden, llamada ecuación de Euler.

Para establecer este resultado, comencemos observando que, siendo  $y = y_0(x)$  una extremante interna, existe un  $\sigma > 0$  tal que todas las curvas  $y = y(x)$  de la familia  $\Phi$  que verifican la

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \sigma \quad (2)$$

son todavía interiores de  $A$ , resultando, para las mismas

$$J(y) \geq J(y_0) \quad [ \text{o} \quad J(y) \leq J(y_0) ] .$$

Fijemos arbitrariamente una función  $\eta(x)$  que en  $(x_1, x_2)$  admita derivada primera continua y tal que sea

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (3)$$

Llamando  $M$  al máximo de  $|\eta(x)|$ , consideremos la familia  $\infty^1$  de funciones  $y(x)$  definidas por la fórmula

$$y(x) = y_0(x) + \lambda \eta(x), \quad (4)$$

variando el parámetro  $\lambda$  en el intervalo  $(-\frac{\sigma}{M}, +\frac{\sigma}{M})$ . Estas  $y(x)$  así obtenidas, admiten derivada primera continua en  $(x_1, x_2)$  y, en virtud de (3), tienen sus gráficos partiendo de  $P_1$  y finalizando en  $P_2$ . Además, siendo  $|\lambda| \leq \frac{\sigma}{M}$ , dichas funciones verifican la (2); entonces, para todo  $\lambda$  del intervalo mencionado, será

$$J(y_0 + \lambda \eta) \geq J(y_0) \quad [ \text{o} \quad J(y_0 + \lambda \eta) \leq J(y_0) ] .$$



Teniendo en cuenta que  $J(y_0 + \lambda \eta) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y_0(x) + \lambda \eta(x), y'_0(x) + \lambda \eta'(x)] dx$  depende exclusivamente del parámetro  $\lambda$ , las últimas desigualdades indican que la función

$$F(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y_0(x) + \lambda \eta(x), y'_0(x) + \lambda \eta'(x)] dx, \quad (5)$$

definida en el intervalo  $(-\frac{\sigma}{M}, \frac{\sigma}{M})$ , tiene en  $\lambda = 0$  un punto de mínimo [o de máximo] relativo; pero, por las hipótesis hechas sobre  $f, y_0, \eta$ , la

$F(\lambda)$  es una función derivable, y como el punto  $\lambda = 0$  es interior del citado intervalo, debe ser necesariamente  $F'(0) = 0^{(*)}$ . De la (5) seguirá, entonces,

aplicando conocidos teoremas

$$F'(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ f_y[x, y_0(x) + \lambda \eta(x), y'_0(x) + \lambda \eta'(x)] \eta(x) + f_{y'}[x, y_0(x) + \lambda \eta(x), y'_0(x) + \lambda \eta'(x)] \eta'(x) \right\} dx$$

y la condición necesaria  $F'(0)$  se traduce en la

$$F'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ f_y[x, y_0(x), y'_0(x)] \eta(x) + f_{y'}[x, y_0(x), y'_0(x)] \eta'(x) \right\} dx = 0 \quad (6)$$

Es conveniente realizar en el segundo miembro una integración por partes (lo

que es lícito de acuerdo a las hipótesis hechas sobre  $f, y_0, \eta$ ), obteniéndose

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} f_{y'}[x, y_0(x), y'_0(x)] \eta'(x) dx = \\ & = \left[ f_{y'}[x, y_0(x), y'_0(x)] \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} f_{y'}[x, y_0(x), y'_0(x)] \eta(x) dx, \end{aligned}$$

donde, teniendo en cuenta la (3) el primer término es nulo. Entonces la (6) se transforma en la

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ f_y[x, y_0(x), y'_0(x)] - \frac{d}{dx} f_{y'}[x, y_0(x), y'_0(x)] \right\} \eta(x) dx = 0 \quad (7)$$

El razonamiento que nos ha llevado a la (7) vale cualquiera sea la función  $\eta(x)$  fijada [dotada de derivada primera continua y que verifique la (3)]. Teniendo en cuenta esta arbitrariedad es fácil deducir de la (7) que necesariamente debe ser, para todo  $x$  de  $(x_1, x_2)$ :

$$f_y[x, y_0(x), y'_0(x)] - \frac{d}{dx} f_{y'}[x, y_0(x), y'_0(x)] = 0 \quad (8)$$

-----

(\*) Este es el punto esencial del razonamiento, que es lícito pues se han tomado en consideración tanto valores positivos como negativos de  $\lambda$ . Es claro que tal posibilidad deriva de la hipótesis que  $y_0(x)$  sea una extremante interna.



En efecto; indicando brevemente con  $G(x)$  al primer miembro de (8) supongamos, como hipótesis absurda, que exista en  $(x_1, x_2)$  un punto en el que, por ejemplo, sea  $G(x) > 0$ .

Tratándose de una función continua, existe un intervalo  $(\xi_1, \xi_2)$  (con  $x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2$ ) en el que resultará  $G(x) > 0$ . Si asumimos

$$\eta(x) \begin{cases} = 0 & \text{en } [x_1, \xi_1] \\ = (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 & \text{en } [\xi_1, \xi_2] \\ = 0 & \text{en } [\xi_2, x_2] \end{cases},$$

[lo que es lícito, pues para esta  $\eta(x)$  valen las (3) y su derivada es continua en  $(x_1, x_2)$ ], puede escribirse  $\int_{x_1}^{x_2} G(x) \eta(x) dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} G(x) (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 dx$ , debiendo esta última integral ser nula, en virtud de (7). Pero esto es absurdo ya que la función que se integra es positiva en los puntos interiores de  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Queda así establecido que vale la (8) o sea que, con las hipótesis hechas, la extremante interna  $y = y_0(x)$  es necesariamente una integral de la ecuación diferencial

$$f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') = 0, \quad (9)$$

llamada ecuación diferencial de Euler relativa al funcional (1). Se trata de una ecuación de 2º orden ya que, desarrollando la derivada total indicada en (9), tal ecuación puede escribirse

$$f_y(x, y, y') - f_{y'x}(x, y, y') - f_{y'y}(x, y, y') \cdot y' - f_{y'y'}(x, y, y') \cdot y'' = 0. \quad (9')$$

Las extremantes internas deben entonces buscarse entre las curvas integrales de la ecuación diferencial de Euler (9) que verifican las dos condiciones en los límites

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (10)$$

que traducen el hecho de pasar la curva por los dos puntos asignados  $P_1, P_2$ .

Las curvas  $y = y(x)$  definidas por (9), (10) se llaman las curvas extre-



males del funcional (1). Puede entonces decirse que las curvas extremantes internas deben buscarse entre las curvas extremales que resulten interiores del dominio  $A$  (si existen).

Queda el problema de decidir si una extremal interna es efectivamente una extremante, o sea, pasar al estudio de condiciones suficientes para el máximo o mínimo relativo del funcional (1).

Obsérvese la estrecha analogía entre la teoría aquí desarrollada y la de máximos y mínimos de las funciones de punto. Resulta clara la correspondencia entre las curvas extremales y los puntos donde se anulan las derivadas parciales primeras de la función, a los que ya en el Cap. XVI habíamos llamado puntos extremales.

---

Condiciones suficientes del tipo citado han sido dadas bajo varias formas por Legendre, Jacobi, Weierstrass; pero aquí nos limitaremos a indicar el siguiente simple teorema:

I - Si, fijados arbitrariamente  $x, y, y'$  [con  $(x, y) \in A$ ] la forma cuadrática en las dos variables  $\lambda, \mu$ ,

$$f_{yy}(x, y, y') \lambda^2 + 2f_{yy'}(x, y, y') \lambda \mu + f_{y'y'}(x, y, y') \mu^2 \quad (11)$$

resulta siempre definida, toda curva extremal interna resulta también una extremante para  $J(y)$ . Y con más precisión: si la forma (11) es definida positiva, es decir, si resulta

$$f_{yy}f_{y'y'} - f_{yy'}^2 > 0, \quad f_{yy} > 0, \quad (12)$$

toda curva extremal es curva de mínimo; si la forma (11) es definida negativa, vale decir, si

$$f_{yy}f_{y'y'} - f_{yy'}^2 > 0, \quad f_{yy} < 0, \quad (13)$$

toda curva extremal es curva de máximo.



Dem. Sean  $y_0 = y_0(x)$  una extremal interna y  $\sigma > 0$  un número tal que todas las curvas  $y = y(x)$  que admitan derivada primera continua que verifiquen la  $|y(x) - y_0(x)| < \sigma$ , pertenezcan a la familia  $\Phi$ . Para cada una de estas  $y(x)$  se tendrá

$$J(y) - J(y_0) = \int_{x_1}^{x_2} \{ f[x, y(x), y'(x)] - f[x, y_0(x), y'_0(x)] \} dx,$$

o sea, expresando la diferencia indicada bajo el signo de integral por medio de la fórmula de Taylor, e indicando con  $\lambda(x)$  la diferencia  $y(x) - y_0(x)$ :

$$\begin{aligned} J(y) - J(y_0) = & \int_{x_1}^{x_2} \{ f_y[x, y_0(x), y'_0(x)] \lambda(x) + f_{y'}[x, y_0(x), y'_0(x)] \lambda'(x) \} dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \{ f_{yy}(x, y_0 + \theta \lambda, y'_0 + \theta \lambda') \lambda^2 + 2f_{yy'}(x, y_0 + \theta \lambda, y'_0 + \theta \lambda') \lambda \lambda' + \\ & + f_{y'y'}(x, y_0 + \theta \lambda, y'_0 + \theta \lambda') \lambda'^2 \} dx, \end{aligned}$$

donde  $\theta$  designa un oportuno valor que cumple la  $0 < \theta < 1$ . Teniendo en cuenta que  $y_0(x)$  es una extremal, o sea que vale la (8), se ve inmediatamente (mediante una integración por partes) que la primera integral es nula. La segunda integral es positiva o negativa según que la forma cuadrática (11) sea definida positiva o negativa. En el primer caso resulta, entonces,  $J(y) > J(y_0)$ ; en el segundo  $J(y) < J(y_0)$ , o sea la tesis.

---

Las consideraciones precedentes se refieren a las curvas internas de máximo o de mínimo relativo. Serían necesarios otros estudios para las curvas no internas y después deberían desarrollarse consideraciones análogas a las del Cap. X n° 6 y del Cap. XVI, n° 13, para llegar a las curvas de máximo o de mínimo absoluto. Todo esto requiere desarrollos muy amplios y no podemos aquí ocuparnos de ello.

### 3 - EL METODO DE LAS VARIACIONES.

En las Matemáticas aplicadas el razonamiento hecho en el n° anterior para lle-



gar a la ecuación de Euler suele exponerse de modo abreviado, utilizando las denominadas variaciones tanto del argumento como del funcional  $J$ , según lo que ahora expondremos.

Examinemos la fórmula (6) del n<sup>o</sup> precedente y observemos que, poniendo  $\lambda \eta(x) = \delta y_0$ ,  $\lambda F'(0) = \delta J$ , la misma puede escribirse (tras haber multiplicado ambos miembros por  $\lambda$ ):

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \{ f_y(x, y_0, y'_0) \} \delta y_0 + f_{y'}(x, y_0, y'_0) (\delta y_0)' \} dx = 0. \quad (1)$$

Ahora, actuando desde un punto de vista puramente formal, podemos llegar a la (1) con el siguiente procedimiento. Consideremos al símbolo  $\delta J$  [que es el diferencial, en el punto  $\lambda = 0$  de la función  $F(\lambda)$  del n<sup>o</sup> precedente] como el resultado de aplicar el operador  $\delta$  al funcional  $J$ . Con este concepto, partiendo de la (\*)

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \quad (I)$$

se deduce, aplicando el citado operador,

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx. \quad (II)$$

Admitamos que el operador  $\delta$  pueda introducirse bajo el signo de integral y operar sobre la  $f$ ; escribiremos, entonces

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x, y, y') dx. \quad (III)$$

Admitamos, todavía, que sobre la  $f$  el  $\delta$  actúe como un operador de diferenciación total con respecto a los argumentos  $y, y'$ ; podremos entonces escribir

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} [ f_y(x, y, y') \delta y + f_{y'}(x, y, y') \delta y' ] dx. \quad (IV)$$

Tengamos presente que  $\delta y'$  significa  $\lambda \eta'$ ; pero se tiene  $\lambda \eta' = (\lambda \eta)'$ , con lo que, en lugar de  $\delta y'$  puede también escribirse  $(\delta y)'$ . La (IV) equivale entonces a la

-----

(\*) De ahora en adelante escribiremos simplemente  $y$  en lugar de  $y_0$ .



$$\delta(J) = \int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y, y') \delta y + f_{y'}(x, y, y') (\delta y)'] dx \quad (V)$$

y esta expresión coincide con la que figura en (1) .

La expresión  $\delta J$  deducida formalmente según el esquema (I), ..., (IV) se denomina la primera variación del funcional  $J$  . Recordando la (1) podemos entonces decir que, en correspondencia con una extremal interna  $y(x)$  , debe ser nula la primera variación  $\delta J$  . En  $\delta J$  figura el símbolo  $\delta y$  , que está en lugar de  $\lambda \eta(x)$  ; dicho símbolo debe entonces considerarse como una función de  $x$  que representa la variación sufrida por la extremante  $y(x)$  al pasarse de ella a cualquier otra de las funciones, próximas a la misma, de la familia  $\Phi$  . Como las curvas de esta familia deben pasar todas por los puntos  $P_1, P_2$  , la variación  $\delta y$  debe anularse para  $x = x_1$  y para  $x = x_2$  [cfr. con la (3) del n° precedente] .

Teniendo esto en cuenta, de la ecuación  $\delta J = 0$  se obtiene, integrando por partes [cfr. con la (7) del n° precedente] :

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y')] \delta y \cdot dx = 0 \quad (VI)$$

y de aquí, con el razonamiento hecho en el n° precedente [que en la práctica se omite sustituyéndolo por la simple frase "por la arbitrariedad de  $\delta y$  "], se deduce que debe ser nula la expresión entre paréntesis cuadrados y se llega así a la ecuación de Euler del n° precedente.

Este procedimiento abreviado es muy usado en la práctica también para otros problemas (daremos ejemplos en el n° 6); esto explica el nombre de "Cálculo de Variaciones" para la teoría que estamos estudiando.

#### 4 - CASOS PARTICULARES DE LA ECUACION DE EULER.

La ecuación de Euler es una ecuación diferencial de 2° orden, excepción hecha del caso en que  $f_{y'y'} \equiv 0$  , o sea del caso en que  $f(x, y, y')$  es una función li-



neal de  $y'$  :

$$f(x, y, y') = a(x, y) + b(x, y) y' .$$

Si esto sucede, la (9) del n<sup>o</sup> 2 se reduce a la  $a_y - b_x = 0$  , que es una identidad o una relación en términos finitos entre  $x$  e  $y$  . Este caso carece de interés aplicativo.

Suponiendo entonces  $f_{y'y'}$  no idénticamente nula, son en cambio de interés los dos casos particulares siguientes: 1<sup>o</sup>) la  $f$  no depende de  $y$  ; 2<sup>o</sup>) la  $f$  no depende de  $x$  .

En el 1<sup>er</sup> caso la ecuación de Euler se reduce a la  $\frac{d}{dx} f_{y'}(x, y') = 0$  y se tiene inmediatamente la integral primera

$$f_{y'}(x, y') = c ; \quad (1)$$

la determinación de las extremales depende, entonces, de la resolución de esta ecuación de 1<sup>er</sup> orden.

En el 2<sup>o</sup> caso, una vez que se observa que resulta idénticamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [ f(y, y') - y' f_{y'}(y, y') ] &= f_y(y, y') y' + f_{y'}(y, y') y'' - y'' f_{y'}(y, y') - \\ &- y' \frac{d}{dx} f_{y'}(y, y') = y' [ f_y(y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(y, y') ] , \end{aligned}$$

se ve cada integral de la ecuación de Euler  $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}(y, y') = 0$  satisface también la

$$f(y, y') - y' f_{y'}(y, y') = c .$$

Viceversa; toda integral de esta ecuación de 1<sup>er</sup> orden que no sea constante ( $y' \neq 0$ ) , es una integral de la ecuación de Euler. También en este caso se tiene entonces una integral primera, dada por la (2) , con la advertencia que para sus eventuales integrales constantes se hará, caso por caso, el análisis de si son o no integrales de la ecuación de Euler.



## 5 - ALGUNOS EJEMPLOS

Demos algunos ejemplos de problemas que se traducen en cuestiones de Cálculo de Variaciones.

Ejemplo 1º) Sean dados en el plano  $xy$  dos puntos  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  y considérense todas las curvas  $y = y(x)$  [con  $y(x)$  tales que admitan derivada continua] que unen  $P_1$  con  $P_2$ . Entre todas estas curvas se desea encontrar la de longitud mínima.

El problema se traduce inmediatamente en la búsqueda del mínimo del funcional  $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$ . Para la correspondiente ecuación de Euler se tiene la integral primera (2) del nº precedente, o sea  $\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$ . Se obtiene así  $y' = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = \text{constante}$  y de aquí surge que las curvas integrales son rectas. El segmento  $P_1 P_2$  es, entonces, la única extremal que verifica las condiciones en los límites  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y_2$  y es fácil ver que el mismo proporciona efectivamente el mínimo buscado. En efecto; considerada cualquier otra de nuestras curvas, es posible inscribir en ella una poligonal no sobrepuesta al segmento  $P_1 P_2$  y, por ende, de perímetro  $p > \overline{P_1 P_2}$ ; por otra parte la longitud  $J$  de la curva en consideración es el extremo superior de los perímetros de las poligonales inscriptas(\*) y, entonces,  $J > \overline{P_1 P_2}$ .

---

Ejemplo 2º) Problema de la braquistócrona. Están dados dos puntos  $A$ ,  $B$ . En el plano vertical que pasa por ellos se busca el arco de la curva, con extremos en  $A$  y  $B$ , a lo largo del cual, si se deja caer un punto material de peso  $P$  que parta de  $A$  sin velocidad inicial y se mueva sin influir el rozamiento sobre tal arco de curva, dicho punto llegue a  $B$  en el mínimo tiempo posible.

- - - - -

(\*) Esta propiedad no ha sido demostrada en estas "Lecciones"; pero no es difícil deducirla de cuanto ha sido dicho en el Cap. X, nº 11.



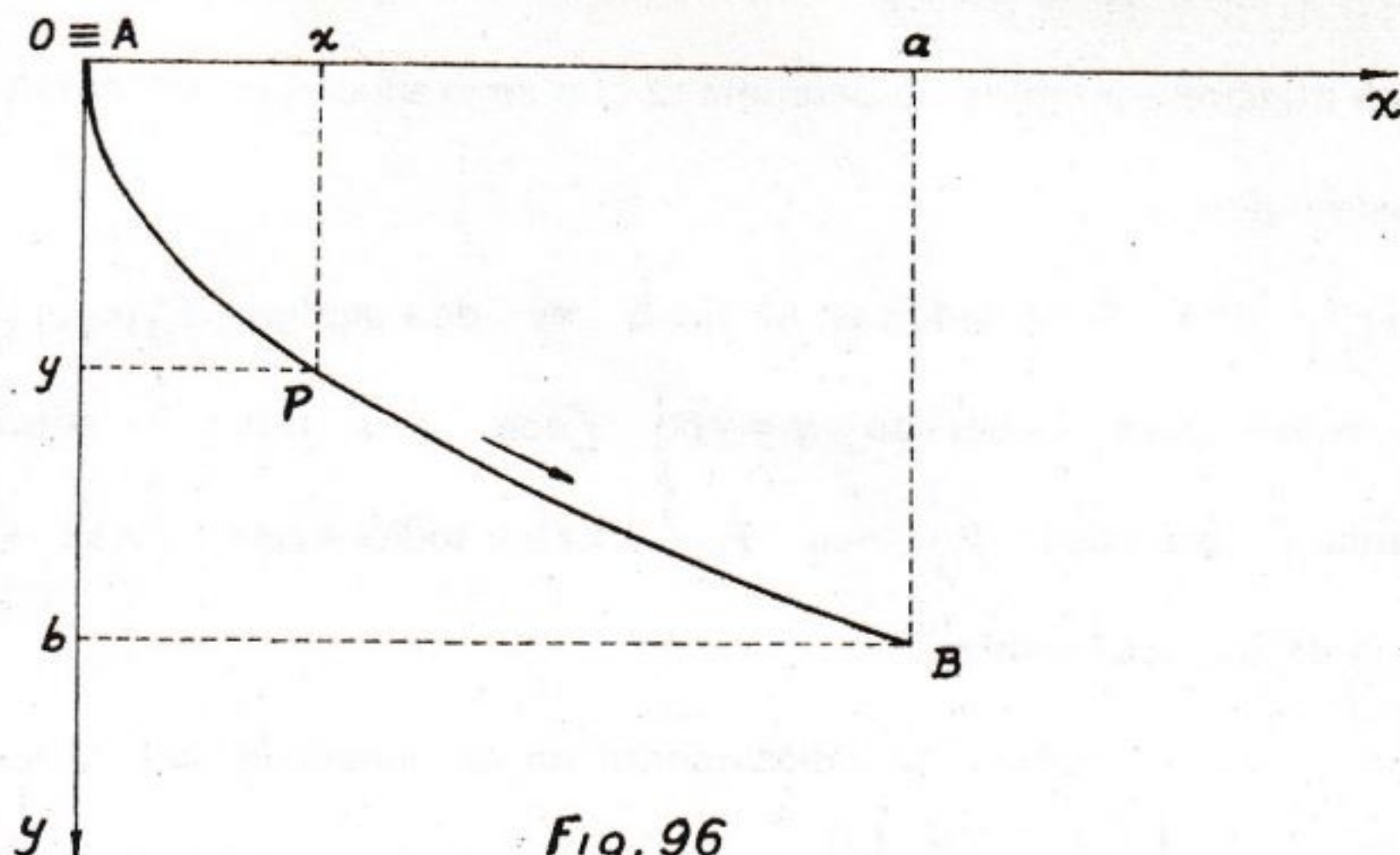


Fig. 96

Dispuestos los ejes coordenados como en la fig. 96, buscamos nuestra curva en la familia de las curvas regulares que pasan por  $A$  y  $B$  y son encontradas en un solo punto por las paralelas al eje  $y$ . Una curva como la descrita se representa con una ecuación  $y = y(x)$  con

$$y(0) = 0, \quad y(a) = b, \quad (a > 0, b > 0). \quad (1)$$

Cuando el punto  $P$  alcanza el punto genérico de su trayectoria  $(x, y)$ , su velocidad escalar  $\frac{ds}{dt}$  (donde  $s$  indica el arco sobre la trayectoria, que suponemos contado positivamente desde  $A$  hacia  $B$ ) vale, como es conocido por la Mecánica,  $\sqrt{2gy}$  donde  $g$  denota la aceleración de la gravedad. Se tiene en tonces

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx,$$

por lo que el tiempo  $T$ , necesario para recorrer todo el arco  $AB$  está dado por

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx.$$

Este  $T$  es un funcional de la  $y$  del tipo corriente. Estamos en el segundo de los casos particulares examinados en el  $n^\circ$  precedente y podemos entonces decir que la curva que minimiza  $T$ , si existe, debe satisfacer la (2) del  $n^\circ$  preceden te, que toma en esta caso la forma



$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - y' \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \text{constante}.$$

Indicando la constante con  $\frac{1}{\sqrt{2c}}$  ( $c > 0$ ), esta ecuación se reduce inmediatamente a la  $y(1+y'^2) = 2c$  y, sucesivamente, a la  $y' = \sqrt{\frac{2c-y}{y}}$ , de la que, separando las variables, e integrando, se llega a

$$x + c_1 = \int \sqrt{\frac{2c-y}{y}} dy.$$

La integral del segundo miembro puede calcularse con la sustitución  $y = c(1 - \cos t)$  y se deduce  $x + c_1 = c(t - \sin t)$ , de modo que las extremales del problema pueden considerarse representadas paramétricamente por las últimas dos ecuaciones escritas. Se trata entonces, de cicloides (generadas por el rodar, sin deslizar, de un círculo de radio  $c$ , arbitrario, sobre el eje  $x$ ).

De acuerdo con las condiciones (1) debemos ahora buscar de determinar las constantes arbitrarias  $c, c_1$  de modo que la cicloide pase por los puntos  $A(0,0)$ ,  $B(a,b)$ .

El pasar por el punto  $A$  requiere que exista un valor de  $t$  para el que valgan, simultáneamente  $c_1 = c(t - \sin t)$ ,  $0 = c(1 - \cos t)$ ; de la segunda surge que  $t$  debe ser múltiplo de  $2\pi$ , o sea que  $A$  debe ser una cúspide de la cicloide; podemos suponer  $t = 0$  y entonces la primera condición impone  $c_1 = 0$ . Teniendo esto en cuenta, pasamos a imponerle que contenga a  $B$ ; debe existir un valor de  $t$ , comprendido entre  $0$  y  $2\pi^{(*)}$ , para el que valgan las  $a = c(t - \sin t)$ ,  $b = c(1 - \cos t)$ , o sea tal de tenerse

$$\frac{1 - \cos t}{t - \sin t} = \frac{b}{a}. \quad (2)$$

Ahora es fácil ver que la función de  $t$  indicada en el primer miembro decrece de  $+\infty$  a cero mientras  $t$  crece de cero a  $2\pi$ ; existirá, por lo tanto un (y

-----

(\*) Agregamos esta condición porque obviamente deben descartarse los arcos de cicloide con cúspides en puntos distintos de los extremos  $A, B$ .



solamente un) valor  $t^*$  de  $t$  que satisfaga la (2), resultando  $0 < t^* < 2\pi$ .

Una vez determinado  $t^*$  se tendrá después  $c = \frac{a}{t^* - \sin t^*}$ .

Con las condiciones impuestas  $a > 0$ ,  $b > 0$  se tendrá, entonces, una y solamente una extremal que pase por los puntos  $A$ ,  $B$ .

Digamos, a título informativo, que es posible demostrar que la cicloide así determinada proporciona efectivamente el mínimo valor de  $T$ .

**Ejemplo 3<sup>o</sup>)** Problema de la superficie de rotación de área mínima. En un plano están dadas una recta  $r$  y dos puntos  $A$ ,  $B$  situados en un mismo semiplano de los dos determinados por  $r$ . Entre todos los arcos de curva que en tal plano unen los dos puntos dados,

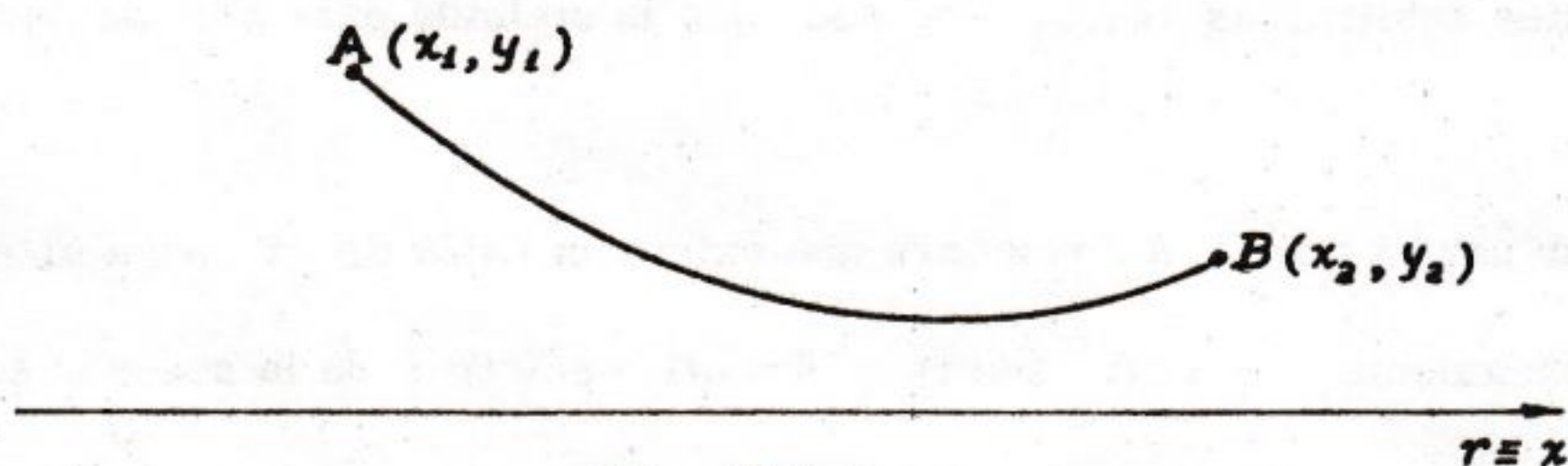


Fig. 97

determinar aquel que, rotando alrededor de la recta  $r$ , genera la porción de superficie de revolución de área mínima. Puestas las cosas como en la fig. 97 y buscando la solución en la familia de las curvas  $y = y(x)$  que verifican las

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad (3)$$

el problema se traduce inmediatamente en la búsqueda del mínimo del funcional

$$s = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

La ecuación de Euler se escribe ahora  $\sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$ , o sea  $1 + y'^2 - yy'' = 0$ , la que admite la integral primera (2) del n<sup>o</sup> precedente que

proporciona  $y \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$ , vale decir,

$$y = c \sqrt{1 + y'^2}. \quad (4)$$



Esta ecuación de 1<sup>er</sup> orden es satisfecha para  $y = c$  ; pero ésta no es integral de la ecuación de Euler, y por eso no se toma en consideración. Las extremales es tán dadas, entonces, por las integrales no constantes de la (4) [con  $c \neq 0$ ], cu ya integral general se obtiene eliminando  $y'$  entre la misma ecuación (4) y la

$$x + c_1 = c \log (y' + \sqrt{1 + y'^2}) , \quad (5)$$

obtenida, por integración, de la  $dx = c \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$  , que es una fácil consecuen cia de la (4) .

A través de dicha eliminación se llega a la

$$y = c \cosh \frac{x + c_1}{c} ,$$

por lo que las extremales son catenarias .

La determinación de las constantes arbitrarias  $c$  ,  $c_1$  , de modo de satisfacer las dos condiciones en los límites (3) no es simple y requiere una laboriosa discu sión la que, entre otras cosas, pone en evidencia que el problema no siempre tiene solución. Contentémonos con unas breves referencias. Se puede demostrar que del punto  $A$  salen  $\infty^1$  catenarias de la familia (6) y que ellas admiten una en volvente  $\Gamma$  (ver fig. 98); si el punto  $B$  cae en la región  $I$  , dos de estas ca tenarias pasan por él; si cae sobre  $\Gamma$  , hay una sola; si cae en la región  $II$  , no hay ninguna. En el primer caso, de las dos catenarias que unen  $A$  y  $B$  , es necesario tomar aquélla cuyo punto de contacto con  $\Gamma$  está fuera del arco  $AB$  ; ésta es la que da la solución del problema. En el segundo caso, el único arco de ca tenaria que pasa por  $A$  y  $B$  da también la solución buscada. En el tercer caso no existe curva de mínimo.

Se puede intuitivamente alcanzar este resultado pensando en la superficie de área mínima que pasa por dos círculos situados en los planos  $x = x_1$  ,  $x = x_2$  y de ra- dios  $y_1$  ,  $y_2$  y realizando tal superficie con una lámina líquida (experiencia de Plateau) . Si los dos círculos están suficientemente vecinos, entre ellos se extien-



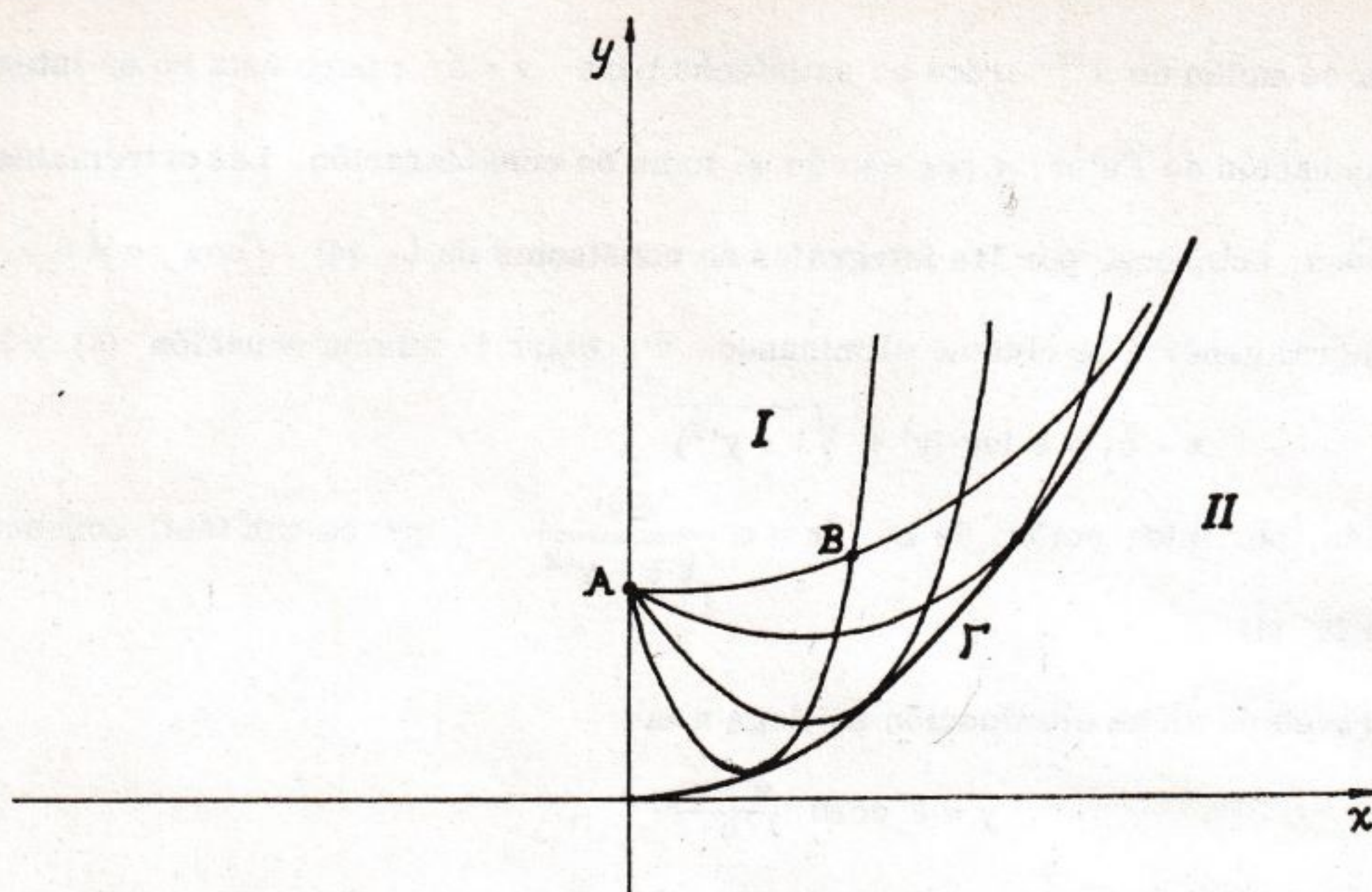


Fig. 98

de una lámina en forma de catenoide; alejándolos, el catenoide se encurva cada vez más hasta que en un cierto punto se separa, reduciéndose a dos láminas planas extendidas sobre los dos círculos.

Esta última solución ha escapado a nuestra búsqueda porque la habíamos reducido a aquellas superficies de rotación cuyo meridiano era representable por una ecuación del tipo  $y = y(x)$ .

## 6 - NOCIONES SOBRE OTROS PROBLEMAS.

En los números precedentes nos hemos ocupado únicamente de la búsqueda de los máximos o mínimos del funcional

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x)] dx, \quad (1)$$

bajo la condición que las curvas  $y = y(x)$  tengan los extremos fijos  $P_1, P_2$ . El método de las variaciones al que se hizo referencia en el n° 3, puede también servir para otros funcionales y con condiciones distintas para las curvas en consideración que las ahí expuestas. Demos, con el propósito de ilustrar este he



cho, algún ejemplo:

Ejemplo 1<sup>o</sup>) Consideremos el funcional  $J(y)$  definido por (1) y supongamos que de los extremos  $P_1, P_2$  estén fijadas solamente las abscisas  $x_1, x_2$ , dejando indeterminadas sus ordenadas. En ese caso la variación  $\delta y$  no queda más sujeta a la restricción de anularse para  $x = x_1$  y  $x = x_2$ , siendo los valores  $\delta y(x_1)$ ,  $\delta y(x_2)$  del todo arbitrarios. Procediendo como en el n<sup>o</sup> 3, se igualará a cero la variación primera de  $J(y)$ :

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y, y') \delta y + f_{y'}(x, y, y') \delta y'] dx = 0$$

y se efectuará en el 2<sup>o</sup> término una integración por partes transformando la relación precedente en esta otra

$$\begin{aligned} \delta J = & f_{y'}[x_2, y(x_2), y'(x_2)] \delta y(x_2) - f_{y'}[x_1, y(x_1), y'(x_1)] \delta y(x_1) + \\ & + \int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y')] \delta y dx = 0 \end{aligned}$$

Debiendo ésta valer cualesquiera sean  $\delta y$ ,  $\delta y(x_2)$ ,  $\delta y(x_1)$ , se deduce que para las extremantes debe subsistir la ecuación de Euler

$$f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') = 0,$$

acompañada de las dos condiciones en los límites

$$f_{y'}[x_1, y(x_1), y'(x_1)] = 0, \quad f_{y'}[x_2, y(x_2), y'(x_2)] = 0,$$

a las que se les suele dar el nombre de condiciones de transversalidad.

Ejemplo 2<sup>o</sup>) Consideremos este otro funcional

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x), y''(x)] dx, \quad (2)$$

suponiendo móviles los extremos  $P_1, P_2$  de las curvas (de los que se fijan únicamente las abscisas  $x_1, x_2$ ). Anulando la variación primera de  $J(y)$  se obtiene

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} (f_y \delta y + f_{y'} \delta y' + f_{y''} \delta y'') dx = 0,$$

y realizando una integración por partes sobre el segundo término y dos sobre el ter cero:



$$\delta J = \left[ \left( f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right) \delta y + f_{y''} \delta y' \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left( f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \right) \delta y \cdot dx = 0.$$

Por la arbitrariedad de  $\delta y$ ,  $\delta y(x_1)$ ,  $\delta y(x_2)$ ,  $\delta y'(x_1)$ ,  $\delta y'(x_2)$ , se concluye que debe valer la ecuación de Euler de 4º orden

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0, \quad (3)$$

acompañada de las cuatro condiciones de transversalidad

$$\begin{aligned} \left[ f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right]_{x=x_1} &= \left[ f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right]_{x=x_2} = 0, \\ \left[ f_{y''} \right]_{x=x_1} &= \left[ f_{y''} \right]_{x=x_2} = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 3º) Consideremos el siguiente funcional que tiene por argumento una función  $z(x, y)$  de las dos variables  $x, y$ :

$$J(z) = \iint_A f(x, y, z, p, q) \, dx \, dy \quad \left( \text{con } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \, q = \frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad (4)$$

donde con  $A$  se ha indicado un dominio regular dado en el plano  $xy$ . Deseamos determinar las superficies extremantes de  $J(z)$ , suponiendo dados los valores  $\varphi(x, y)$  que la  $z(x, y)$  asume sobre la frontera de  $A$ . Esto equivale a considerar solamente aquellas superficies  $z = z(x, y)$ , que pasan por una línea  $\Gamma$  dada en el espacio  $xyz$ , proyectándose sobre el plano  $xy$  en la  $\mathcal{F}A$ . La variación  $\delta z$  debe entonces ser nula sobre  $\mathcal{F}A$ . Se encuentra

$$\delta J = \iint_A (f_z \cdot \delta z + f_p \cdot \delta z_x + f_q \cdot \delta z_y) \, dx \, dy = 0$$

y transformando el segundo y tercer término con las fórmulas de Green:

$$\delta J = \int_{+\mathcal{F}A} (f_p \, dy - f_q \, dx) \cdot \delta z + \iint_A \left( f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q \right) \cdot \delta z \cdot dx \, dy = 0.$$

La integral curvilínea es nula (siendo  $\delta z = 0$  sobre  $\mathcal{F}A$ ) y entonces, por la arbitrariedad de  $\delta z$  en  $A - \mathcal{F}A$ , se obtiene la ecuación de Euler

$$f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q = 0, \quad (5)$$

que es, en este caso, una ecuación en derivadas parciales, de segundo orden, de la  $z(x, y)$ . Esta va acompañada de las condiciones de frontera (o al contorno):



$$z = \varphi(x, y) \quad (\text{sobre } \tilde{F} A),$$

y de ahí que la determinación de las extremales se traduce en un problema de Dirichlet.

Notemos el caso particular en que el funcional (4) representa el área de la porción de superficie  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in A$ , es decir el caso en que se tiene  $f = \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$ . Se trata, entonces, de buscar entre todas las superficies que pasan por la línea  $\Gamma$  dada, aquella de área mínima (problema de Plateau).

En ese caso, un fácil cálculo muestra que la ecuación (5) tiene la forma

$$(1 + z_y^2) z_{xx} - 2 z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2) z_{yy} = 0$$

y toma el nombre de ecuación de las superficies de área mínima.

Otros tipos de problemas serán tratados en los "Ejercicios".







## INDICE

CAPITULO XX	Medida de los conjuntos acotados . . . . .	Pag.	1
1 -	Medida de los intervalos de un espacio euclídeo de $r$ dimensiones . . . . .	"	1
2 -	Medida exterior y medida interior de un conjunto acotado . . . . .	"	4
3 -	Conjuntos medibles . . . . .	"	16
4 -	Propiedades de la medida . . . . .	"	18
5 -	Ejemplos de conjuntos medibles en el plano . . . . .	"	21
CAPITULO XXI	Funciones de dominio . . . . .	"	30
1 -	Definición de función de dominio . . . . .	"	30
2 -	Derivada de una función de dominio . . . . .	"	31
3 -	Funciones aditivas de dominio . . . . .	"	35
4 -	Función de dominio primitiva de una función de punto dada . . . . .	"	39
5 -	Construcción de la función aditiva de dominio primitiva de una función continua de punto dada . . . . .	"	41
6 -	Un teorema sobre la descomposición de un dominio . . . . .	"	48
CAPITULO XXII	Integración de las funciones continuas de varias variables y aplicaciones . . . . .	"	53
1 -	Definición y propiedades de la integral de una función continua sobre un dominio acotado y medible . . . . .	"	53
2 -	Ejemplos de conjuntos medibles en el espacio ; significado geométrico de una integral doble . . . . .	"	59
3 -	Algunas aplicaciones del concepto de integral . . . . .	"	63
4 -	Integrales de funciones complejas . . . . .	"	66
5 -	Fórmulas de reducción para integrales dobles . . . . .	"	67
6 -	Fórmulas de reducción para las integrales triples . . . . .	"	73
7 -	Cambio de las coordenadas cartesianas en polares, en las integrales dobles . . . . .	"	77



8 - Cambio de las coordenadas cartesianas en polares (o en cilíndricas) en las integrales triples . . . . .	Pag.	83
9 - Nociones sobre el cambio general de variables en las integrales múltiples . . . . .	"	88
10 - Aplicaciones en el cálculo de volúmenes . . . . .	"	92
11 - Área de una superficie . . . . .	"	96
12 - Observaciones y ejemplos sobre el área de una superficie . . . . .	"	104
13 - Área de una superficie de rotación . . . . .	"	107

**CAPITULO XXIII Integración de las formas diferenciales lineales e integrales curvilíneas . . . . .** " 110

1 - El problema de la integración de las formas diferenciales lineales . . . . .	"	110
2 - Integral curvilínea de una forma diferencial lineal y aplicaciones a los diferenciales . . . . .	"	114
3 - Condiciones para que una forma diferencial lineal sea un diferencial exacto . . . . .	"	121
4 - Fórmulas de Green en el plano y aplicaciones . . . . .	"	126
5 - Condiciones suficientes para que una forma lineal en dos variables sea un diferencial exacto . . . . .	"	133
6 - Integral curvilínea de una función y distintas aplicaciones . . . . .	"	137

**CAPITULO XXIV Integrales superficiales . . . . .** " 145

1 - Integral superficial de una función . . . . .	"	145
2 - Integral superficial de una forma diferencial . . . . .	"	146
3 - Teorema de Stokes . . . . .	"	149
4 - Condiciones suficientes para que una forma diferencial lineal en tres variables sea un diferencial exacto . . . . .	"	156
5 - Fórmulas de Green en el espacio y aplicaciones . . . . .	"	159

**CAPITULO XXV Extensión del concepto de integral . . . . .** " 165

1 - Medida de los conjuntos no acotados . . . . .	"	165
2 - Procedimiento para el cálculo de la medida de un conjunto . . . . .	"	168
3 - Integrales de funciones de una variable generalmente continuas y no negativas . . . . .	"	172
4 - Integrales de funciones de una variable, generalmente continuas y de signo cualquiera . . . . .	"	186
5 - Integrales de funciones generalmente continuas de varias variables . . . . .	"	194



6 - Funciones sumables y propiedades de sus integrales .....	Pag.	202
7 - Algunos criterios de sumabilidad y ejemplos varios .....	"	210
8 - Nociones sobre ulteriores desarrollos de la teoría .....	"	218
9 - Integrales de funciones complejas .....	"	219
10 - Integrales impropias .....	"	220

## CAPITULO XXVI Sucesiones y series de funciones .....

1 - Convergencia uniforme de una sucesión de funciones .....	"	225
2 - Teoremas del límite y de la continuidad para sucesiones de funciones .....	"	228
3 - Teoremas de derivación y de pasaje al límite bajo el signo de integral para sucesiones de funciones .....	"	231
4 - Convergencia uniforme de una serie de funciones y teoremas relativos .....	"	236
5 - Convergencia total de una serie de funciones .....	"	242
6 - La serie de Taylor en el campo real .....	"	244
7 - Cálculo de integrales por medio de series .....	"	254
8 - Sucesiones y series de funciones complejas .....	"	256
9 - Serie de potencias y serie de Taylor en el campo complejo .....	"	258
10 - El teorema de Abel .....	"	270
11 - Serie de Fourier .....	"	273

## CAPITULO XXVII Funciones implícitas .....

1 - La ecuación $f(x, y) = 0$ y el concepto de función implícita .....	"	285
2 - Extensión al caso de la ecuación $f(x_1, x_2, \dots, x_r, y) = 0$ .....	"	292
3 - Extensiones en el caso de los sistemas de ecuaciones .....	"	294
4 - Tangentes a curvas del plano y del espacio; plano tangente a una superficie .....	"	303
5 - Máximos y mínimos vinculados; método de los multiplicadores de Lagrange .....	"	309
6 - Envolvente de una familia de curvas planas .....	"	313

## CAPITULO XXVIII Aplicaciones geométricas .....

1 - Puntos de curvatura y puntos de inflexión de las curvas .....	"	320
---	---	-----



2 - Plano osculador y círculo osculador . . . . .	Pag.	322
3 - Triedro principal, fórmulas de Frenet . . . . .	"	328
4 - Curvatura y torsión . . . . .		
5 - Evoluta y evolvente de una curva plana . . . . .	"	335

CAPITULO XXIX	Ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	"	339
---------------	---	---	-----

1 - Generalidades . . . . .		
2 - Sistemas de ecuaciones diferenciales . . . . .	"	345
3 - Condiciones iniciales . . . . .	"	349
4 - Integración de algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden, de forma normal . . . . .		
5 - Teorema de existencia y unicidad relativo al problema de Cauchy para un sistema de ecuaciones diferenciales de forma normal . . . . .	"	363
6 - El problema de Cauchy para los sistemas de ecuaciones diferenciales de forma no normal . . . . .	"	370
7 - Mayores detalles sobre los conceptos de integral particular, general, singular . . . . .	"	373
8 - Integración de algunos tipos de ecuaciones de segundo orden . . . . .	"	383
9 - Integrales primeras de un sistema de ecuaciones diferenciales . . . . .	"	384
10 - Ecuaciones diferenciales lineales . . . . .	"	386
11 - Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas . . . . .	"	389
12 - Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas . . . . .	"	398
13 - Ecuaciones lineales con coeficientes constantes; estudio de las ecuaciones homogéneas . . . . .	"	405
14 - Ecuaciones lineales con coeficientes constantes; estudio de las ecuaciones no homogéneas . . . . .	"	413
15 - Ecuaciones diferenciales lineales de Euler . . . . .	"	418
16 - Nociones sobre la integración por serie de las ecuaciones diferenciales . . . . .	"	420

CAPITULO XXX	Nociones sobre las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales . . . . .	"	423
--------------	--	---	-----

1 - Generalidades . . . . .	"	423
2 - El problema de Cauchy . . . . .	"	427
3 - Ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales de segundo orden . . . . .	"	432
4 - Ecuación de Laplace; problemas de Dirichlet y de Neumann . . . . .	"	435
5 - Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el caso del círculo . . . . .	"	439
6 - Problema de Cauchy y problema de propaga -		



ción para la ecuación de la cuerda vibrante . . . . .	Pag.	443
7 - El problema de propagación para la ecuación del calor . . . . .	"	447
 CAPITULO XXXI Funciones analíticas . . . . .	"	450
1 - Introducción . . . . .	"	450
2 - Series bilaterales de potencias . . . . .	"	451
3 - Integrales de funciones holomorfas y teoremas de Cauchy . . . . .	"	453
4 - Integrales de funciones holomorfas en campos simplemente conexos; funciones primitivas . . . . .	"	457
5 - Expresión de los coeficientes de una serie de potencias mediante integrales . . . . .	"	459
6 - Desarrollo local en serie de Taylor; existencia de todas las derivadas; teorema de Morera . . . . .	"	462
7 - Desarrollo de Laurent . . . . .	"	466
8 - Sucesiones y series de funciones holomorfas; te orema de Weierstrass . . . . .	"	469
9 - Ceros de una función holomorfa . . . . .	"	471
10 - Prolongación de las funciones holomorfas . . . . .	"	475
11 - Puntos singulares aislados y su clasificación . . . . .	"	478
12 - Singularidades polares . . . . .	"	482
13 - Singularidades esenciales . . . . .	"	485
14 - Residuos; funciones con puntos singulares ais lados . . . . .	"	487
15 - Funciones enteras y funciones meromorfas . . . . .	"	492
16 - El plano complejo dotado de punto al infinito (es fera compleja) . . . . .	"	494
17 - Comportamiento de una función holomorfa en el punto al infinito . . . . .	"	498
18 - Las funciones holomorfas consideradas sobre la esfera compleja; nociones generales sobre pun tos singulares . . . . .	"	506
19 - Algunas nociones sobre las transformaciones planas regulares . . . . .	"	511
20 - Transformaciones conformes . . . . .	"	516
21 - Funciones analíticas polídromas . . . . .	"	520
22 - Estudio de la función logaritmo . . . . .	"	521
23 - Puntos críticos o de diramación; otros ejem plos de funciones polídromas . . . . .	"	531
24 - Algún caso de representación de una función po lídroma en el entorno de un punto crítico . . . . .	"	534
25 - Polidromía de la integral de una función holo morfa en un campo varias veces conexo . . . . .	"	538
26 - Nociones sobre la teoría general de las funcio nes analíticas . . . . .	"	546



CAPITULO XXXII	Nociones sobre cálculo de variaciones . . . . .	Pag.	548
1 - El concepto de funcional y el cálculo de varia-	ciones . . . . .	"	548
2 - La ecuación de Euler . . . . .		"	550
3 - El método de las variaciones . . . . .		"	555
4 - Casos particulares de la ecuación de Euler . . . . .		"	557
5 - Algunos ejemplos . . . . .		"	559
6 - Nociones sobre otros problemas . . . . .		"	564



















140

5/1/2



